中学生标准学术能力诊断性测试 2023 年 9 月测试

数学试卷

本试卷共 150 分，考试时间 120 分钟。

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．设集合 $A=\left\{x\left|\dfrac{x-1}{x+2}<\dfrac{1}{2},x\in\mathbf{R}\right.\right\}$, $B=\{x\in\mathbf{N}|1<x<5\}$，则 $A\cap B=$

A．$\{2\}$　　B．$\{2,3\}$　　C．$\{3,4\}$　　D．$\{2,3,4\}$

2．欧拉公式 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ 把自然对数的底数 e、虚数单位 i、三角函数联系在一起，充分体现了数学的和谐美．已知实数指数幂的运算性质同样也适用于复数指数幂，则 $i^{i}=$

A．$e^{\frac{\pi}{2}}$　　B．$e^{-\frac{\pi}{2}}$　　C．e^{π}　　D．$e^{-\pi}$

3．已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $S_{12}=S_4+16S_8$，则公比 q=

A．3　　B．±2　　C．2　　D．±3

4．已知向量 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=6$，线段 BC 的中点为 M，且 $|\overrightarrow{AM}|=6$，则 $|\overrightarrow{BC}|=$

A．$2\sqrt{30}$　　B．$3\sqrt{30}$　　C．$2\sqrt{26}$　　D．$3\sqrt{26}$

5．已知函数 $f(x)=\sin\left(\omega x+\dfrac{\pi}{3}\right)(\omega>0)$ 的周期为 T，且满足 $T>2\pi$，若函数 $f(x)$ 在区间 $\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{4}\right)$ 不单调，则 ω 的取值范围是

A．$\left(\dfrac{3}{4},1\right)$　　B．$\left(\dfrac{1}{2},1\right)$　　C．$\left(\dfrac{2}{3},1\right)$　　D．$\left(\dfrac{4}{5},1\right)$

6．三棱锥 $A-BCD$ 中，$AB=3, BC=BD=4\sqrt{2}, \angle ABC=\angle ABD=\dfrac{\pi}{4}, \angle DBC=\dfrac{\pi}{3}$，则直线 AD 与平面 ABC 所成角的正弦值是

A．$\dfrac{4\sqrt{17}}{17}$　　B．$\dfrac{4\sqrt{29}}{29}$　　C．$\dfrac{3\sqrt{17}}{17}$　　D．$\dfrac{3\sqrt{29}}{29}$

7．已知三角形 ABC 中，$BC=3$，角 A 的平分线交 BC 于点 D，若 $\dfrac{BD}{DC}=\dfrac{1}{2}$，则三角形 ABC 面积

的最大值为

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

8. 比较 $a=\frac{11}{10}-\frac{10}{11}, b=\ln 1.2, c=\frac{1}{5e^{0.1}}$ 的大小

A. $a>c>b$　　B. $b>c>a$　　C. $b>a>c$　　D. $a>b>c$

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求．全部选对得 5 分，部分选对但不全得 3 分，有错选的得 0 分．

9. 已知实数 a,b,c 满足 $a>b>c$，且 $abc=1$，则下列说法正确的是

A. $(a+c)^2>\frac{1}{b}$　　B. $\frac{1}{a-c}<\frac{1}{b-c}$

C. $a^2>b^2$　　D. $(a^2b-1)(ab^2-1)>0$

10. 已知 10 个样本数据，若去掉其中最大和最小的数据，设剩下的 8 个样本数据的方差为 s_1^2，平均数 $\overline{x_1}$；最大和最小两个数据的方差为 s_2^2，平均数 $\overline{x_2}$；原样本数据的方差为 S^2，平均数 $\overline{x}$，若 $\overline{x_1}=\overline{x_2}$，则

A. 剩下的 8 个样本数据与原样本数据的中位数不变

B. $\overline{x}=\overline{x_1}$

C. 剩下 8 个数据的下四分位数大于与原样本数据的下四分位数

D. $S^2=\frac{4}{5}s_1^2+\frac{1}{5}s_2^2$

11. 已知函数 $f(x)=\cos 2x+2|\sin x|$，则

A. 函数 $f(x)$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增

B. 直线 $x=\frac{\pi}{2}$ 是函数 $f(x)$ 图象的一条对称轴

C. 函数 $f(x)$ 的值域为 $\left[1,\frac{3}{2}\right]$

D. 方程 $f(x)=a\,(x\in(0,2\pi))$ 最多有 8 个根，且这些根之和为 8π

12. 已知椭圆 $C:\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 的中心为 O，A,B 是 C 上的两个不同的点且满足 $OA\perp OB$，则

