2024 届大湾区普通高中毕业年级联合模拟考试（一）

数学参考答案

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	A	C	D	A	B	D	B	C

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

题号	9	10	11	12
答案	CD	ACD	ABD	ACD

三、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13．7　　14．$2\sqrt{2}$　　15．6.75　　16．$\sqrt{3}$

四、解答题：本大题共6小题，共70分.解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17.（10 分）

解：（1）由 $\sin B=\dfrac{5\sqrt{7}}{16},0<B<\dfrac{\pi}{2}$ 得 $\cos B=\sqrt{1-\sin^2 B}=\dfrac{9}{16}$，　…………1 分

由余弦定理：$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，　…………2 分

解得 $a=6$ 或 $a=-\dfrac{3}{2}$（舍），　…………3 分

所以 $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{1}{8}$.　…………5 分

（2）法 1：由（1）$BC=a=6$，由 $\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{DC}$ 知，$BD=4$.　…………6 分

由余弦定理：$AD^2=AB^2+BD^2-2AB\cdot BD\cdot\cos B$　…………7 分

$$=4^2+4^2-2\times4\times4\times\frac{9}{16}$$

$=14$　…………9 分

所以 $|\overrightarrow{AD}|=\sqrt{14}$.　…………10 分

法 2：由 $\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{DC}$，即 $\overrightarrow{CD}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{CB}$，　…………6 分

得 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$， …………7 分

所以 $\overrightarrow{AD}^2=\frac{1}{9}\overrightarrow{AB}^2+\frac{4}{9}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\frac{4}{9}\overrightarrow{AC}^2=\frac{16}{9}+\frac{4}{9}\times4\times5\times\frac{1}{8}+\frac{4}{9}\times25=14$， …………9 分

所以 $|\overrightarrow{AD}|=\sqrt{14}$． …………10 分

18.（12 分）

解：（1）因为 $a_n-b_n=\lambda$，即 $b_n=a_n-\lambda$，

所以 $b_1=a_1-\lambda=1-\lambda\neq0$， …………1 分

而 $b_{n+1}=a_{n+1}-\lambda=a_n+b_n-\lambda=\left(a_n-\lambda\right)+b_n=2b_n$， …………5 分

所以数列 $\{b_n\}$ 是以 $1-\lambda$ 为首项，2 为公比的等比数列． …………6 分

（2）由（1）知 $b_n=(1-\lambda)\cdot2^{n-1}$，所以 $a_n=b_n+\lambda=(1-\lambda)\cdot2^{n-1}+\lambda$． …………7 分

因为当 $n=3$ 和 $n=4$ 时，数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 取得最大值，所以 $a_4=0$，

即 $8(1-\lambda)+\lambda=0$，解得 $\lambda=\frac{8}{7}$． …………9 分

所以 $a_n=\frac{8}{7}-\frac{1}{7}\times2^{n-1}$． …………10 分

经检验，当 $n\le3$ 时，$a_n>0$，当 $n\ge5$ 时，$a_n<0$，所以 S_n 先增后减，

在 $n=3$ 和 $n=4$ 时取得最大值，符合题意． …………11 分

此时 $S_n=\frac{8}{7}n-\frac{1}{7}\left(1+2+\cdots+2^{n-1}\right)=\frac{8}{7}n-\frac{1}{7}\times\frac{1-2^n}{1-2}=\frac{8}{7}n-\frac{1}{7}\left(2^n-1\right)$． …………12 分

19.（12 分）

解：**法 1：**（1）记摸球结果是一红一白为事件 A，

假如选择的是第一个盒子，则 $P(A)=\frac{C_3^1\bullet C_2^1}{C_5^2}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$， …………2 分

假如选择的是第二个盒子，则 $P(A)=\frac{C_6^1\bullet C_4^1}{C_{10}^2}=\frac{24}{45}=\frac{8}{15}$， …………4 分

$\because \frac{3}{5} > \frac{8}{15}$ …………5 分

所以，可以认为选择的是第一个盒子。…………6 分

（2）（1）中判断结果：选择的盒子为 1 号盒子.

