北京二中 2023—2024 学年度第一学段高二年级学段考试试卷

数学选择性必修 I

一、选择题（每小题 5 分，共 60 分）

1. 复数 z 满足方程 $z(\mathrm{i}-1)=4$，则 $|z|=$

A. 2　　B. $2\sqrt{2}$　　C. 4　　D. 8

2. 某大街在甲、乙、丙三处设有红绿灯，汽车在这三处因遇绿灯而通行的概率分别是 $\frac{1}{3}$，$\frac{1}{2}$，$\frac{2}{3}$，则汽车在这三处因遇红灯而停车一次的概率为

A. $\frac{1}{9}$　　B. $\frac{1}{6}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{7}{18}$

3. 已知一组数据 x_1，$x_2,\cdots x_n$ 的平均数为 2，方差为 5，则数据 $2x_1+1,\ 2x_2+1,\cdots 2x_n+1$ 的平均数 $\bar{x}$ 与方差 s^2 分别为

A. $\bar{x}=4,s^2=10$　　B. $\bar{x}=5,s^2=11$

C. $\bar{x}=5,s^2=20$　　D. $\bar{x}=5,s^2=21$

4. 已知 $\boldsymbol{a}=(1,-1,3)$，$\boldsymbol{b}=(-1,4,-2)$，$\mathbf{c}=(1,5,x)$，若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\mathbf{c}$ 三向量共面，则实数 $x=$

A. 3　　B. 2　　C. 15　　D. 5

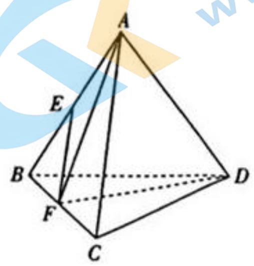
5. 如图，在正四面体 $ABCD$ 中，点 E，F 分别是 AB，BC 的中点，则下列结论错误的是

A. 异面直线 AB 与 CD 所成的角为 90°

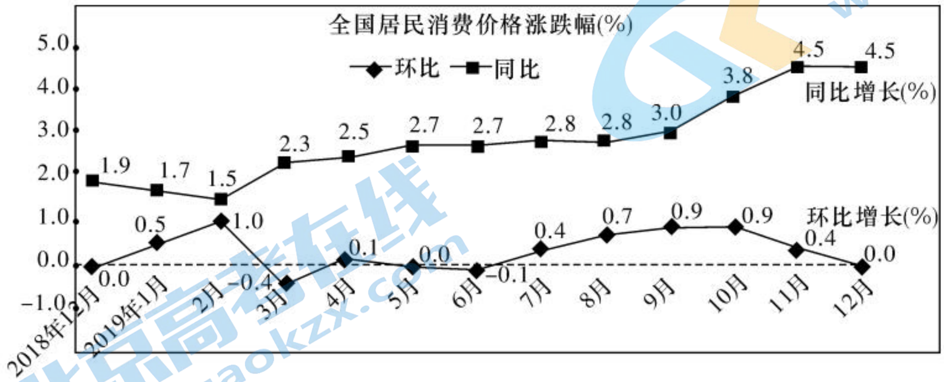
B. 直线 AB 与平面 BCD 成的角为 60°

C. 直线 EF // 平面 ACD

D. 平面 $AFD\perp$ 平面 BCD



6. 如下图所示的是国家统计局于 2020 年 1 月 9 日发布的 2018 年 12 月到 2019 年 12 月全国居民消费价格的涨跌幅情况折线图(注：同比是指本期与同期作对比；环比是指本期与上期作对比．如：2019 年 2 月与 2018 年 2 月相比较称同比，2019 年 2 月与 2019 年 1 月相比较称环比)．根据该折线图，下列结论错误的是



A. 2019 年 12 月份，全国居民消费价格环比持平

B. 2018 年 12 月至 2019 年 12 月全国居民消费价格环比均上涨

C. 2018 年 12 月至 2019 年 12 月全国居民消费价格同比均上涨

D. 2018 年 11 月的全国居民消费价格高于 2017 年 12 月的全国居民消费价格

7. 已知向量 $\overrightarrow{OA}=(3,-4),\overrightarrow{OB}=(6,-3),\overrightarrow{OC}=(2m,m+1)$, 若 $\overrightarrow{AB}//\overrightarrow{OC}$，则实数 m 的值为

