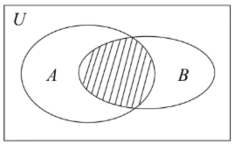
中关村中学 2021-2022 学年度第一学期高一数学期中阶段学情调研

Ⅰ卷

一．选择题(共 10 道小题，每小题 4 分，共 40 分)

1. 已知全集为U，集合$A=\{1,2,3,4,5\}$，$B=\{-3,2\}$，则图中阴影部分表示的集合为（C ）



A. $\{3\}$　　B. $\{-3,2\}$　　C. $\{2\}$　　D. $\{-2,3\}$

2. 命题“$\forall x\in R,|x|+x^2\geq 0$”的否定是（　C　）

A. $\forall x\in R,|x|+x^2<0$　　B. $\forall x\in R,|x|+x^2\leq 0$

C. $\exists x\in R,|x|+x^2<0$　　D. $\exists x\in R,|x|+x^2\geq 0$

3.若$a,b\in R$且$a>b$，那么下列不等式中一定成立的是（ D　）

A. $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$　　B. $a^2>b^2$　　C. $a|c|>b|c|$　　D. $\frac{a}{c^2+1}>\frac{b}{c^2+1}$

4.下列各组函数中，$f(x)$与$g(x)$表示同一个函数的是（ B　）

A. $f(x)=\frac{x^2-1}{x+1}$，$g(x)=x-1$　　B. $f(x)=|x|$，$g(x)=\begin{cases}x, & x\geq 0\\ -x, & x<0\end{cases}$

C. $f(x)=x^0$，$g(x)=1$　　D. $f(x)=\left(\sqrt{x}\right)^2$，$g(x)=\sqrt{x^2}$

5. 已知函数$f(x)=x^3-5x+1$，则下列区间中一定包含$f(x)$零点的区间是（ C　）

A. $(-2,-1)$　　B. $(-1,0)$　　C. $(0,1)$　　D. $(1,2)$

6. 已知 a，b 为实数，则“$a+b>4$”是“a，b 中至少有一个大于 2”的（　A　）

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件　　C. 充要条件　　D. 既不充分又不必要条件

7. 若函数$f(x)=x^2-2ax+1$满足$f(1)<f(2)<f(3)$，则实数 a 的取值范围是（ A　）

A. $a<\frac{3}{2}$　　B. $a\leq\frac{3}{2}$　　C. $a<1$　　D. $a\leq 1$

8. 某车间分批生产某种产品，每批的生产准备费用为 800 元．若每批生产 x 件，则平均仓储时间为$\frac{x}{8}$天，且每件产品每天的仓储费用为 1 元．为使平均每件产品的生产准备费用与仓储费用之和最小，每批应生产产品（　　）

A. 60 件　　B. 80 件　　C. 100 件　　D. 120 件

解：根据题意，该生产 x 件产品的生产准备费用与仓储费用之和是$800+x\cdot\frac{x}{8}=800+\frac{1}{8}x^2$

这样平均每件的生产准备费用与仓储费用之和为 $f(x)=\dfrac{800+\frac{1}{8}x^2}{x}=\dfrac{800}{x}+\dfrac{1}{8}x$（$x$ 为正整数）

由基本不等式，得 $f(x)\geqslant 2\sqrt{\dfrac{800}{x}\cdot\dfrac{1}{8}x}=20$

当且仅当 $\dfrac{800}{x}=\dfrac{1}{8}x=10$ 时，$f(x)$ 取得最小值、

可得 $x=80$ 时，每件产品的生产准备费用与仓储费用之和最小

故选：B.