A. 点 O 在直线 AB 上投影的轨迹为圆

B．$\angle AOB$的平分线交AB于D点，OD的最小值为$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

C．ΔAOB面积的最小值为$\dfrac{2}{3}$

D．ΔAOB中，AB边上中线长的最小值为$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分．

13．已知$\tan\alpha=2$，则$\sin 4\alpha=$____．

14．若$\left(x^2-x-3\right)^5=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{10}x^{10}$，则$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=$____．

15．已知四棱锥的各个顶点都在同一个球面上．若该球的体积为36π，则该四棱锥体积的最大值是____．

16．已知函数$f(x)=e^x+m\sin x-\dfrac{1}{2}x^2-(m+1)x+1$，在$x=0$处取到极小值，则实数$m=$____．

四、解答题：本题共6小题，共70分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17．（10分）已知$\{a_n\}$是各项均为正数的等比数列，设$c_n=\log_3 a_n$，若数列$\{c_n\}$的前n项和$S_n=\dfrac{n^2+n}{2}$．

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）记$d_n=a_n\cdot\left(2n^2+6n+5\right)$，求数列$\{d_n\}$的前$n$项和$T_n$．

18．（12分）记ΔABC的内角A,B,C的对边分别为a,b,c，已知$c=2a\cos A\cos B-b\cos 2A$ $(A\le B)$．

（1）求A；

（2）若D是BC上的一点，且$BD:DC=1:2,AD=2$，求a的最小值．

19．（12分）某单位组织知识竞赛，有甲、乙两类问题．现有A，B，C三位员工参加比赛，比赛规则为：先从甲类问题中随机抽取一个问题回答，若回答错误则该员工比赛结束；若回答正确再从乙类问题中随机抽取一个问题回答，无论回答正确与否，该员工比赛结束．每人两次回答问题的过程相互独立．三人回答问题也相互独立．甲类问题中每个问题回答正确得20分，否则得0分；乙类问题中每个问题回答正确得80分，否则得0分．已知A员工能正确回答甲类问题的概率为

0.5，能正确回答乙类问题的概率为0.6；B员工能正确回答甲类问题的概率为0.6，能正确回答

乙类问题的概率为 0.5；C 员工能正确回答甲类问题的概率为 0.4，能正确回答乙类问题的概率为 0.75.

（1）求 3 人得分之和为 20 分的概率；

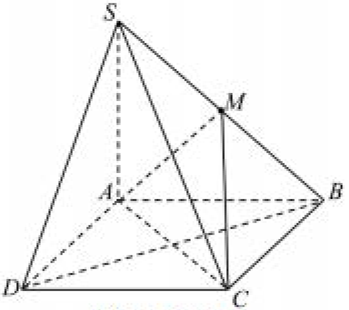
（2）设随机变量 X 为 3 人中得分为 100 的人数，求随机变量 X 的数学期望.

20. （12 分）已知四棱锥 $S-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是矩形，

$SA\perp BD, SA=AD=\dfrac{\sqrt{2}}{2}CD$，$M$ 是 SB 的中点.

（1）证明：$MC\perp BD$；

（2）若 $SA\perp AD, SA=2$，点 P 是 SC 上的动点，直线 AP 与平面 AMC 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{10}}{10}$，求 $\dfrac{SP}{SC}$.



（第 20 题图）

21. （12 分）已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(b>0)$ 的左右焦点分别为 F_1,F_2，C 是椭圆的中心，点 M 为其上的一点满足 $|MF_1|\cdot|MF_2|=5,|MC|=2$.

（1）求椭圆 C 的方程；

（2）设定点 $T(t,0)$，过点 T 的直线 l 交椭圆 C 于 P,Q 两点，若在 C 上存在一点 A，使得直线 AP 的斜率与直线 AQ 的斜率之和为定值，求 t 的范围.

22. （12 分）已知函数 $f(x)=e^{ax}-e\dfrac{\ln x}{x}-ea(x>0)$.