记“任选一个盒子，选到 1 号”为事件 B；记“任选一个盒子，从盒中摸球，结果为一红一白为事件 C”； 记“在摸球结果为一红一白的条件下，选到的盒子为 1 号”为 D，

则 $P(D)=P(B|C)=\frac{P(BC)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}}{\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}+\frac{1}{2}\times\frac{8}{15}}=\frac{9}{17}$， …………8 分

$X \sim B(5,\frac{9}{17})$ …………10 分

X 的数学期望 $E\left(X\right)=5\times\frac{9}{17}=\frac{45}{17}$ …………12 分

法 2：

（1）记摸球结果是一红一白为事件 A，记“任选一个盒子，选到 1 号”为事件 B，记“任选一个盒子，选到 2 号”为事件 C，

则 $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{C_3^1 \cdot C_2^1}{C_5^2}}{\frac{1}{2}\times\frac{C_3^1 \cdot C_2^1}{C_5^2}+\frac{1}{2}\times\frac{C_6^1 \cdot C_4^1}{C_{10}^2}}=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}}{\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}+\frac{1}{2}\times\frac{8}{15}}=\frac{9}{17}$， …………2 分

$P(C|A)=\frac{P(AC)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{C_6^1 \cdot C_4^1}{C_{10}^2}}{\frac{1}{2}\times\frac{C_3^1 \cdot C_2^1}{C_5^2}+\frac{1}{2}\times\frac{C_6^1 \cdot C_4^1}{C_{10}^2}}=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{8}{15}}{\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}+\frac{1}{2}\times\frac{8}{15}}=\frac{8}{17}$， …………4 分

$\because P(B|A)>P(C|A)$， …………5 分

所以，若摸球的结果是一红一白，则选择的是 1 号盒子的可能性更大。…………6 分

（2）判断正确的次数为 X 的可能取值为 0，1，2，3，4，5，且满足 $X \sim B(5,\frac{9}{17})$

……………10 分

所以 X 的数学期望 $E\left(X\right)=5\times\frac{9}{17}=\frac{45}{17}$. ……………12 分

20．（12 分）

解：（1）在平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$ABC-A_1B_1C_1$ 是三棱柱，

$V_{B-ACC_1A_1}=\frac{2}{3}V_{ABC-A_1B_1C_1}=\frac{1}{3}V_{ABCD-A_1B_1C_1D_1}=2$， ……………3 分

设点 B 到平面 ACC_1A_1 的距离为 d，则 $V_{B-ACC_1A_1}=\frac{1}{3}S_{ACC_1A_1}\cdot d=\frac{1}{3}\times 6d=2$，所以 $d=1$，

即点 B 到平面 ACC_1A_1 的距离为 1. ……………6 分

（2）在 $\square ABCD$ 中，$AB=AD=2, \angle BAD=60^\circ$，所以 $ABCD$ 是菱形，连接 BD 交 AC 于 O，

则 $BO=1$，

由（1）知点 B 到平面 ACC_1A_1 的距离为 1，所以 $BO\perp$ 平面 ACC_1A_1. ……………7 分

设点 A_1 在直线 AC 上射影为点 $H, S_{\square ACC_1A_1}=AC\cdot A_1H=2\sqrt{3}A_1H=6$，

则 $A_1H=\sqrt{3}$，且 $BO\perp A_1H, AH=\sqrt{AA_1^2-A_1H^2}=\sqrt{(\sqrt{6})^2-(\sqrt{3})^2}=\sqrt{3}$，

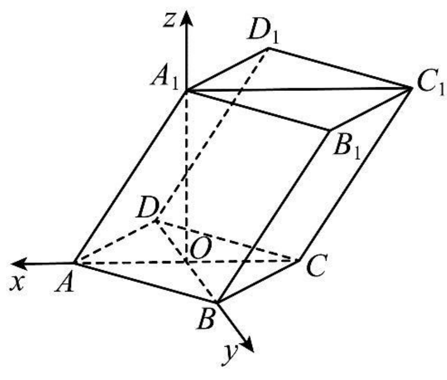
所以 O 和 H 重合，即 $A_1O\perp AO$. ……………8 分

以 O 为坐标原点，OA,OB,OA_1 分别为 x 轴，y 轴，z 轴，建立空间直角坐标系，

则 $B(0,1,0), A(\sqrt{3},0,0), D(0,-1,0), A_1(0,0,\sqrt{3})$，

根据 $\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{DD_1}=(-\sqrt{3},0,\sqrt{3}), \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}=(-\sqrt{3},1,0)$，则 $D_1(-\sqrt{3},-1,\sqrt{3})$，