9. 设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-(a-1)x+2, x\geq 1\\(3a+1)x-5, x<1\end{cases}$ 在 R 上是增函数，则 a 的取值范围是（ C ）

A. $(-\dfrac{1}{3}，3]$　　B. $(-\dfrac{1}{3}，2)$　　C. $(-\dfrac{1}{3}，2]$　　D. $[2，3]$

10.设集合 A 是集合 N^* 的子集，对于 $i\in\mathrm{N}^*$，定义 $\varphi_i(A)=\begin{cases}1, i\in A,\\0, i\notin A.\end{cases}$ 给出下列三个结论：

①存在 N^* 的两个不同子集 A，B，使得任意 $i\in\mathrm{N}^*$ 都满足 $\varphi_i(A\cap B)=0$ 且 $\varphi_i(A\cup B)=1$；

②任取 N^* 的两个不同子集 A，B，对任意 $i\in\mathrm{N}^*$ 都有 $\varphi_i(A\cap B)=\varphi_i(A)\cdot\varphi_i(B)$　　；

③任取 N^* 的两个不同子集 A，B，对任意 $i\in\mathrm{N}^*$ 都有 $\varphi_i(A\cup B)=\varphi_i(A)+\varphi_i(B)$.

其中所有正确结论的序号是（ A ）

A.①②　　B.②③　　C.①③　　D.①②③

二．填空题(共 6 道小题，每小题 4 分，共 24 分)

11. 函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{3x}}{x-2}$ 的定义域为________. $[0,2)\cup(2,+\infty)$

12. 方程组 $\begin{cases}y-x=2\\x^2+y^2=4\end{cases}$ 的解集为______________.$\{(0,2),(-2,0)\}$

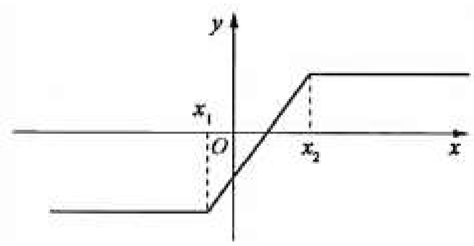
13. 已知 $f(x)$ 为 R 上的奇函数，$x>0$ 时，$f(x)=x^3+\dfrac{1}{x}$，则 $f(-1)+f(0)=$_____. -2

14. 某班共 38 人，其中 15 人喜爱篮球运动，10 人喜爱乒乓球运动，16 人对这两项运动都不喜爱，则喜爱篮球运动但不喜爱乒乓球运动的人数为______. 12

15. 若关于 x 的不等式 $ax^2+x+b>0$ 的解集是 $(-1,2)$，则 $a+b=$______. 1

16. 对任意的 $x_1<0<x_2$，若函数 $f(x)=m|x-x_1|+n|x-x_2|$ 的大致图象为如右图所示的一条折线（两侧

的射线均平行于 x 轴)，写出满足条件的一组实数 m，n 的值分别为______，______.1，-1（答案不唯一）



三．解答题(共 3 道小题，每小题 12 分，共 36 分)

17. 已知全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $A=\{x|-1<x<3\}$，$B=\{x||x|>2\}$.

（1）求 $A\cap B$；$B\cup(\complement_U A)$.

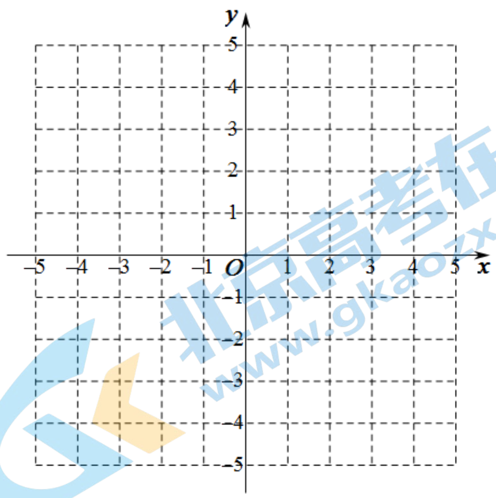
（2）已知集合 $C=\{x|a<x<a+2\}$，若 $C\subseteq B$，求实数 a 的取值范围.