（1）当 $a=1$ 时，求函数 $g(x)=e^{ax-1}-\dfrac{f(x)}{e}+x-a$ 的单调区间；

（2）证明：当 $a<-e^{-2}$ 时，不等式 $f(x)>0$ 恒成立.

中学生标准学术能力诊断性测试 2023 年 9 月测试

数学参考答案

一、单项选择题：本题共 **8** 小题，每小题 **5** 分，共 **40** 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1	2	3	4	5	6	7	8
B	B	B	A	C	A	C	D

二、多项选择题：本题共 **4** 小题，每小题 **5** 分，共 **20** 分．在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 **5** 分，部分选对但不全的得 **3** 分，有错选的得 **0** 分．

9	10	11	12
ABD	ABD	BCD	ABC

三、填空题：本题共 **4** 小题，每小题 **5** 分，共 **20** 分．

13．$-\dfrac{24}{25}$　　　　14．-46

15．$\dfrac{64}{3}$　　　　16．1

四、解答题：本题共 **6** 小题，共 **70** 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17．（10 分）

（1）$\because S_n=\dfrac{n^2+n}{2},\therefore S_{n-1}=\dfrac{(n-1)^2+n-1}{2}$，

$\therefore S_n-S_{n-1}=n=c_n\left(n>1,n\in\mathbf{N}\right)$ ……………………2 分

又 $c_1=S_1=1,\therefore c_n=n\left(n\in\mathbf{N}^+\right),\therefore a_n=3^n$ ……………………3 分

（2）$\because d_n=3^n\times\left(2n^2+6n+5\right)=\left[(n+1)^2+1\right]\times3^{n+1}-\left(n^2+1\right)\times3^n$ ……………………7 分

$\therefore T_n=\left(2^2+1\right)\times3^2-\left(1^2+1\right)\times3+\left(3^2+1\right)\times3^3-\left(2^2+1\right)\times3^2+\cdots+$

$\left(n^2+1\right)\times3^n-\left[(n-1)^2+1\right]\times3^{n-1}+\left[(n+1)^2+1\right]\times3^{n+1}-\left(n^2+1\right)\times3^n$

$=-\left(1^2+1\right)\times3+\left[(n+1)^2+1\right]\times3^{n+1}$

$=\left(n^2+2n+2\right)\times3^{n+1}-6$ ……………………10 分

18．（12 分）

（1）$\because c=2a\cos A\cos B-b\cos2A\left(A\le B\right)$，

$\therefore \sin C = 2\sin A\cos A\cos B - \sin B\cos 2A$ ······2 分

$\therefore \sin C = \sin 2A\cos B - \sin B\cos 2A = \sin(2A-B) > 0$ ······4 分

又 $0 < 2A - B < \pi$，则 $C = 2A - B$ 或 $C + 2A - B = \pi$，

若 $C = 2A - B$，则 $A = \dfrac{\pi}{3}$；

若 $C + 2A - B = \pi$，则 $A = 2B$，又 $A \le B$，不符合题意，舍去，

综上所述 $A = \dfrac{\pi}{3}$ ······6 分

（2）$\because 2\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{DC}, \therefore \overrightarrow{AD} = \dfrac{2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{3}, \therefore \left(\overrightarrow{AD}\right)^2 = \left(\dfrac{2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{3}\right)^2$ ······8 分

$\therefore b^2 + 4c^2 + 2bc = 36$ ①，又 $a^2 = b^2 + c^2 - bc$ ②，

①÷②得：$\dfrac{36}{a^2} = \dfrac{4c^2 + b^2 + 2bc}{b^2 + c^2 - bc} = \dfrac{4\left(\dfrac{c}{b}\right)^2 + 2\left(\dfrac{c}{b}\right) + 1}{\left(\dfrac{c}{b}\right)^2 - \left(\dfrac{c}{b}\right) + 1}$ ······9 分

令 $\dfrac{c}{b} = x$，又 $A \le B, \therefore a \le b, \therefore a^2 \le b^2, \therefore b^2 + c^2 - bc \le b^2$，

$\therefore c \le b, \therefore 0 < \dfrac{c}{b} = x \le 1$，

令 $f(x) = \dfrac{4x^2 + 2x + 1}{x^2 - x + 1}(0 < x \le 1), \because f(x) = 4 + \dfrac{6x - 3}{x^2 - x + 1}$ ······10 分

