高三理科数学

考生注意：

1. 本试卷分选择题和非选择题两部分。满分 150 分，考试时间 120 分钟。
2. 答题前，考生务必用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔将密封线内项目填写清楚。
3. 考生作答时，请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；非选择题请用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答，**超出答题区域书写的答案无效，在试题卷、草稿纸上作答无效。**
4. 本试卷主要命题范围：高考范围。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知全集 $U=\{x\in\mathbf{Z}\mid x^2-5x-6\leqslant 0\}$，集合 $A=\{x\in\mathbf{Z}\mid x(3-x)\geqslant 0\}$，$B=\{1,2,4\}$，则集合 $\{-1,5,6\}$ 等于

A. $(\complement_U A)\cap B$　　B. $\complement_U(A\cup B)$

C. $A\cap(\complement_U B)$　　D. $\complement_U(A\cap B)$

2. 已知平面向量 $\boldsymbol{a}=(1,3)$，$\boldsymbol{b}=(-1,2)$，若 $\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 垂直，则实数 $t=$

A. -2　　B. -1　　C. 1　　D. 2

3. 在一些比赛中，对评委打分的处理方法一般是去掉一个最高分，去掉一个最低分，然后计算余下评分的均值作为参赛者的得分. 在一次有 9 位评委参加的赛事中，评委对一名参赛者所打的 9 个分数，去掉一个最高分，去掉一个最低分后，一定不变的数字特征为

A. 平均值　　B. 中位数　　C. 众数　　D. 方差

4. 设 z_1,z_2 为复数，则下列命题中一定成立的是

A. 如果 $z_1-z_2>0$，那么 $z_1>z_2$　　B. 如果 $|z_1|=|z_2|$，那么 $z_1=\pm z_2$

C. 如果 $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|>1$，那么 $|z_1|>|z_2|$　　D. 如果 $z_1^2+z_2^2=0$，那么 $z_1=z_2=0$

5. 已知命题 p：$\forall x\in\mathbf{R}$，$\sin x>-1$；命题 q：$\exists x,y\in\mathbf{R}$，$\sin(x+y)=\sin x+\sin y$，则下列命题是真命题的是

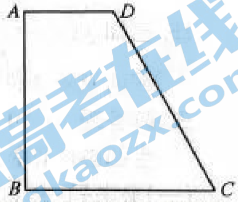
A. $p\wedge q$　　B. $p\wedge(\neg q)$

C. $p\vee(\neg q)$　　D. $(\neg p)\wedge q$

6. 昆虫信息素是昆虫用来表示聚集、觅食、交配、警戒等信息的化学物质，是昆虫之间起化学通讯作用的化合物，是昆虫交流的化学分子语言. 包括利它素、利己素、协同素、集合信息素、追踪信息素、告警信息素、疏散信息素、性信息素等. 人工合成的昆虫信息素在生产中有较多的应用，尤其在农业生产中的病虫害的预报和防治中较多使用. 研究发现，某昆虫释放信息素 t 秒后，在距释放处 x 米的地方测得的信息素浓度 y 满足 $\ln y=-\dfrac{1}{2}\ln t-\dfrac{k}{t}x^2+a$，其中 k,a 为非零常数. 已知释放信息素 1 秒后，在距释放处 2 米的地方测得信息素浓度为 m；若释放信息素 4 秒后，距释放处 b 米的位置，信息素浓度为 $\dfrac{m}{2}$，则 $b=$

A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 6

7. 巴普士(约公元 3~4 世纪)，古希腊亚历山大学派著名几何学家. 生前有大量的著作，但大部分遗失在历史长河中，仅有《数学汇编》保存下来.《数学汇编》一共 8 卷，在《数学汇编》第 3 卷中记载着这样一个定理："如果在同一平面内的一个闭合图形的内部与一条直线不相交，那么该闭合图形围绕这条直线旋转一周所得到的旋转体的体积等于该闭合图形的面积与该闭合图形的重心旋转所得周长的积"，即$V=Sl$(V 表示平面闭合图形绕旋转轴旋转所得几何体的体积，S 表示闭合图形的面积，l 表示重心绕旋转轴旋转一周的周长). 已知在梯形 $ABCD$ 中，$AD/\!/BC$，$AB\perp BC$，$AB=BC=2AD=4$，利用上述定理可求得梯形 $ABCD$ 的重心 G 到 点 B 的距离为



A. $\dfrac{\sqrt{113}}{9}$　　B. $\dfrac{20}{9}$

C. $\dfrac{2\sqrt{113}}{9}$　　D. $\dfrac{19}{9}$

8. 已知 $F(2,0)$为椭圆 C:$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的右焦点，点 $A(2,3)$为 C 内一点，若在 C 上存在一点 P，使得$|PA|+|PF|=10$，则 a 的取值范围是

A. $(4,7]$　　B. $(5,7]$　　C. $\left(5,\dfrac{15}{2}\right]$　　D. $\left(4,\dfrac{15}{2}\right]$

9. 在△ABC 中，角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，$b=3$，若 $b^2=2a^2+c^2$，则△ABC 面积的最大值为