详解：(1) $B=\{x|x<-2或x>2\}$，$A\cap B=\{x|2<x<3\}$，

$C_u A=\{x|x\le -1或x\ge 3\}$，$B\cup(\complement_U A)=\{x|x\le -1或x>2\}$

(2) $a\le -4或a\ge 2$

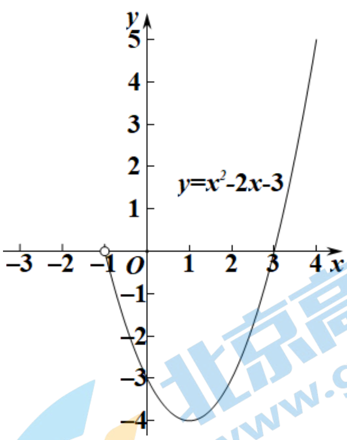
18. 已知函数 $y=x^2-2x-3$



（1）画出函数 $y=x^2-2x-3$，$x\in(-1,4]$ 的图象.

（2）讨论当 k 为何范围时，关于 x 的方程 $x^2-2x-3-k=0$ 在 $x\in(-1,4]$ 上的解集元素个数分别为 0 个，1 个，2 个.

【详解】(1) 函数 $y=x^2-2x-3$，$x\in(-1,4]$ 的图象为：



（2）依题意转化为函数 $y=x^2-2x-3$，$x\in(-1,4]$ 的图象与直线 $y=k$ 的交点个数进行求解，

根据（1）中的图象可得：

当 $k<-4$ 或 $k>5$ 时，方程 $x^2-2x-3-k=0$ 在 $x\in(-1,4]$ 上的解集为空集；

当 $k=-4$ 或 $0\le k\le 5$ 时，方程 $x^2-2x-3-k=0$ 在 $x\in(-1,4]$ 上的解集为单元素集；

当 $-4<k<0$ 时，方程 $x^2-2x-3-k=0$ 在 $x\in(-1,4]$ 上的解集为双元素集.

19. 已知函数 $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$.

(1) 判断 $f(x)$ 奇偶性并证明.

(2) 当 $x\in(1,+\infty)$ 时，判断 $f(x)$ 的单调性并证明.

(3) 在 (2) 的条件下，若实数 m 满足 $f(3m)>f(5-2m)$，求 m 的取值范围.

【详解】(1) 函数 $f(x)$ 是奇函数.

证：函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，

因为 $f(-x)=\dfrac{(-x)^2+1}{-x}=-\dfrac{x^2+1}{x}=-f(x)$，所以函数 $f(x)$ 是奇函数；

(2) 函数 $f(x)$ 是 $(1,+\infty)$ 上的单调增函数.

证：任取 x_1，$x_2\in(1,+\infty)$ 且 $x_1>x_2$，则

$$f(x_1)-f(x_2)=\frac{x_1^2+1}{x_1}-\frac{x_2^2+1}{x_2}=\frac{x_1^2x_2+x_2-x_1x_2^2-x_1}{x_1x_2}=\frac{x_1x_2(x_1-x_2)-(x_1-x_2)}{x_1x_2}=\frac{(x_1-x_2)(x_1x_2-1)}{x_1x_2},$$

因为 $x_1>x_2>1$，所以 $x_1-x_2>0$，$x_1x_2-1>0$，$x_1x_2>0$，

所以 $f(x_1)-f(x_2)>0$，即 $f(x_1)>f(x_2)$，

所以函数 $f(x)$ 是 $(1,+\infty)$ 上的单调增函数.

(3) 由 (2) 知函数 $f(x)$ 是 $(1,+\infty)$ 上的单调增函数，所以 $3m>5-2m>1$，解得 $1<m<2$，

所以 m 的取值范围为 $(1,2)$.

II 卷

四．填空题(共 2 道小题，每小题 5 分，共 10 分)

20. 若正数 x,y 满足 $\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{3x}=1$，则 $3x+4y$ 的最小值为_________. 9

21. 已知函数 $f(x)=\dfrac{x}{2-|x|}(x\in(-2,2))$，有下列结论：

① $\forall x\in(-2,2)$，等式 $f(-x)+f(x)=0$ 恒成立；

② $\forall m\in[0,+\infty)$，方程 $|f(x)|=m$ 有两个不等 实根；

③ $\forall x_1,x_2\in(-2,2)$，若 $x_1\neq x_2$，则一定有 $f(x_1)\neq f(x_2)$；

④存在无数多个实数 k，使得函数 $g(x)=f(x)-kx$ 在 $(-2,2)$ 上有三个零点

则其中正确结论 序号为________.