令 $6x - 3 = t, x = \dfrac{t+3}{6}$，

$\therefore f(t) = 4 + \dfrac{36t}{t^2 + 27}(-3 < t \le 3), \therefore f(t) = 4 + \dfrac{36}{t + \dfrac{27}{t}}(-3 < t \le 3)$，

又 $t + \dfrac{27}{t} \ge 12$ 或 $t + \dfrac{27}{t} < -12, \therefore 1 < f(t) \le 7, \therefore \dfrac{36}{a^2} \le 7, \therefore a \ge \dfrac{6\sqrt{7}}{7}$，

所以当三角形 ABC 为等边三角形时 a 最小，最小值为 $\dfrac{6\sqrt{7}}{7}$ ······12 分

19.（12 分）

（1）设事件 A_1 为 A 员工答对甲类问题；设事件 A_2 为 A 员工答对乙类问题；

设事件 B_1 为 B 员工答对甲类问题；设事件 B_2 为 B 员工答对乙类问题；

设事件 C_1 为 C 员工答对甲类问题；设事件 C_2 为 C 员工答对乙类问题；

三人得分之和为 20 分的情况有：

①A 员工答对甲类题，答错乙类题；B 与 C 员工均答错甲类题，

则 $P\left(A_1\cdot\overline{A_2}\cdot\overline{B_1}\cdot\overline{C_1}\right)=P\left(A_1\right)P\left(\overline{A_2}\right)P\left(\overline{B_1}\right)P\left(\overline{C_1}\right)=0.5\times0.4\times0.4\times0.6=0.048$

…………2 分

②B 员工答对甲类题，答错乙类题；A 与 C 员工均答错甲类题，

$P\left(B_1\cdot\overline{B_2}\cdot\overline{A_1}\cdot\overline{C_1}\right)=P\left(B_1\right)P\left(\overline{B_2}\right)P\left(\overline{A_1}\right)P\left(\overline{C_1}\right)=0.6\times0.5\times0.5\times0.6=0.09$

…………4 分

③C 员工答对甲类题，答错乙类题；A 与 B 员工均答错甲类题，

$P\left(C_1\cdot\overline{C_2}\cdot\overline{A_1}\cdot\overline{B_1}\right)=P\left(C_1\right)P\left(\overline{C_2}\right)P\left(\overline{A_1}\right)P\left(\overline{B_1}\right)=0.4\times0.25\times0.5\times0.4=0.02$，

所以三人得分之和为 20 分的概率为 0.048+0.09+0.02=0.158…………6 分

（2）$\because$ A 员工得 100 分的概率为 $P\left(A_1\cdot A_2\right)=P\left(A_1\right)\cdot P\left(A_2\right)=0.3$，

B 员工得 100 分的概率为 $P\left(B_1\cdot B_2\right)=P\left(B_1\right)\cdot P\left(B_2\right)=0.3$，

C 员工得 100 分的概率为 $P\left(C_1\cdot C_2\right)=P\left(C_1\right)\cdot P\left(C_2\right)=0.3$，

…………9 分

$\therefore X\sim B\left(3,0.3\right)$ …………11 分

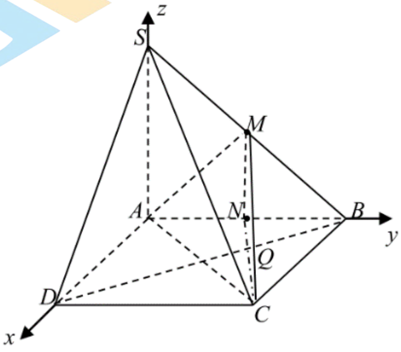
$\therefore E\left(X\right)=3\times0.3=0.9$ …………12 分

20.（12 分）

（1）取 AB 的中点 N，连接 MN，NC，则线段 MN 为三角形 SAB 的中位线，

$\therefore MN\,//\,SA$，又 $SA\perp BD,\therefore BD\perp MN$ …………2 分

设直线 CN 与直线 BD 交于 Q 点，



则 $\Delta BNQ\sim\Delta CDQ,\therefore\dfrac{NQ}{NC}=\dfrac{BQ}{BD}=\dfrac{1}{3}$，

设 $AD=a,\therefore CD=\sqrt{2}a,\therefore NC=\dfrac{\sqrt{6}}{2}a,\therefore NQ=\dfrac{\sqrt{6}}{6}a$，