A. 2　　B. $\dfrac{3}{4}$　　C. 1　　D. $\dfrac{3}{2}$

10. 已知函数 $f(x)=\dfrac{6\sin x\cos x}{2\cos^2 x+1}$，则

A. $f(x)$的图象关于直线 $x=\dfrac{\pi}{4}$ 对称　　B. $\dfrac{\pi}{2}$为 $f(x)$的一个周期

C. $f(x)$的值域为$[-\sqrt{3},\sqrt{3}]$　　D. $f(x)$在$\left[\dfrac{\pi}{3},\dfrac{2\pi}{3}\right]$上单调递增

11. 已知双曲线 Γ:$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右焦点分别为 F_1,F_2，P 是圆 $x^2+y^2=c^2(c=\sqrt{a^2+b^2})$与 Γ 的一个交点，若△PF_1F_2 的内切圆的半径为 a，则 Γ 的离心率为

A. $\sqrt{3}+1$　　B. $\sqrt{2}+1$　　C. 2　　D. $\dfrac{3}{2}$

12. 已知 $a=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\log_3\frac{9}{7}}$，$b=0.7e^{0.1}$，$c=\cos\dfrac{2}{3}$，则

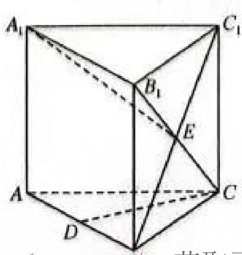
A. $a>b>c$　　B. $c>a>b$　　C. $c>b>a$　　D. $b>a>c$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知函数 $f(x)=\log_a x+x^2-1(a>0$，且 $a\neq 1)$，曲线 $y=f(x)$在 $x=1$ 处的切线与直线 $x+3y-2=0$ 垂直，则 $a=$________.

14. $(1+x)\left(x-\dfrac{2}{\sqrt[3]{x}}\right)^8$ 的展开式中的常数项为________.(用数字作答)

15. 在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，D 为棱 AB 的中点，BC_1 与 B_1C 交于点 E，若 $AB=AA_1$，则 CD 与 A_1E 所成角的余弦值为________.



16. 已知 $f(x)=\left|x-\frac{1}{x}\right|-\left|x+\frac{1}{x}\right|+2$，则关于 x 的方程 $f^2(x)+bf(x)+c=0$ 有 6 个互不相等的实数解的充要条件为 ________.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

(一)必考题：共 60 分。

17.（本小题满分 12 分）

在数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1$，当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=\begin{cases}3a_{\frac{n}{2}}, n\text{ 为偶数},\\ a_{n-2}+2, n\text{ 为奇数}.\end{cases}$

(1)求证：$\{a_{2^n}\}$ 为等比数列；

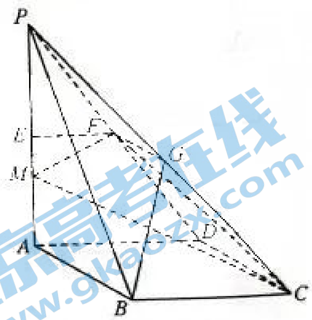
(2)若 $b_n=a_{2n-1}a_{2^n}$，求 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n.

18.（本小题满分 12 分）

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是边长为 4 的正方形，E 为 PA 的中点，过 E 与底面 $ABCD$ 平行的平面 α 与棱 PC，PD 分别交于点 G，F. M 在线段 AE 上，且 $AM=2ME$.

(1)求证：$BG//$平面 CFM；

(2)若 $PA\perp$平面 $ABCD$，且 $PA=6$，求平面 CFM 与平面 PCD 所成锐二面角的余弦值.



19.（本小题满分 12 分）

现在世界正处于百年未见之大变局，我国面临着新的考验，为增强学生的爱国意识和凝聚力，某学校高二年级组织举办了“中国国情和当今世界局势”的知识对抗竞赛，主要是加深对新中国成立以来我国在经济建设、科技创新、精神文明建设等方面取得的成就和最新世界经济、政治时事的了解. 组织者按班级将参赛人员随机分为若干组，每组均为两名选手，每组对抗赛开始时，组织者随机从准备好的题目中抽取 2 道试题供两位选手抢答，每位选手抢到每道试题的机会相等. 比赛得分规则为：选手抢到试题且回答正确得 10 分，对方选手得 0 分；选手抢到试题但回答错误或没有回答得 0 分，对方选手得 5 分；2 道题目抢答完毕后得分多者获胜. 已知甲、乙两名选手被分在同一组进行对抗赛，每道试题甲回答正确的概率为 $\frac{2}{3}$，乙回答正确的概率为 $\frac{4}{5}$，两名选手回答每道试题是否正确相互独立. 2 道试题抢答后的各自得分作为两位选手的个人总得分.

(1)求乙总得分为 10 分的概率；

(2)记 X 为甲的总得分，求 X 的分布列和数学期望.

20.(本小题满分 12 分)

在平面直角坐标系 xOy 中,椭圆 $C:\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的上焦点为 F,且 C 上的点到点 F 的距离的最大值与最小值的差为 $2\sqrt{3}$,过点 F 且垂直于 y 轴的直线被 C 截得的弦长为 1.

(1)求 C 的方程;

(2)已知直线 $l:y=kx+m(m\neq 0)$ 与 C 交于 M,N 两点,与 y 轴交于点 P,若点 P 是线段 MN 靠近点 N 的四等分点,求实数 m 的取值范围.

21.(本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x)=x\ln x-\frac{a}{2}x^2-x+a(a\in\mathbf{R})$,$f'(x)$为 $f(x)$的导函数.