①③④

五解答题(共 3 道小题，共 40 分)

22. 二次函数 $f(x)$ 满足 $f(0)=1$，再从条件①和条件②两个条件中选择一个作为已知，求：

（1） $f(x)$ 的解析式；

（2）在区间 $[-1,1]$ 上，函数 $f(x)$ 的图像总在一次函数 $y=2x+m$ 图像的上方，试确定实数 m 的取值范围.

条件①： $f(x+1)-f(x)=2x$；

条件②：不等式 $f(x)<x+4$ 解集为 $(-1,3)$.

注：如果选择条件①和条件②分别解答，按第一个解答计分.

【详解】解（1）由 $f(0)=1$，可设 $f(x)=ax^2+bx+1(a\neq0)$.

选择□，则有 $f(x+1)-f(x)=a(x+1)^2+b(x+1)+1-(ax^2+bx+1)=2ax+a+b=2x$

由题意，得 $\begin{cases}2a=2,\\ a+b=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=1,\\ b=-1,\end{cases}$ 故 $f(x)=x^2-x+1$

选择□，则 $f(x)<x+4$ 可化为 $ax^2+(b-1)x-3<0$.

由题，方程 $ax^2+(b-1)x-3=0$ 的两实根分别为 -1 和 3

所以 $-\dfrac{b-1}{a}=-1+3=2$ 即 $2a+b=1$，及 $-\dfrac{3}{a}=-1\times3=-3$ 即 $a=1$，所以 $b=-1$.

故 $f(x)=x^2-x+1$

（2）由题意，得 $x^2-x+1>2x+m$，即 $x^2-3x+1>m$，对 $x\in[-1,1]$ 恒成立.

令 $g(x)=x^2-3x+1$，则问题可转化为 $g(x)_{\min}>m$

又因为 $g(x)$ 在 $[-1,1]$ 上递减，所以 $g(x)_{\min}=g(1)=-1$，故 $m<-1$

23．已知函数 $f(x)=x^2-2x$，

（Ⅰ）求证：对于任意的 $x\in[0,4]$，总有 $2x-4\leqslant f(x)\leqslant 2x$；

（Ⅱ）记函数 $y=|f(x)-2x-m|$ 在区间 $[0,4]$ 的最大值为 $G(m)$，求 $G(m)$ 的最小值．

解：（Ⅰ）对于任意的 $x\in[0,4]$，总有 $2x-4\leqslant f(x)\leqslant 2x$ 等价于

对于任意的 $x\in[0,4]$，总有 $-4\leqslant f(x)-2x\leqslant 0$；

令 $g(x)=x^2-2x-2x=x^2-4x=(x-2)^2-4$，则当 $x\in[0,4]$，$g(x)\in[-4,0]$

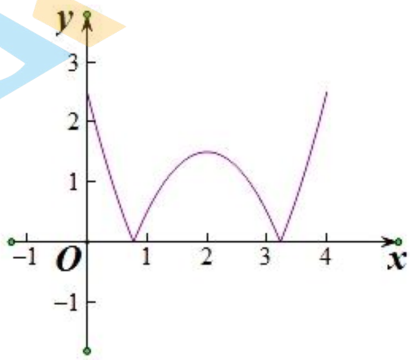
即对于任意的 $x\in[0,4]$，总有 $-4\leqslant f(x)-2x\leqslant 0$，得证；

（Ⅱ）$y=|f(x)-2x-m|=|(x-2)^2-4-m|$

当 $m\leqslant-4$ 时，结合（Ⅱ），因为对于任意的 $x\in[0,4]$，总有 $-4\leqslant f(x)-2x\leqslant 0$，

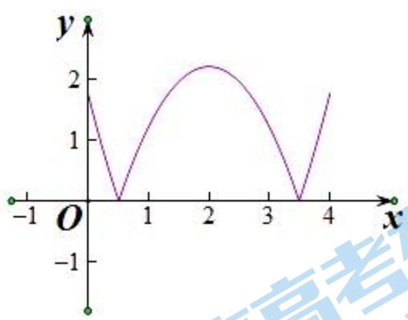
则此时 $(x-2)^2-4-m\geqslant 0$，即有 $y=(x-2)^2-4-m$，故当 $x=0$ 或 4 时，y 取最大值，即 $G(m)=-m$；