同理 $BD=\sqrt{3}a,BQ=\dfrac{\sqrt{3}}{3}a$，

又 $NQ^2+BQ^2=\dfrac{a^2}{6}+\dfrac{a^2}{3}=\dfrac{a^2}{2}=BN^2$ …………5 分

$\therefore BD\perp CN,\therefore BD\perp$ 面 $MNC,\therefore MC\perp BD$ …………6 分

（2）分别以直线 AD，AB，AS 为 x 轴，y 轴，z 轴建立直角坐标系，

则 $A(0,0,0),S(0,0,2),C(2,2\sqrt{2},0),B(0,2\sqrt{2},0),M(0,\sqrt{2},1)$，

设 $\overrightarrow{SP}=\lambda\overrightarrow{SC}$，

$\therefore P(2\lambda,2\sqrt{2}\lambda,2(1-\lambda)),\therefore \overrightarrow{AP}=(2\lambda,2\sqrt{2}\lambda,2(1-\lambda))$ ……………………………8 分

又 $\overrightarrow{AM}=(0,\sqrt{2},1),\overrightarrow{AC}=(2,2\sqrt{2},0)$，

设平面 AMC 的法向量 $\vec{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AM}=\sqrt{2}y+z=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=2x+2\sqrt{2}y=0\end{cases},\therefore \vec{n}=(-\sqrt{2},1,-\sqrt{2})$ …………………………………… 10 分

设直线 AP 与平面 AMC 所成的角为 θ，

则 $\sin\theta=\left|\cos\left\langle\overrightarrow{AP},\vec{n}\right\rangle\right|=\dfrac{\left|2\sqrt{2}(1-\lambda)\right|}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{16\lambda^2-8\lambda+4}}=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$，

$\therefore \lambda=\dfrac{1}{2},\therefore \dfrac{SP}{SC}=\dfrac{1}{2}$ ……………………………………………………………………………… 12 分

21.（12 分）

（1）设 $|MF_1|=r_1,|MF_2|=r_2$，在 ΔMF_1F_2 中，设 $\angle F_1MF_2=\theta$，

$|F_1F_2|^2=r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\cos\theta=4c^2$，

$\therefore 2r_1r_2\cos\theta=r_1^2+r_2^2-4c^2$，又 $\overrightarrow{MC}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{MF_1}+\overrightarrow{MF_2})$，

$\therefore \overrightarrow{MC}^2=\dfrac{1}{4}(\overrightarrow{MF_1}^2+\overrightarrow{MF_2}^2+2\overrightarrow{MF_1}\cdot\overrightarrow{MF_2})=\dfrac{1}{4}(r_1^2+r_2^2+2r_1r_2\cos\theta)=\dfrac{r_1^2}{2}+\dfrac{r_2^2}{2}-c^2$，

$\therefore MC^2=\dfrac{r_1^2}{2}+\dfrac{r_2^2}{2}-c^2=\dfrac{(r_1+r_2)^2-2r_1r_2}{2}-c^2=2a^2-c^2-5=4$ ………………………3 分

$\therefore 2a^2-c^2=9,\because a^2=6,\therefore c^2=3,\therefore b^2=3$，

所以椭圆 C 的方程为：$\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{3}=1$ ………………………………………………………………4 分

（2）设 $A(x_0,y_0),P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2)$，直线 l 的方程为 $x=\lambda y+t$，

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{3}=1\\ x=\lambda y+t\end{cases}\Rightarrow\left(\lambda^2+2\right)y^2+2t\lambda y+t^2-6=0,$$

$\therefore y_1+y_2=-\dfrac{2t\lambda}{\lambda^2+2},y_1y_2=\dfrac{t^2-6}{\lambda^2+2},x_1=\lambda y_1+t,x_2=\lambda y_2+t$，

$x_1+x_2=\dfrac{4t}{\lambda^2+2},x_1x_2=\dfrac{2t^2-6\lambda^2}{\lambda^2+2}$ ……………………………………………………………7 分