(1)当 $a=\frac{1}{2}$ 时,若 $g(x)=f'(x)$在$[t,t+1](t>0)$上的最大值为 $h(t)$,求 $h(t)$;

(2)已知 x_1,x_2 是函数 $f(x)$的两个极值点,且 $x_1<x_2$,若不等式 $e^{1+m}<x_1x_2^m$ 恒成立,求正数 m 的取值范围.

(二)选考题:共 10 分。请考生在第 22、23 两题中任选一题作答。如果多做,则按所做的第一题计分。

22.(本小题满分 10 分)选修 4-4:坐标系与参数方程

在直角坐标系 xOy 中,以 O 为极点,以 x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系,曲线 C_1 的极坐标方程为 $\rho^2=2\rho\cos\theta+2$,曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3}{2}$.

(1)求曲线 C_1 的直角坐标方程和曲线 C_2 的一个参数方程;

(2)记 C_2 与 x 轴交于点 P,曲线 C_1 和曲线 C_2 的交点为 A,B,求$\frac{1}{|PA|+|PB|}$的值.

23.(本小题满分 10 分)选修 4-5:不等式选讲

已知函数 $f(x)=|x-1|+|x|$.

(1)求不等式 $f(x)<8$ 的解集;

(2)若 $y=f(x)-|x|-|x-2|$ 的最大值为 m,正数 a,b 满足 $a+2b=m$,求$\frac{1}{2a+b}+\frac{4}{a+5b}$的最小值.

高三理科数学参考答案、提示及评分细则

1. B　由题意知 $U=\{x\in\mathbf{Z}|-1\leqslant x\leqslant 6\}=\{-1,0,1,2,3,4,5,6\}$，$A=\{x\in\mathbf{Z}|0\leqslant x\leqslant 3\}=\{0,1,2,3\}$，所以 $A\cup B=\{0,1,2,3,4\}$，$\{-1,5,6\}=\complement_U(A\cup B)$. 故选 B.

2. A　由题意得 $(\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}=0$，即 $\boldsymbol{a}^2+t\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，故 $10+5t=0$，解得 $t=-2$. 故选 A.

3. B　去掉最高分和最低分后，中位数一定不变，其余数字特征不一定不变. 故选 B.

4. C　对于 A，取 $z_1=3+\mathrm{i}$，$z_2=1+\mathrm{i}$ 时，$z_1-z_2=2>0$，但虚数不能比较大小，故 A 错误；对于 B，取 $z_1=1+\mathrm{i}$，$z_2=1-\mathrm{i}$，显然 $|z_1|=|z_2|$，但 $z_1\neq\pm z_2$，故 B 错误；对于 C，因为 $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}>1$，所以 $|z_1|>|z_2|$，故 C 正确；对于 D，取 $z_1=1$，$z_2=\mathrm{i}$，满足 $z_1^2+z_2^2=0$，但是 $z_1\neq z_2\neq 0$，故 D 错误. 故选 C.

5. D　因为 $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-1>-1$ 不成立，所以 p 为假命题；因为当 $x=0$，$y\in\mathbf{R}$ 时，$\sin(0+y)=\sin 0+\sin y$ 成立，故 q 为真命题. 所以 $p\wedge q$，$p\wedge(\neg q)$，$p\vee(\neg q)$ 为假命题，$(\neg p)\wedge q$ 为真命题. 故选 D.

6. B　由题意，$\ln m=-4k+a$，$\ln\frac{m}{2}=-\frac{1}{2}\ln 4-\frac{k}{4}b^2+a$，所以 $\ln m-\ln\frac{m}{2}=-4k+a-\left(-\frac{1}{2}\ln 4-\frac{k}{4}b^2+a\right)$，即 $-4k+\frac{k}{4}b^2=0$，又 $k\neq 0$，所以 $b^2=16$. 因为 $b>0$，所以 $b=4$. 故选 B.

7. C　由直角梯形 $ABCD$ 绕 AB 旋转一周所得几何体的体积 $V_1=\frac{1}{3}(4\pi+16\pi+\sqrt{4\pi\times 16\pi})\times 4=\frac{112\pi}{3}$，设重心 G 到 AB 的距离为 d_1，则 $\frac{112\pi}{3}=\frac{2+4}{2}\times 4\times 2\pi d_1$，解得 $d_1=\frac{14}{9}$；直角梯形绕 BC 旋转一周所得几何体的体积 $V_2=32\pi+\frac{32\pi}{3}=\frac{128\pi}{3}$，设重心 G 到 BC 的距离为 d_2，则 $\frac{128\pi}{3}=\frac{2+4}{2}\times 4\times 2\pi d_2$，所以 $d_2=\frac{16}{9}$，所以 $BG=\sqrt{\left(\frac{14}{9}\right)^2+\left(\frac{16}{9}\right)^2}=\frac{2\sqrt{113}}{9}$. 故选 C.