A. $\dfrac{1}{5}$　　　B. $-\dfrac{3}{5}$　　　C. -3　　　D. $-\dfrac{1}{7}$

8. 如图，设每个电子元件能正常工作的概率为 p，则电路能正常工作的概率为

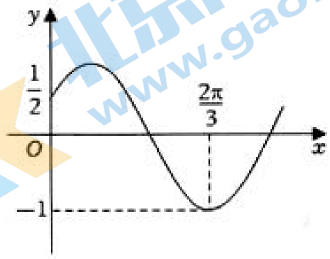
A. $p+p^2$

B. $p+p^2-p^3$

C. p^3

D. p^2+p^3

9. 已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)\left(\omega>0,0<\varphi<\dfrac{\pi}{2}\right)$ 的部分图象如图所示，则下列说法不正确的是



A. $f(x)$ 的图象关于 $x=\dfrac{\pi}{6}$ 对称

B. $f(x)$ 的图象向左平移 $\dfrac{\pi}{3}$ 个单位后得到 $y=\cos 2x$ 的图象

C. $f(x)$ 在区间 $\left[-\pi,-\dfrac{5\pi}{6}\right]$ 上单调递增

D. $f\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)$ 为偶函数

10. 在《九章算术》中，将四个面都是直角三角形的四面体称为鳖臑，在鳖臑 $A-BCD$ 中，$AB\perp$ 平面 BCD，$BC\perp CD$，且 $AB=BC=CD$，M 为 AD 的中点，则异面直线 BM 与 CD 夹角的余弦值为

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　B. $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$　　C. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

11. 在 ΔABC 中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，则“$a\leqslant\dfrac{1}{2}(b+c)$”是“$A$ 为锐角”的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

12. 已知对任意两个非零的平面向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$，定义 $\boldsymbol{\alpha}※\boldsymbol{\beta}=\dfrac{\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}}{\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\beta}}$. 若平面向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足

$|\boldsymbol{a}|\geq|\boldsymbol{b}|>0$，$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$ 的夹角 $\theta\in(0,\dfrac{\pi}{4})$，且 $\boldsymbol{a}※\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{b}※\boldsymbol{a}$ 都在集合 $\{\dfrac{n}{2}|n\in Z\}$ 中，则 $\boldsymbol{a}※\boldsymbol{b}=$

A. $\dfrac{1}{2}$　　B. 1　　C. $\dfrac{3}{2}$　　D. $\dfrac{5}{2}$

二．填空题（本大题共 6 小题，共 30 分）

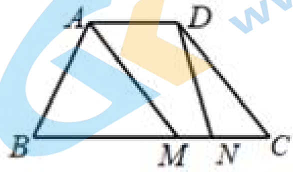
13. 在一次校园歌手大赛中，6 位评委对某选手的评分分别为 92，93，88，99，89，95.则这组数据的 75% 分位数是__________.

14. 盒中装有形状、大小完全相同的 5 个球，其中红色球 3 个，黄色球 2 个.若从中随机取出 2 个球，则所取出的 2 个球颜色不同的概率等于__________.

15. 已知平行四边形 $OABC$ 的三个顶点 O，A，C 对应的复数为 $0,3+2\mathrm{i},-2+4\mathrm{i}$，则点 B 所对应的复数为__________.

16. 若 $\cos(\dfrac{\pi}{4}-\theta)=\dfrac{1}{2}$，则 $\sin 2\theta=$__________.

17. 如图，在四边形 $ABCD$ 中，$\angle B=60^{\circ}$，$AB=2$，$BC=6$，且$\overrightarrow{AD}=\lambda\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}=-2$，则实数 λ 的值为__________，若 M，N 是线段 BC 上的动点，且$|\overrightarrow{MN}|=1$，则 $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{DN}$ 的最小值为__________.



