北京一零一中 2020-2021 学年度第二学期期中考试

高 一 数 学

(本试卷满分 120 分，考试时间 100 分钟)

命题：高一数学备课组　审稿：张燕菱

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 设 $\alpha \in (0,\pi)$, 且 $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$, 则 $\alpha =$ (　　)

(A) $\frac{\pi}{6}$　　(B) $\frac{\pi}{3}$　　(C) $\frac{2\pi}{3}$　　(D) $\frac{5\pi}{6}$

2. 已知复数 z 满足 $z(1+\mathrm{i})=1$, 则 z 对应的点位于复平面内的 (　　)

(A) 第一象限　　(B) 第二象限　　(C) 第三象限　　(D) 第四象限

3. 一组数据的平均数为 $\bar{x}$, 方差为 s^2, 将这组数据的每个数都乘以 $a\ (a>0)$ 得到一组新数据, 则下列说法正确的是 (　　)

(A) 这组新数据的平均数为 $\bar{x}$　　(B) 这组新数据的平均数为 $a+\bar{x}$

(C) 这组新数据的方差为 as^2　　(D) 这组新数据的标准差为 as

4. 已知随机事件 A, B, C 中, A 与 B 互斥, B 与 C 对立, 且 $P(A)=0.3$, $P(C)=0.6$, 则 $P(A+B)=$ (　　)

(A) 0.3　　(B) 0.6　　(C) 0.7　　(D) 0.9

5. 已知单位向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 满足 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$, 若向量 $\boldsymbol{c}=\sqrt{7}\boldsymbol{a}+\sqrt{2}\boldsymbol{b}$, 则 $\sin\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}\rangle=$ (　　)

(A) $\frac{\sqrt{7}}{3}$　　(B) $\frac{\sqrt{2}}{3}$　　(C) $\frac{\sqrt{7}}{9}$　　(D) $\frac{\sqrt{2}}{9}$

6. 在 $\triangle ABC$ 中, $a=1$, $b=\sqrt{3}$, $A=30°$, 则 $c=$ (　　)

(A) 1　　(B) 2　　(C) 1 或 2　　(D) 无解

7. 设 z_1, z_2 是复数, 则 “$z_1-z_2>0$” 是 “$z_1>z_2$” 的 (　　)

(A) 充分而不必要条件　　(B) 必要而不充分条件

(C) 充分必要条件　　(D) 既不充分也不必要条件

8. 函数 $f(x)=2\sin x-\cos 2x$ 在区间 $[0,2\pi]$ 上的零点个数为 (　　)

(A) 2　　(B) 3　　(C) 4　　(D) 5

9. 下列结论正确的是（　　）

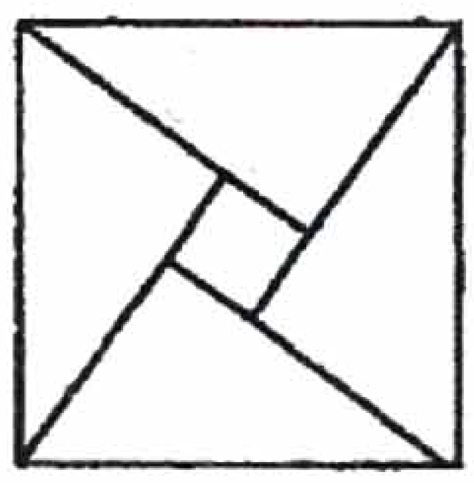
(A) 若 $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, 则 $\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma=\tan\alpha\cdot\tan\beta\cdot\tan\gamma$

(B) 设 $\alpha\in(\pi,2\pi)$, 则 $\sqrt{\dfrac{1-\cos(\pi+\alpha)}{2}}=\sin\dfrac{\alpha}{2}$

(C) 设 $\dfrac{5\pi}{2}<\theta<3\pi$, 且 $|\cos\theta|=\dfrac{1}{5}$, 那么 $\sin\dfrac{\theta}{2}$ 的值为 $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$

(D) 存在实数 α,β, 使等式 $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha+\sin\beta$ 成立

10. 我国古代数学家赵爽的弦图是有四个全等的直角三角形与一个小正方形拼成的大正方形（如图）. 如果小正方形的边长为 2, 大正方形的边长为 10, 直角三角形中较小的锐角为 θ, 则 $\sin(\theta-\dfrac{\pi}{2})-\cos(\theta+\dfrac{\pi}{6})=$（　　）



(A) $\dfrac{5+4\sqrt{3}}{10}$　(B) $\dfrac{5-4\sqrt{3}}{10}$　(C) $\dfrac{-5+4\sqrt{3}}{10}$　(D) $\dfrac{-5-4\sqrt{3}}{10}$

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。

11. 已知五个数 1, 2, 3, 4, $\overset{5}{a}$ 的平均数是 3, 则这五个数的标准差是 ________.