8. D　由题意知 $a^2-b^2=4$. 设 C 的左焦点为 F'，则 $F'(-2,0)$，因为 $|PA|+|PF|=10$，且 $|PF|+|PF'|=2a$，所以 $|PA|+2a-|PF'|=10$，所以 $|PA|-|PF'|=10-2a$，所以 $|10-2a|\leqslant|AF'|=5$，所以 $\frac{5}{2}\leqslant a\leqslant\frac{15}{2}$. 因为 $b^2=a^2-4$，点 $A(2,3)$ 为椭圆 C 内一点，所以 $\frac{4}{a^2}+\frac{9}{b^2}<1$，所以 $\frac{4}{a^2}+\frac{9}{a^2-4}<1$，所以 $a^4-17a^2+16>0$，又 $a>2$，故 $a>4$，所以 $4<a\leqslant\frac{15}{2}$. 故选 D.

9. D　因为 $b^2=2a^2+c^2$，所以 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=-\frac{a}{2c}$，$B\in(0,\pi)$，所以 $\sin B=\sqrt{1-\frac{a^2}{4c^2}}=\frac{\sqrt{4c^2-a^2}}{2c}$，所以 $\triangle ABC$ 的面积 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{a\sqrt{4c^2-a^2}}{4}=\frac{\sqrt{9a^2(4c^2-a^2)}}{12}\leqslant\frac{1}{12}\times\frac{9a^2+4c^2-a^2}{2}=\frac{1}{12}\times\frac{4(2a^2+c^2)}{2}=\frac{3}{2}$，当且仅当 $4c^2-a^2=9a^2$，即 $a=\sqrt{2}$，$c=\sqrt{5}$ 时等号成立，故 $\triangle ABC$ 面积的最大值为 $\frac{3}{2}$. 故选 D.

10. C　由题意得 $f(x)=\frac{6\sin x\cos x}{2\cos^2 x+1}=\frac{3\sin 2x}{\cos 2x+2}$，所以 $f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\frac{3\sin(\pi-2x)}{\cos(\pi-2x)+2}=\frac{3\sin 2x}{-\cos 2x+2}=-\frac{3\sin 2x}{\cos 2x-2}\neq f(x)$，所以 $f(x)$ 的图象不关于直线 $x=\frac{\pi}{4}$ 对称；$f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{3\sin(2x+\pi)}{\cos(2x+\pi)+2}=\frac{-3\sin 2x}{-\cos 2x+2}=\frac{3\sin 2x}{\cos 2x-2}\neq f(x)$，故 $\frac{\pi}{2}$ 不是 $f(x)$ 的周期；设 $k=\frac{\sin 2x}{\cos 2x+2}$，则 k 的大小等于点 $(\cos 2x,\sin 2x)$ 与点 $(-2,0)$ 连线的斜率，又点 $(\cos 2x,\sin 2x)$ 在圆 $O:x^2+y^2=1$ 上，利用数形结合的方法易求得 $k\in\left[-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$，故 $f(x)$ 的值域为 $[-\sqrt{3},\sqrt{3}]$；

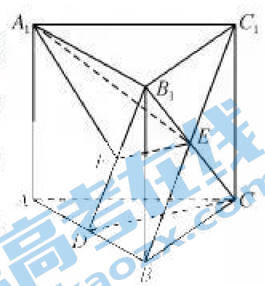
$f'(x)=\frac{12\cos 2x+6}{(\cos 2x+2)^2}$,令 $f'(x)\leqslant 0$,得 $\cos 2x\leqslant -\frac{1}{2}$,所以$\frac{\pi}{3}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{2\pi}{3}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$,故 $f(x)$在$\left[\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right]$上单调递减,综上,ABD 错误 C 正确. 故选 C.

11. A　由题意知 $PF_1\perp PF_2$,所以$|PF_1|^2+|PF_2|^2=4c^2$,又因为$||PF_1|-|PF_2||=2a$,与 $|PF_1|^2+|PF_2|^2=4c^2$ 联立,得$|PF_1|\cdot|PF_2|=2b^2$,$(|PF_1|+|PF_2|)^2=4c^2+4b^2$,所以$|PF_1|+|PF_2|=2\sqrt{c^2+b^2}$,又 $S_{\triangle PF_1F_2}=\frac{1}{2}|PF_1||PF_2|=\frac{1}{2}(|PF_1|+|PF_2|+|F_1F_2|)\cdot a$,所以 $2b^2=a(2\sqrt{b^2+c^2}+2c)$,即 $b^2-ac=a\sqrt{b^2+c^2}$,所以 $b^2-2ac=a^2$,即 $c^2-2ac-2a^2=0$,所以 $e^2-2e-2=0$,所以 $e=\sqrt{3}+1$. 故选 A.

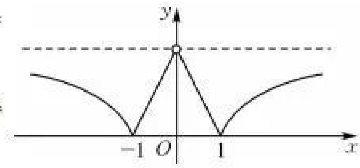
12. B　由题意知 $a=\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_3\frac{9}{7}}=3^{\log_3\frac{7}{9}}=\frac{7}{9}$,$\ln b-\ln a=0.1+\ln 0.7-\ln\frac{7}{9}=\frac{1}{10}+\ln\frac{9}{10}$,令 $f(x)=1-x+\ln x$,则 $f'(x)=-1+\frac{1}{x}=\frac{1-x}{x}$,当 $0<x<1$ 时,$f'(x)>0$,所以 $f(x)$在$(0,1)$上单调递增,所以 $f\left(\frac{9}{10}\right)<f(1)=0$,所以 $\ln b-\ln a<0$,所以 $a>b$;因为 $\cos\frac{2}{3}=1-2\sin^2\frac{1}{3}$,易知 $0<\sin\frac{1}{3}<\frac{1}{3}$,所以 $\cos\frac{2}{3}=1-2\sin^2\frac{1}{3}>1-\frac{2}{9}=\frac{7}{9}$,所以 $c>a$,所以 $c>a>b$. 故选 B.