$\overrightarrow{BD_1}=(-\sqrt{3},-2,\sqrt{3})$，设平面 CC_1D_1D 的一法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，



则 $\begin{cases}\overrightarrow{DD_1}\cdot\vec{n}=-\sqrt{3}x+\sqrt{3}z=0\\ \overrightarrow{DC}\cdot\vec{n}=-\sqrt{3}x+y=0\end{cases}$，取 $x=1$，则 $\vec{n}=(1,\sqrt{3},1)$，……10 分

设直线 BD_1 与平面 CC_1D_1D 所成角为 α，则

$\cos\langle\overrightarrow{BD_1},\vec{n}\rangle=\dfrac{\overrightarrow{BD_1}\cdot\vec{n}}{|\overrightarrow{BD_1}||\vec{n}|}=\dfrac{-\sqrt{3}-2\sqrt{3}+\sqrt{3}}{\sqrt{10}\times\sqrt{5}}=-\dfrac{\sqrt{6}}{5}$ ， …………11 分

$\sin\alpha=\left|\cos\langle\overrightarrow{BD_1},\vec{n}\rangle\right|=\dfrac{\sqrt{6}}{5}$，

所以直线 BD_1 与平面 CC_1D_1D 所成角正弦值为 $\dfrac{\sqrt{6}}{5}$. …………12 分

21．（12 分）

解：（1）∵由题，$a-c=1$，又∵$\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{2}$，∴$a=2$，$c=1$，

∵$b^2=a^2-c^2=3$， …………3 分

∴椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$. …………4 分

（2）设两定点为 $(s,0)$，$(t,0)$，其中 $s<t$，

当直线 l 的方程为 $y=\sqrt{3}$ 时，易知两定点到直线 l 的距离之积为 3. …………5 分

① 当直线 l 不垂直于 x 轴时，直线 l： $y=kx+m$，

∵联立方程组 $\begin{cases}y=kx+m\\3x^2+4y^2=12\end{cases}$ 整理为 $(3+4k^2)x^2+8kmx+4m^2-12=0$ ，

其中 $\Delta=48(3+4k^2-m^2)=0$ ，所以 $3+4k^2=m^2$， …………6 分

∵两定点到直线 $y=kx+m$ 的距离分别为 $\dfrac{|ks+m|}{\sqrt{k^2+1}}$ ， $\dfrac{|kt+m|}{\sqrt{k^2+1}}$，

∴ $\dfrac{|ks+m|}{\sqrt{k^2+1}}\cdot\dfrac{|kt+m|}{\sqrt{k^2+1}}=3$，

即 $k^2st+km(s+t)+m^2=3(k^2+1)$，或 $k^2st+km(s+t)+m^2=-3k^2-3$，

∴ $k^2(st+1)+km(s+t)=0$ 或 $k^2(st+7)+km(s+t)+6=0$ 对任意 $k\in\mathbf{R}$ 恒成立， …………8 分

显然 $k^2(st+7)+km(s+t)+6=0$ 对任意 $k\in\mathbf{R}$ 不恒成立. …………9 分

若 $k^2(st+1)+km(s+t)=0$ 对任意 $k\in\mathbf{R}$ 恒成立，则 $\begin{cases}st+1=0\\s+t=0\end{cases}$，所以 $\begin{cases}s=-1\\t=1\end{cases}$，

$\therefore$ 两定点为 $(-1,0)$，$(1,0)$. ············10 分

②当直线 $l_1\perp x$ 轴时，$\because l$ 的方程为 $x=-2$ 或 $x=2$， ············11 分

也满足两定点为 $(-1,0)$，$(1,0)$ 到 l 的距离之积为 3，

综上所述，存在两定点为 $(-1,0)$，$(1,0)$. ············12 分

22. （12 分）

解：（1）

$$f'(x)=\frac{(s-1)x^{s-2}\left(e^x-1\right)-x^{s-1}e^x}{\left(e^x-1\right)^2}=\frac{x^{s-2}\left[(s-1)\left(e^x-1\right)-xe^x\right]}{\left(e^x-1\right)^2}$$

$$=\frac{x^{s-2}\left[(s-1-x)e^x-(s-1)\right]}{\left(e^x-1\right)^2}$$ ············1 分