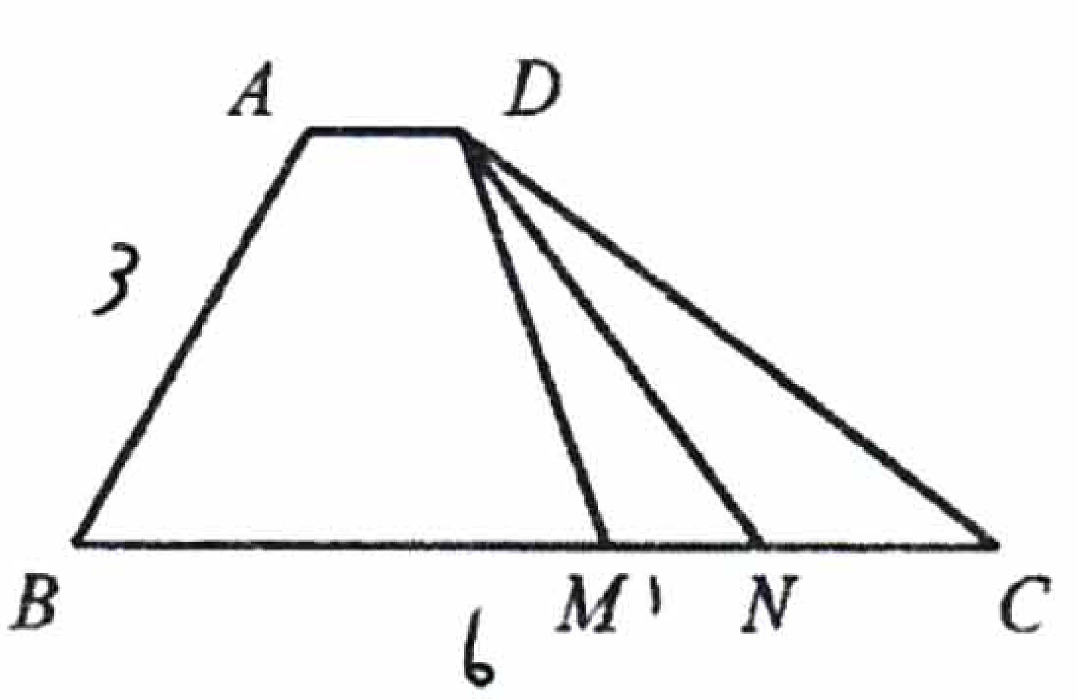
12. 已知复数 $z_1=1-i$, $z_2=2i-1$, 则复数 $\dfrac{i}{z_1}+\overline{z_2}$ 的虚部等于 ________.

13. 暑假期间, 甲外出旅游的概率是 $\dfrac{1}{4}$, 乙外出旅游的概率是 $\dfrac{1}{5}$, 假定甲乙两人的行动相互之间没有影响, 则暑假期间两人中至少有一人外出旅游的概率是 ________.

14. 某学校开展了"国学"系列讲座活动, 为了了解活动效果, 用分层抽样的方法从高一年级所有学生中抽取 10 人进行国学素养测试, 这 10 名同学的性别和测试成绩（百分制）的茎叶图如图所示. 则男生成绩的 75% 分位数为 ________; 已知高一年级中男生总数为 80 人, 试估计高一年级学生总数为 ________.

男		女
	5	6
4	6	
8 7 6	7	0 6 9
	8	7 8

15. 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, $\angle B=60^\circ$, $AB=3$, $BC=6$, 且 $\overrightarrow{AD}=\lambda\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}=-\dfrac{3}{2}$, 则实数 λ 的值为 ________, 若 M,N 是线段 BC 上的动点, 且 $|\overrightarrow{MN}|=1$, 则 $\overrightarrow{DM}\cdot\overrightarrow{DN}$ 的最小值为 ________.