13. e　由题意知曲线 $y=f(x)$在 $x=1$ 处的切线斜率等于 3,又 $f'(x)=\frac{1}{x\ln a}+2x$,所以 $f'(1)=\frac{1}{\ln a}+2=3$,所以 $a=\mathrm{e}$.

14. 1 792　$\left(x-\frac{2}{\sqrt[3]{x}}\right)^8$ 展开式的通项公式 $T_{r+1}=C_8^r x^{8-r}\left(-\frac{2}{\sqrt[3]{x}}\right)^r=(-2)^r C_8^r x^{8-\frac{4r}{3}}(r=0,1,2,\cdots,8)$,令 $8-\frac{4r}{3}=0$,得 $r=6$,令 $8-\frac{4r}{3}=-1$ 无整数解,所以展开式中的常数项为$(-2)^6C_8^6=1\ 792$.



15. $\frac{\sqrt{3}}{4}$　连接 B_1D,取 B_1D 中点 F,连接 A_1F,EF,则 $EF/\!/CD$,所以$\angle A_1EF$ 为 CD 与 A_1E 所成的角(或其补角). 因为在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,D 为棱 AB 的中点,易证 $CD\perp$平面 ABB_1A_1,从而可得 $EF\perp$平面 ABB_1A_1,又 $A_1F\subset$平面 ABB_1A_1,所以 $EF\perp A_1F$. 不妨设 $AB=2$,则 $CD=\sqrt{3}$,$B_1D=\sqrt{5}$,所以 $EF=\frac{\sqrt{3}}{2}$,$B_1F=\frac{\sqrt{5}}{2}$,又 $\cos\angle A_1B_1F=\cos\angle B_1DB=\frac{1}{\sqrt{5}}$,所以 $A_1F=\sqrt{A_1B_1^2+B_1F^2-2A_1B_1\cdot B_1F\cos\angle A_1B_1F}=\frac{\sqrt{13}}{2}$,所以 $A_1E=\sqrt{A_1F^2+EF^2}=2$,所以 $\cos\angle A_1EF=\frac{EF}{A_1E}=\frac{\sqrt{3}}{4}$.



16. $-2<b<0$ 且 $c=0$　显然 $f(x)$为偶函数,当 $x>0$ 时,$f(x)=\begin{cases}-2x+2,0<x<1,\\ 2-\frac{2}{x},x\geqslant 1,\end{cases}$ 画出 $f(x)$在$(0,+\infty)$上的图象,利用偶函数的对称性,易得 $f(x)$在其定义域上的图象(如图所示);设 $f(x)=t$,则原方程变为 $t^2+bt+c=0$,所以原方程有 6 个不同的实数解的充要条件是方程 $t^2+bt+c=0$ 的两根 t_1,t_2满足 $t_1=0$ 且 $0<t_2<2$;又 $t_1=0$ 时 $c=0$ 且 $t_2=-b$,而 $\Delta=b^2-4c$,则问题等价于$\begin{cases}b^2-4c>0,\\ 0<-b<2,\\ c=0,\end{cases}$所以$-2<b<0$ 且 $c=0$.

17. (1)证明:当 n 为偶数时 $a_n=3a_{\frac{n}{2}}$,又 $2^n(n\in\mathbf{N}^*)$为偶数,

所以 $a_{2^n}=3a_{2^{n-1}}$,又 $a_1=1$,所以 $a_2=3a_1=3\neq 0$,所以 $a_{2^n}\neq 0$, ………………………………………… 2 分

所以$\frac{a_{2^n}}{a_{2^{n-1}}}=3$,所以$\{a_{2^n}\}$是以 3 为首项,3 为公比的等比数列. ………………………………………… 4 分

(2)解：由(1)得 $a_{2^n}=3\times3^{n-1}=3^n$， ………………………………………………………………………… 5分

当 n 为奇数时，$a_n=a_{n-2}+2(n\geqslant3)$，

所以 $a_{2n+1}=a_{2n-1}+2$，所以 $\{a_{2n-1}\}$ 是公差为 2 的等差数列， ……………………………………………… 6分

所以 $a_{2n-1}=a_1+2(n-1)=2n-1$，

所以 $b_n=(2n-1)\cdot3^n$. ………………………………………………………………………………………… 7分

所以 $S_n=1\times3+3\times3^2+5\times3^3+\cdots+(2n-3)\times3^{n-1}+(2n-1)\times3^n$，

两边同乘以 3，得

$3S_n=1\times3^2+3\times3^3+5\times3^4+\cdots+(2n-3)\times3^n+(2n-1)\times3^{n+1}$， ………………………………… 8分

两式相减，得

$-2S_n=3+2\times3^2+2\times3^3+\cdots+2\times3^n-(2n-1)\times3^{n+1}=3+2\times\frac{3^2(1-3^{n-1})}{1-3}-(2n-1)\times3^{n+1}$

$=3+3^{n+1}-9-(2n-1)\times3^{n+1}=-6-(2n-2)\times3^{n+1}$，

所以 $S_n=(n-1)\times3^{n+1}+3$. ………………………………………………………………………………… 12分

18. (1)证明：延长 FM 与 DA 的延长线交于点 N，连接 CN 交 AB 于点 H，连接 FH.