令 $\varphi(x)=(s-1-x)e^x-(s-1)$，$1<s\le 2$，

$\varphi'(x)=(s-2-x)e^x$，当 $1<s\le 2$ 时，$\varphi'(x)=(s-2-x)e^x<0$

$\varphi(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递减， ············2 分

又 $\varphi(0)=s-1-(s-1)=0$ ， ············3 分

所以，当 $x>0$ 时，$\varphi(x)<0$，即 $f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减.

············4 分

（2）①由（1）得：$f'(x)=\dfrac{x^{s-2}\left[(s-1-x)e^x-(s-1)\right]}{\left(e^x-1\right)^2}$，

令 $\varphi(x)=(s-1-x)e^x-(s-1),(s>2)$，$\varphi'(x)=(s-2-x)e^x$

令 $\varphi'(x)=0$，可得：$x=s-2$，依题意：$s-2>0$

当$0<x<s-2$时，$\varphi'(x)>0$，当$x>s-2$时，$\varphi'(x)<0$，

所以$\varphi(x)$在$(0,s-2)$上单调递增，在$(s-2,+\infty)$上单调递减；…………5 分

又$\varphi(0)=0$，所以$\varphi(s-2)>0$，又因为$\varphi(s-1)=-(s-1)<0$

所以，存在唯一$x_0\in(s-2,s-1)$，$\varphi(x_0)$=0，…………6 分

当$0<x<x_0$时，$f'(x)>0$，当$x>x_0$时，$f'(x)<0$，

所以$f(x)$在$(0,x_0)$上单调递增，在$(x_0,+\infty)$上单调递减；

所以，$f(x)$存在唯一极大值点x_0，且$x_0\in(s-2,s-1)$.…………7 分

②结论：$\xi(s)$在$(2,+\infty)$上单调递增.

证明：由①知：当$s>2$时，$f(x)$存在唯一极大值点，

任意$s,t\in(2,+\infty)$,且$s<t$，依题意：$f(x)=\dfrac{x^{s-1}}{e^x-1}$的极大值点为$\xi(s)$，记为$x_1$；

$f(x)=\dfrac{x^{t-1}}{e^x-1}$的极大值点为$\xi(t)$，记为$x_2$；

则x_1为$\varphi_1(x)=(s-1-x)e^x-(s-1)$的零点，$x_2$为$\varphi_2(x)=(t-1-x)e^x-(t-1)$的

零点，则$\begin{cases}\varphi_1(x_1)=(s-1-x_1)e^{x_1}-(s-1)=0\\ \varphi_2(x_2)=(t-1-x_2)e^{x_2}-(t-1)=0\end{cases}$，…………9 分

由①知：$x_1\in(s-2,s-1),x_2\in(t-2,t-1)$

由$\varphi_1(x_1)=(s-1-x_1)e^{x_1}-(s-1)=0$得：$e^{x_1}=\dfrac{s-1}{s-1-x_1}$

$$\varphi_2(x_1)=(t-1-x_1)\frac{s-1}{s-1-x_1}-(t-1)=\frac{(t-1)(s-1)-x_1(s-1)-(s-1)(t-1)+(t-1)x_1}{s-1-x_1}$$

$=\dfrac{(t-1)x_1-x_1(s-1)}{s-1-x_1}=\dfrac{(t-s)x_1}{s-1-x_1}$，…………10 分

由于 $x_1 \in (s-2, s-1), s<t$，所以 $\varphi_2(x_1)=\dfrac{(t-s)x_1}{s-1-x_1}>0$ …………11 分

根据①的分析可知， $x_2 \in (x_1, +\infty)$，$\varphi_2(x_2)=0$，即 $x_1<x_2$，即 $\xi(s)<\xi(t)$

所以 $\xi(s)$ 在 $(2,+\infty)$ 上单调递增. …………12 分