当 $-4<m<-2$ 时，如图，

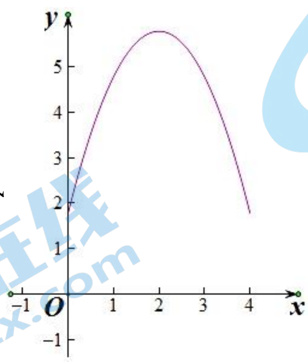


由图，可得此时在 $x=0$ 或 4 时，y 取最大值，即 $G(m)=-m$；

当 $m\geqslant-2$ 时，如图，



或



，

由图，可得此时当 $x=2$ 时 y 取最大值，即 $G(m)=|-4-m|$，

综上 $G(m)=\begin{cases}-m, & m<-2\\ |-4-m|, & m\geqslant-2\end{cases}$，

当 $m<-2$ 时，$G(m)>2$，

当 $m \geqslant -2$ 时，$G(m) \geqslant 2$,

故当 $m=-2$ 时，$G(m)$ 的最小值为 2.

24. 如果 $f(x)$ 是定义在 D 上的函数，且对任意的 $x\in \mathbf{D}$，均有 $f(-x) \neq -f(x)$，则称该函数是“X-函数”.

(Ⅰ) 分别判断下列函数：① $y=\dfrac{1}{1-x}$；② $y=x+1$； ③ $y=x^2+2x-3$ 是否为“X-函数”？

(直接写出结论)

(Ⅱ) 若函数 $f(x)=x+\dfrac{1}{x^2}+a$ 是“X-函数”，求实数 a 的取值范围；

(Ⅲ) 已知 $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & x\in A \\ x, & x\in B \end{cases}$ 是“X-函数”，且在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，

求所有可能的集合 **A** 与 **B**

. 解:（Ⅰ）①、②是“X - 函数”，③不是“X - 函数”.

（Ⅱ）由题意，对任意的 $x\in\mathbf{D}$，$f(-x)\neq -f(x)$，即 $f(-x)+f(x)\neq 0$.

$-x+\dfrac{1}{x^2}+a+x+\dfrac{1}{x^2}+a\neq 0$ 即 $a\neq -\dfrac{1}{x^2}$，则 $a\geq 0$

（Ⅲ）（1）对任意的 $x\neq 0$

（a）若 $x\in A$ 且 $-x\in A$，则 $-x\neq x$，$f(-x)=f(x)$，

这与 $y=f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增矛盾，（舍），

（b）若 $x\in B$ 且 $-x\in B$，则 $f(-x)=-x=-f(x)$，

这与 $y=f(x)$ 是“$X-$函数”矛盾，（舍）.

此时，由 $y=f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，故对任意的 $x\neq 0$，x 与 $-x$ 恰有一个属于 A，另一个属于 B.

（2） 假设存在 $x_0<0$，使得 $x_0\in A$，则由 $x_0<\dfrac{x_0}{2}$，故 $f(x_0)<f\left(\dfrac{x_0}{2}\right)$.

（a）若 $\dfrac{x_0}{2}\in A$，则 $f(\dfrac{x_0}{2})=\dfrac{x_0^2}{4}+1<x_0^2+1=f(x_0)$，矛盾，

（b）若 $\dfrac{x_0}{2}\in B$，则 $f(\dfrac{x_0}{2})=\dfrac{x_0}{2}<0<x_0^2+1=f(x_0)$，矛盾.

综上，对任意的 $x<0$，$x\notin A$，故 $x\in B$，即 $(-\infty,0)\subseteq B$，则 $(0,+\infty)\subseteq A$.

（3）假设 $0\in B$，则 $f(-0)=-f(0)=0$，矛盾. 故 $0\in A$

故 $A=[0,+\infty)$，$B=(-\infty,0)$. 经检验 $A=[0,+\infty)$，$B=(-\infty,0)$.符合题意