因为平面 α//平面 $ABCD$，平面 $\alpha\cap$平面 $PAD=EF$，平面 $ABCD\cap$平面 $PAD=AD$，且 E 为 PA 的中点，所以 $EF//AD$，

且 $AD=2EF$。同理可得 $FG//CD$，$CD=2FG$. ……………………………………………………………… 2分

又 $AM=2ME$，所以 $AN=2EF=AD$， ……………………………………………………………………………… 3分

又 $AB//CD$，所以 H 为 AB 的中点，所以 $BH//CD$，且 $CD=2BH$. ……………………………………………… 4分

又 $FG//CD$，$CD=2FG$，

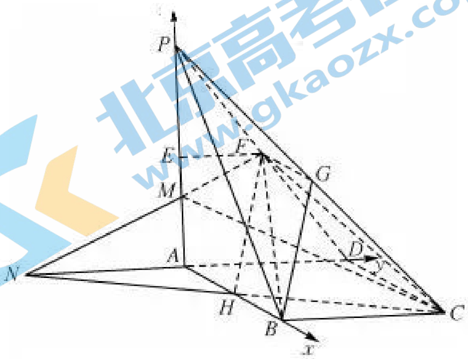
所以 $FG//BH$，且 $FG=BH$，所以四边形 $BHFG$ 为平行四边形，所以 $BG//FH$， ………………………………… 5分

又 $FH\subset$平面 CFM，$BG\not\subset$平面 CFM，

所以 $BG//$平面 CFM. ………………………………………………………………………………………… 6分

(2)解：由题意易得 AB，AD，AP 两两垂直，故以 A 为坐标原点，直线 AB，AD，AP 分别为 x 轴，y 轴，z 轴建立空间直角坐标系(如图所示)，则 $C(4,4,0)$，$D(0,4,0)$，$F(0,2,3)$，$M(0,0,2)$，$P(0,0,6)$，所以 $\overrightarrow{CD}=(-4,0,0)$，$\overrightarrow{CF}=(-4,-2,3)$，$\overrightarrow{MF}=(0,2,1)$，$\overrightarrow{PD}=(0,4,-6)$.

………………………………………………………………………………………… 8分



设平面 PCD 的一个法向量 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PD}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CD}=0,\end{cases}$ 即

$\begin{cases}4y-6z=0,\\ -4x=0,\end{cases}$ 令 $z=2$，得 $x=0$，$y=3$，故 $\boldsymbol{n}=(0,3,2)$. ……………………………………………………… 9分

设平面 CFM 的一个法向量 $\boldsymbol{m}=(a,b,c)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{MF}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{CF}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2b+c=0,\\ -4a-2b+3c=0,\end{cases}$

令 $b=1$，得 $a=-2$，$c=-2$，故 $\boldsymbol{m}=(-2,1,-2)$. ……………………………………………………………… 10分

设平面 CFM 与平面 PCD 所成锐二面角的大小为 θ，

则 $\cos\theta=|\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\frac{1}{3\sqrt{13}}=\frac{\sqrt{13}}{39}$，即平面 CFM 与平面 PCD 所成的锐二面角的余弦值为 $\frac{\sqrt{13}}{39}$.

………………………………………………………………………………………… 12分

19. 解：(1)由题意，乙得 10 分的基本事件有{乙抢到两题且一道正确一道错误或没有回答}、{甲，乙各抢到一题都回答正确}、{甲抢到两题且都回答错误或没有回答}，…………………………………………………… 1 分

所以乙总得分为 10 分的概率 $P=2\times\frac{1}{2}\times\frac{4}{5}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}+2\times\frac{1}{2}\times\frac{4}{5}\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{337}{900}$. …… 4 分

(2)由题意得，甲的总得分 X 可能取值为 0，5，10，15，20. …………………………………………………… 5 分

$P(X=0)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+2\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{4}{5}+\frac{1}{2}\times\frac{4}{5}\times\frac{1}{2}\times\frac{4}{5}=\frac{289}{900}$； …………………………………… 6 分

$P(X=5)=2\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+2\times\frac{1}{2}\times\frac{4}{5}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}=\frac{17}{150}$； …………………………………………… 7 分

$P(X=10)=2\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}+2\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{4}{5}=\frac{349}{900}$； ………………………… 8 分

$P(X=15)=2\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{15}$； …………………………………………………………………… 9 分

$P(X=20)=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{9}$. …………………………………………………………………… 10 分

分布列如下：

X	0	5	10	15	20
P	$\frac{289}{900}$	$\frac{17}{150}$	$\frac{349}{900}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{9}$

所以 $E(X)=0\times\frac{289}{900}+5\times\frac{17}{150}+10\times\frac{349}{900}+15\times\frac{1}{15}+20\times\frac{1}{9}=\frac{23}{3}$. …………………………………………… 12 分

20. 解：(1)设 C 的焦距为 $2c$，由题意知 $\begin{cases}(a+c)-(a-c)=2\sqrt{3},\\ \frac{2b^2}{a}=1,\\ a^2=b^2+c^2,\end{cases}$ …………………………………………… 2 分