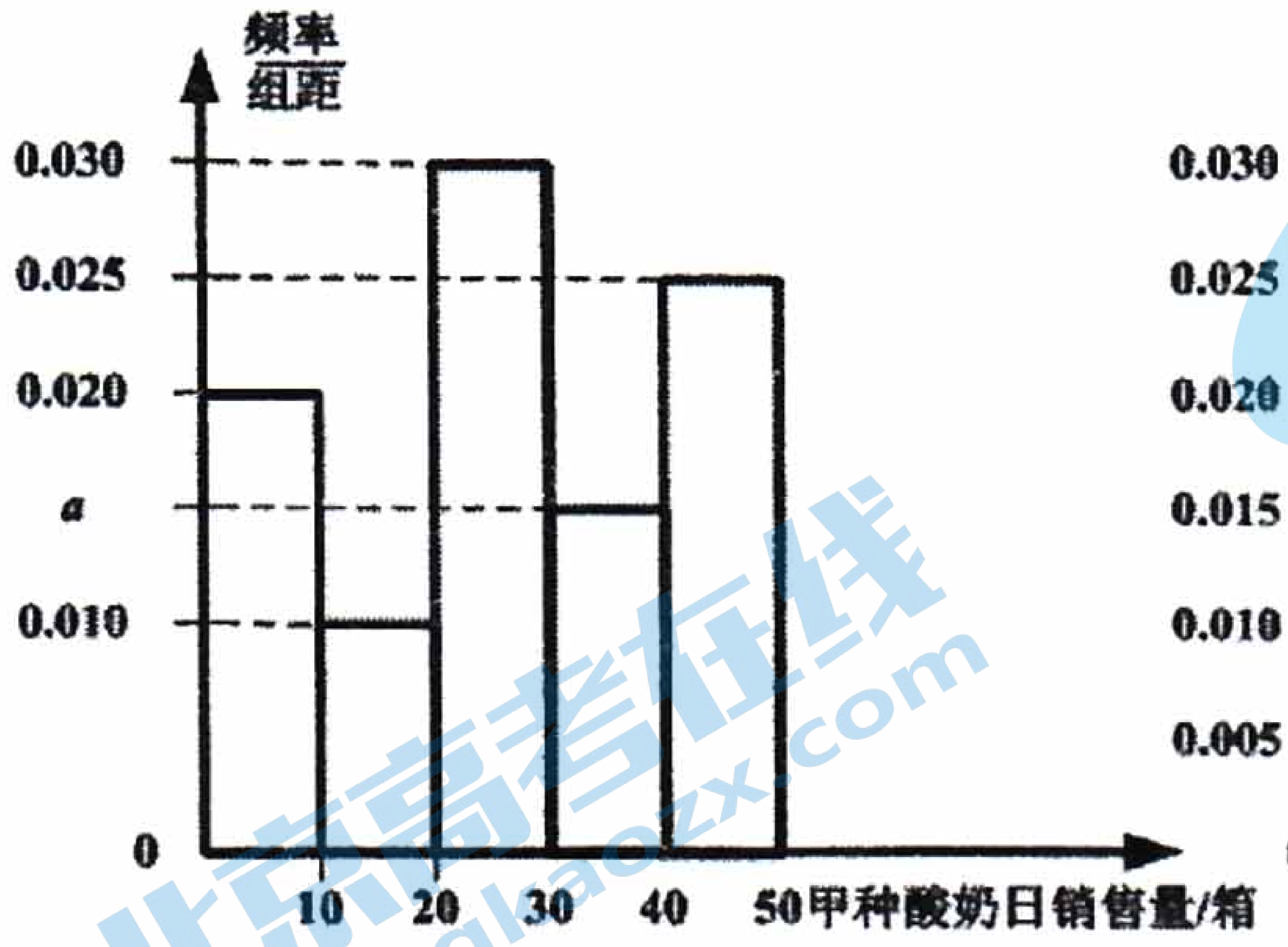


16. 已知点 $A(x_1,f(x_1))$, $B(x_2,f(x_2))$ 是函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)$ $(\omega>0,-\dfrac{\pi}{2}<\varphi<0)$ 图像上的任意两点, 角 φ 的终边经过点 $P(1,-\sqrt{3})$, 且当 $|f(x_1)-f(x_2)|=4$ 时, $|x_1-x_2|$ 的最小值为 $\dfrac{\pi}{3}$. 若 $x\in[0,\dfrac{\pi}{6}]$, 不等式 $mf(x)+2m\geqslant f(x)$ 恒成立, 则实数 m 的取值范围是 ________.