设 $\dfrac{y_0-y_1}{x_0-x_1}+\dfrac{y_0-y_2}{x_0-x_2}=\dfrac{\left(y_0-y_1\right)\cdot\left(x_0-x_2\right)+\left(y_0-y_2\right)\cdot\left(x_0-x_1\right)}{\left(x_0-x_1\right)\cdot\left(x_0-x_2\right)}$

$$=\frac{2x_0y_0-y_0\left(x_1+x_2\right)+2\lambda y_1y_2+\left(t-x_0\right)\left(y_1+y_2\right)}{x_0^2-\left(x_1+x_2\right)x_0+x_1x_2}$$

$$=\frac{2x_0y_0\lambda^2+\left(2tx_0-12\right)\lambda+4y_0\left(x_0-t\right)}{\left(x_0^2-6\right)\lambda^2+2\left(x_0-t\right)^2}=p$$

若 p 为常数，则 $2tx_0-12=0$ ……………………………………………………………………10 分

即 $6=tx_0$，而此时 $\dfrac{2x_0y_0}{\left(x_0^2-6\right)}=\dfrac{4y_0\left(x_0-t\right)}{2\left(x_0-t\right)^2}=\dfrac{2y_0}{x_0-t}$，

又 $-\sqrt{6}<x_0<\sqrt{6},\therefore-\sqrt{6}<\dfrac{6}{t}<\sqrt{6}$，即 $t>\sqrt{6}$ 或 $t<-\sqrt{6}$，

综上所述，$t>\sqrt{6}$ 或 $t<-\sqrt{6}$，存在点 $A\left(\dfrac{6}{t},\pm\sqrt{3-\dfrac{18}{t^2}}\right)$，使得直线 AP 的斜率与直线 AQ

的斜率之和为定值 $\dfrac{2y_0}{x_0-t}$ ……………………………………………………………………12 分

22.（12 分）

（1）$g\left(x\right)=\dfrac{\ln x}{x}+x,g'\left(x\right)=\dfrac{\left(1-\ln x\right)}{x^2}+1=\dfrac{1-\ln x+x^2}{x^2}$ ………………………………1 分

令 $h\left(x\right)=1-\ln x+x^2,h'\left(x\right)=-\dfrac{1}{x}+2x>0$，即 $x>\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

所以函数 $h\left(x\right)$ 在区间 $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$ 单调递增，在区间 $\left(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 单调递减………………3 分

又 $h_{\min}(x)=h\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)>0, \therefore h(x)>0, \therefore g'(x)>0$，

所以函数 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增……………………………………………………5 分

（2）不等式 $e^{ax}-e\frac{\ln x}{x}-ea>0$ 等价于 $xe^{ax-1}-\ln x-ax>0$

令 $g(x)=xe^{ax-1}-\ln x-ax>0$，$g'(x)=\frac{1}{x}(1+ax)(xe^{ax-1}-1)$ ……………………………7 分

设 $h(x)=xe^{ax-1}-1, \therefore h'(x)=(ax+1)e^{ax-1}$，

当 $0<x<-\frac{1}{a}, h'(x)>0$，

所以函数 $h(x)$ 在 $\left(0,-\frac{1}{a}\right)$ 上单调递增，在 $\left(-\frac{1}{a},+\infty\right)$ 上单调递减，

$\therefore h_{\max}(x)=h\left(-\frac{1}{a}\right)=-\frac{1}{a}\left(e^{-2}+a\right)$，

$\because a<-e^{-2}, \therefore h_{\max}=-\frac{1}{a}\left(e^{-2}+a\right)<0$，

所以函数 $g(x)$ 在 $\left(-\frac{1}{a},+\infty\right)$ 单调递增，在 $\left(0,-\frac{1}{a}\right)$ 单调递减……………………10 分

$\therefore g_{\min}(x)=g\left(-\frac{1}{a}\right)=-\frac{1}{a}e^{-2}-\ln\frac{-1}{e^2a}-1$，

令 $\frac{-1}{e^2a}=t$，则 $g_{\min}(t)=t-\ln t-1=m(t)(t\in(0,1)), m'(t)=1-\frac{1}{t}$，

$\therefore m(t)$ 在 $(0,1)$ 单调递减，在 $(1,+\infty)$ 单调递增，

$\therefore m_{\min}(x)=m(1)=0, m(t)>0$，

$\therefore g_{\min}(x)>0, \therefore g(x)>0$ ……………………………………………………… 12 分

即 $a<-e^{-2}$ 时，不等式 $f(x)>0$ 恒成立.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 50W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数千场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。

推荐大家关注北京高考在线网站官方微信公众号：京考一点通，我们会持续为大家整理分享最新的高中升学资讯、政策解读、热门试题答案、招生通知等内容！