解得 $\begin{cases}a=2,\\ b=1,\\ c=\sqrt{3},\end{cases}$ …………………………………………………………………………………… 4 分

故 C 的方程为 $x^2+\frac{y^2}{4}=1$. …………………………………………………………………………… 5 分

(2)设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，

联立 $\begin{cases}y=kx+m,\\ x^2+\frac{y^2}{4}=1,\end{cases}$

消去 y 整理得 $(k^2+4)x^2+2mkx+m^2-4=0$， …………………………………………………………… 6 分

所以 $\Delta=4m^2k^2-4(k^2+4)(m^2-4)>0$，即 $k^2-m^2+4>0$，

且 $x_1+x_2=\frac{-2km}{k^2+4}$，$x_1x_2=\frac{m^2-4}{k^2+4}$. ………………………………………………………………… 7 分

因为点 P 是线段 MN 靠近点 N 的四等分点，

所以 $\overrightarrow{MP}=3\overrightarrow{PN}$，所以 $x_1=-3x_2$，

所以 $3(x_1+x_2)^2=3\times(-2x_2)^2=-4x_2\times(-3x_2)=-4x_1x_2$.

所以 $3(x_1+x_2)^2+4x_1x_2=0$， ……………………………………………………………………………… 8 分

所以 $\frac{12k^2m^2}{(k^2+4)^2}+\frac{4(m^2-4)}{k^2+4}=0$，

整理得 $m^2k^2+m^2-k^2-4=0$, ………………………………………………………………………… 9 分

显然 $m^2=1$ 不成立,所以 $k^2=\dfrac{4-m^2}{m^2-1}$.

因为 $k^2-m^2+4>0$,所以$\dfrac{4-m^2}{m^2-1}-m^2+4>0$,即$\dfrac{(4-m^2)m^2}{m^2-1}>0$. ………………………………………… 10 分

解得$-2<m<-1$,或 $1<m<2$,

所以实数 m 的取值范围为$(-2,-1)\cup(1,2)$. ……………………………………………………………… 12 分

21. 解:(1)当 $a=\dfrac{1}{2}$时,$f(x)=x\ln x-\dfrac{1}{4}x^2-x+\dfrac{1}{2}$,其定义域为$(0,+\infty)$,且 $f'(x)=\ln x+1-\dfrac{1}{2}x-1=\ln x-\dfrac{1}{2}x$,

所以 $g(x)=\ln x-\dfrac{1}{2}x$, ………………………………………………………………………………………… 1 分

所以 $g'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{2-x}{2x}(x>0)$,令 $g'(x)>0$,得 $0<x<2$;令 $g'(x)<0$,得 $x>2$,

所以 $g(x)$在$(0,2)$上单调递增,在$(2,+\infty)$上单调递减. ……………………………………………… 2 分

①当 $t+1\leqslant 2$,即 $0<t\leqslant 1$ 时,$g(x)$在$[t,t+1]$上单调递增,

所以 $h(t)=g(x)_{\max}=g(t+1)=\ln(t+1)-\dfrac{1}{2}t-\dfrac{1}{2}$; ………………………………………………… 3 分

②当 $t\leqslant 2$,$t+1>2$,即 $1<t\leqslant 2$ 时,$h(t)=g(x)_{\max}=g(2)=\ln 2-1$; ……………………………… 4 分

③当 $t>2$ 时,$g(x)$在$[t,t+1]$上单调递减,所以 $h(t)=g(x)_{\max}=g(t)=\ln t-\dfrac{1}{2}t$.

综上所述,$h(t)=\begin{cases}\ln(t+1)-\dfrac{1}{2}t-\dfrac{1}{2}, & 0<t\leqslant 1,\\ \ln 2-1, & 1<t\leqslant 2,\\ \ln t-\dfrac{1}{2}t, & t>2.\end{cases}$ ……………………………………………… 5 分

(2)因为 $e^{1+m}<x_1x_2^m$,所以 $1+m<\ln x_1+m\ln x_2$,

由题意知 $f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$,$f'(x)=\ln x-ax$,故 x_1,x_2 是关于 x 的方程 $f'(x)=\ln x-ax=0$ 的两个根,
……… 6 分

所以 $f'(x_1)=\ln x_1-ax_1=0$,$f'(x_2)=\ln x_2-ax_2=0$,即 $\ln x_1=ax_1$,$\ln x_2=ax_2$,

所以 $1+m<\ln x_1+m\ln x_2$ 等价于 $1+m<ax_1+max_2=a(x_1+mx_2)$.

因为 $m>0$,$0<x_1<x_2$,所以原式等价于 $a>\dfrac{1+m}{x_1+mx_2}$, ………………………………………………… 7 分

又 $\ln x_1=ax_1$,$\ln x_2=ax_2$,作差,得 $\ln\dfrac{x_1}{x_2}=a(x_1-x_2)$,即 $a=\dfrac{\ln\dfrac{x_1}{x_2}}{x_1-x_2}$,

所以原式等价于$\dfrac{\ln\dfrac{x_1}{x_2}}{x_1-x_2}>\dfrac{1+m}{x_1+mx_2}$. ………………………………………………………… 8 分

因为 $0<x_1<x_2$,所以 $\ln\dfrac{x_1}{x_2}<\dfrac{(1+m)(x_1-x_2)}{x_1+mx_2}$恒成立.