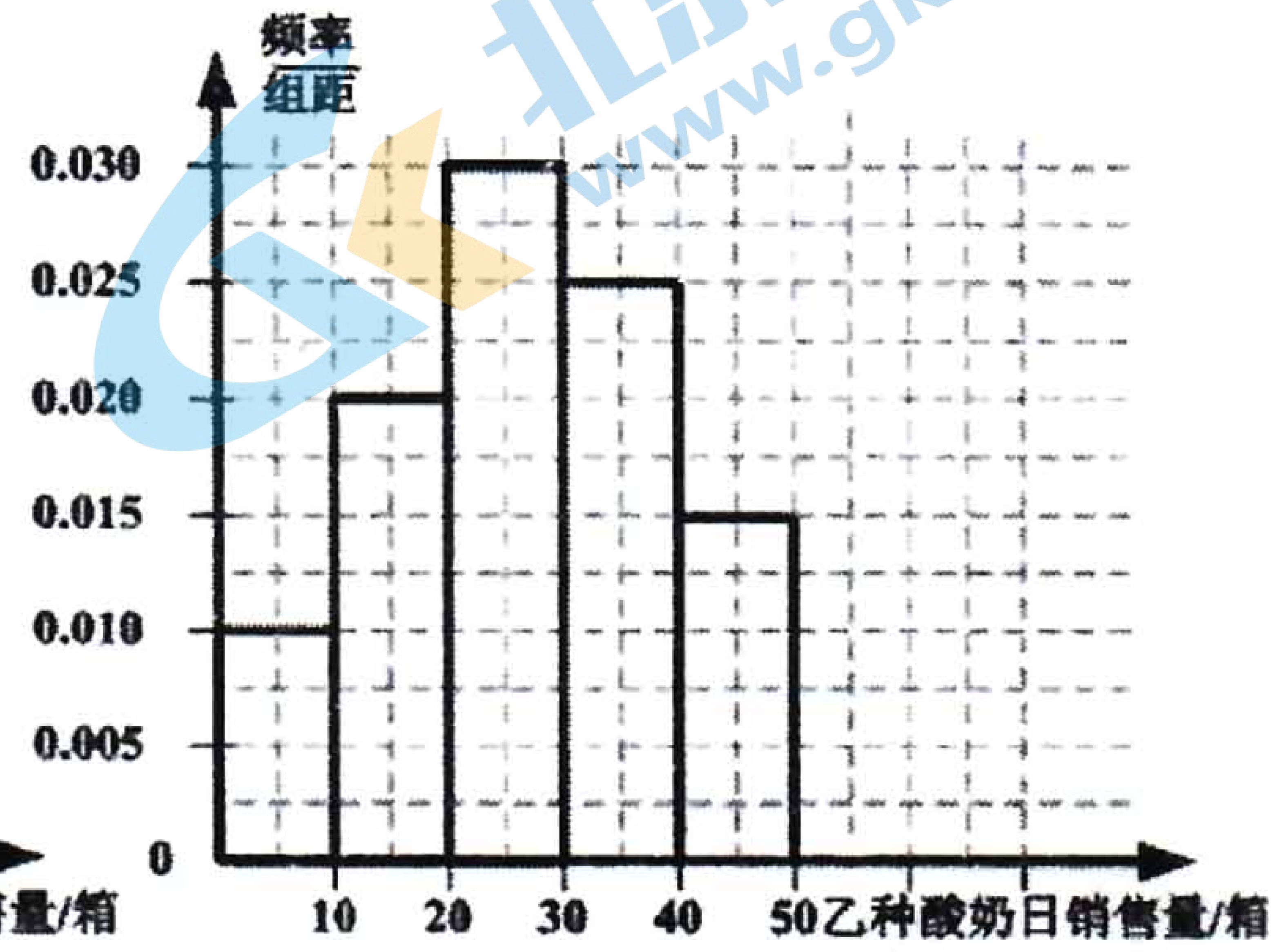
三、解答题共 4 小题，共 50 分。解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程。

17. (本小题 12 分)

某超市从 2019 年甲、乙两种酸奶的日销售量 (单位: 箱) 的数据中分别随机抽取 100 个, 并按 $[0,10]$, $(10,20]$, $(20,30]$, $(30,40]$, $(40,50]$ 分组, 得到频率分布直方图如下:



(甲)



(乙)

假设甲、乙两种酸奶的日销售量相互独立.