令 $t=\dfrac{x_1}{x_2}$,则 $t\in(0,1)$,故不等式 $\ln t<\dfrac{(1+m)(t-1)}{t+m}$在 $t\in(0,1)$上恒成立, ……………… 9 分

令 $\varphi(t)=\ln t-\dfrac{(1+m)(t-1)}{t+m}$.

又因为 $\varphi'(t)=\dfrac{1}{t}-\dfrac{(1+m)^2}{(t+m)^2}=\dfrac{(t-1)(t-m^2)}{t(t+m)^2}$,

当 $m^2\geqslant 1$ 时，得 $t\in(0,1)$ 时，$\varphi'(t)>0$，所以 $\varphi(t)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，

又 $\varphi(1)=0$，所以 $\varphi(t)<0$ 在 $(0,1)$ 上恒成立，符合题意；…………………………………………… 10 分

当 $m^2<1$ 时，可得 $t\in(0,m^2)$ 时，$\varphi'(t)>0$，$t\in(m^2,1)$ 时，$\varphi'(t)<0$，

所以 $\varphi(t)$ 在 $(0,m^2)$ 上单调递增，在 $(m^2,1)$ 上单调递减，又因为 $\varphi(1)=0$，

所以 $\varphi(t)$ 在 $(0,1)$ 上不能恒小于 0，不符合题意，舍去．…………………………………………… 11 分

综上所述，若不等式 $e^{1+m}<x_1x_2^m$ 恒成立，只需满足 $m^2\geqslant 1$，又 $m>0$，故 $m\geqslant 1$，

即正数 m 的取值范围为 $[1,+\infty)$．…………………………………………………………………… 12 分

22．解：(1)因为曲线 C_1 的极坐标方程 $\rho^2=2\rho\cos\theta+2$，

又 $\rho^2=x^2+y^2$，$x=\rho\cos\theta$，可得 $x^2+y^2=2x+2$，

所以曲线 C_1 的直角坐标方程为 $(x-1)^2+y^2=3$．…………………………………………………… 2 分

因为曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3}{2}$，即 $\rho\cos\theta-\sqrt{3}\rho\sin\theta=3$，…………………… 3 分

所以曲线 C_2 的直角坐标方程为 $x-\sqrt{3}y-3=0$，C_2 是过点 $(3,0)$，斜率为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$，即倾斜角为 $\frac{\pi}{6}$ 的直线．………… 4 分

直线 C_2 的一个参数方程为 $\begin{cases} x=3+\frac{\sqrt{3}}{2}t, \\ y=\frac{1}{2}t \end{cases}$ （t 为参数）．…………………………………… 5 分

(2)设 A，B 所对应的参数分别为 t_1，t_2，

把直线 C_2 的参数方程代入 $(x-1)^2+y^2=3$，可得 $t^2+2\sqrt{3}t+1=0$，…………………………………… 6 分

$\Delta=(2\sqrt{3})^2-4\times 1=8>0$，

所以 $t_1+t_2=-2\sqrt{3}$，$t_1t_2=1>0$，……………………………………………………………………… 8 分

故 $\frac{1}{|PA|+|PB|}=\frac{1}{|t_1+t_2|}=\frac{1}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{6}$．…………………………………………………… 10 分

23．解：(1) $f(x)=\begin{cases} 1-2x, x<0, \\ 1, 0\leqslant x\leqslant 1, \\ 2x-1, x>1, \end{cases}$ …………………………………………………… 1 分

不等式 $f(x)<8$ 等价于 $\begin{cases} 1-2x<8, \\ x<0, \end{cases}$ 或 $\begin{cases} 1<8, \\ 0\leqslant x\leqslant 1, \end{cases}$ 或 $\begin{cases} 2x-1<8, \\ x>1, \end{cases}$ ……………………………… 4 分

解得 $-\frac{7}{2}<x<\frac{9}{2}$，故不等式 $f(x)<8$ 的解集为 $\left(-\frac{7}{2},\frac{9}{2}\right)$．………………………………… 5 分

(2)因为 $y=f(x)-|x|-|x-2|=|x-1|-|x-2|\leqslant|(x-1)-(x-2)|=1$，当且仅当 $x\geqslant 2$ 时等号成立，故 $m=1$，…………………………………………………………………………………………… 6 分

所以 $a+2b=1$，……………………………………………………………………………………………… 7 分

所以 $\frac{1}{2a+b}+\frac{4}{a+5b}=\left(\frac{1}{2a+b}+\frac{4}{a+5b}\right)\cdot\frac{(2a+b)+(a+5b)}{3}=\frac{1}{3}\left[1+4+\frac{a+5b}{2a+b}+\frac{4(2a+b)}{a+5b}\right]$

$\geqslant\frac{1}{3}\left[5+2\sqrt{\frac{a+5b}{2a+b}\cdot\frac{4(2a+b)}{a+5b}}\right]=\frac{1}{3}\times(5+4)=3$，……………………………… 9 分

当且仅当 $\frac{a+5b}{2a+b}=\frac{4(2a+b)}{a+5b}$，即 $a=b=\frac{1}{3}$ 时等号成立，

故 $\frac{1}{2a+b}+\frac{4}{a+5b}$ 的最小值为 3．……………………………………………………………… 10 分