(1) 写出频率分布直方图 (甲) 中的 a 的值; 记甲种酸奶与乙种酸奶日销售量 (单位: 箱) 的方差分别为 s_1^2, s_2^2, 试比较 s_1^2 与 s_2^2 的大小; (只需写出结论)

(2) 用频率估计概率, 求在未来的某一天里, 甲、乙两种酸奶的销售量恰有一个高于 20 箱的概率.

18. (本小题 12 分)

在 $\triangle ABC$ 中, $\cos C = \frac{1}{7}$, $c = 8$, 再从条件①、条件②这两个条件中选择一个作为已知, 求:

(1) b 的值;

(2) 角 A 的大小和 $\triangle ABC$ 的面积.

条件①: $a = 7$;

条件②: $\cos B = \frac{11}{14}$.

19. (本小题 13 分)

在平面直角坐标系中, O 为坐标原点, A, B, C 三点满足 $\overrightarrow{OC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OB}$.

(1) 求证: A, B, C 三点共线;

(2) 若 $A(1, \cos x), B(1 + \sin x, \cos x)$, 且 $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, 函数 $f(x) = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} + (2m + \frac{1}{3})|\overrightarrow{AB}| + m^2$ 的最小值为 5, 求实数 m 的值.

20. (本小题 13 分)

我们学过二维的平面向量, 其坐标为 $\boldsymbol{\alpha} = (t_1, t_2)\ (t_k \in \mathbf{R}, k = 1, 2)$, 那么对于 $n\ (n \in \mathbf{N}^*, n \geqslant 2)$ 维向量, 其坐标为 $\boldsymbol{\alpha} = (t_1, t_2, \cdots, t_n)\ (t_k \in \mathbf{R}, k = 1, 2, \cdots, n)$. 设 $n\ (n \in \mathbf{N}^*, n \geqslant 2)$ 维向量的所有向量组成集合 $A_n = \{\boldsymbol{\alpha} \mid \boldsymbol{\alpha} = (t_1, t_2, \cdots, t_n), t_k \in \mathbf{R}, k = 1, 2, \cdots, n\}$. 当 $\boldsymbol{\alpha} = (t_1, t_2, \cdots, t_n)\ (t_k \in \{0, 1\}, k = 1, 2, \cdots, n)$ 时, 称为 A_n 的 "特征向量", 如 $A_2 = \{\boldsymbol{\alpha} \mid \boldsymbol{\alpha} = (t_1, t_2), t_k \in \mathbf{R}, k = 1, 2\}$ 的 "特征向量" 有 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (0, 0), \boldsymbol{\alpha}_2 = (0, 1), \boldsymbol{\alpha}_3 = (1, 0), \boldsymbol{\alpha}_4 = (1, 1)$.

设 $\boldsymbol{\alpha} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 和 $\boldsymbol{\beta} = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$ 为 A_n 的 "特征向量",

定义 $|\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}| = \frac{1}{2}[(x_1 + y_1 - |x_1 - y_1|) + (x_2 + y_2 - |x_2 - y_2|) + \cdots + (x_n + y_n - |x_n - y_n|)]$.

(1) 若 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in A_3$, 且 $\boldsymbol{\alpha} = (1, 1, 0), \boldsymbol{\beta} = (0, 1, 1)$, 计算 $|\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}|, |\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}|$ 的值;

(2) 设 $B \subseteq A_4$, 且 B 中向量均为 A_4 的 "特征向量", 且满足: $\forall\, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in B$, 当 $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta}$ 时, $|\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}|$ 为奇数; 当 $\boldsymbol{\alpha} \neq \boldsymbol{\beta}$ 时, $|\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}|$ 为偶数. 求集合 B 中元素个数的最大值;

(3) 设 $B \subseteq A_n\ (n \in \mathbf{N}^*, n \geqslant 2)$, 且 B 中向量均为 A_n 的 "特征向量", 且满足: $\forall\, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in B$, 且 $\boldsymbol{\alpha} \neq \boldsymbol{\beta}$ 时, $|\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}| = 0$. 写出一个集合 B, 使其元素最多, 并说明理由.