18. 如图，在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点P在线段 AD_1 上运动，给出以下命题：

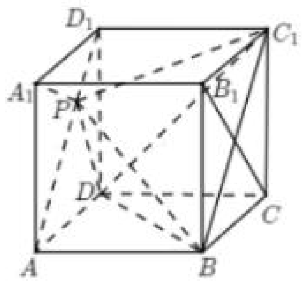
①异面直线 C_1P 与 B_1C 所成的角不为定值；

②平面 $A_1CP\perp$ 平面 DBC_1；

③二面角 $P-BC_1-D$ 的大小为定值；

④三棱锥 $D-BPC_1$ 的体积为定值，

其中真命题的序号为__________.



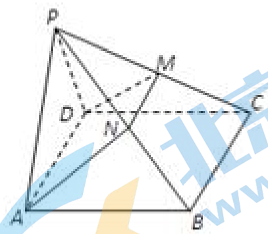
二、解答题（本大题共 5 小题，共 60 分）

19.（本小题 12 分）

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为平行四边形，点 N 是 PB 中点，过 A、N、D 三点的平面交 PC 于点 M．求证：

(1) $PD//$ 平面 ANC；

(2) 点 M 是 PC 中点．



20.（本小题 12 分）

在 ΔABC 中，$b\sin 2A=\sqrt{3}a\sin B$.

(1) 求 $\angle A$；

(2) 若 ΔABC 的面积为 $3\sqrt{3}$，再从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择一个作为已知，使 ΔABC 存在且唯一确定，求 a 的值.

条件①：$\sin C=\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$；条件②：$\dfrac{b}{c}=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$；条件③：$\cos C=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

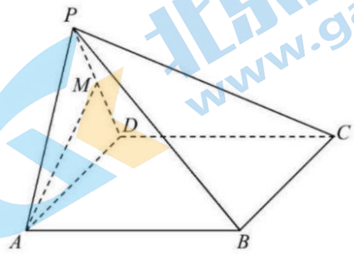
注：如果选择的条件不符合要求，第 (2) 问得 0 分；如果选择多个符合要求的条件分别解答，按第一个解答计分.

21.（本小题 12 分）

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为正方形，侧面 PAD 是正三角形，M 是侧棱 PD 的中点，且 $AM\perp$ 平面 PCD.

(1) 求证：平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$;

(2) 求 AM 与平面 PBC 所成角的正弦值.



22. （本小题 12 分）

苹果是人们日常生活中常见的营养型水果. 某地水果批发市场销售来自 5 个不同产地的富士苹果，各产地的包装规格相同，它们的批发价格 (元/箱) 和市场份额如下：

产地	A	B	C	D	E
批发价格	150	160	140	155	170
市场份额	15%	10%	25%	20%	30%

市场份额亦称“市场占有率”，指某一产品的销售量在市场同类产品中所占比重.

(1) 从该地批发市场销售的富士苹果中随机抽取一箱，求该箱苹果价格低于 160 元的概率；

(2) 按市场份额进行分层抽样，随机抽取 20 箱富士苹果进行检验，

①从产地 A，B 共抽取 n 箱，求 n 的值；

②从这 n 箱苹果中随机抽取两箱进行等级检验，求两箱产地不同的概率；

(3) 由于受种植规模和苹果品质的影响，预计明年产地 A 的市场份额将增加 5%，产地 C 的市场份额将减少 5%，其它产地的市场份额不变，苹果销售价格也不变（不考虑其它因素）设今年苹果的平均批发价为每箱 M_1 元，明年苹果的平均批发价为每箱 M_2 元，试比较 M_1，M_2 的大小. （只需写出结论）

23. （本小题 12 分）

对于一个非空集合 A，如果集合 D 满足如下四个条件：

① $D \subseteq \{(a,b) \mid a \in A, b \in A\}$；

② $\forall a \in A$，$(a,a) \in D$；

③ $\forall a$，$b \in A$，若 $(a,b) \in D$ 且 $(b,a) \in D$，则 $a = b$；

④ $\forall a$，b，$c \in A$，若 $(a,b) \in D$ 且 $(b,c) \in D$，则 $(a,c) \in D$，

则称集合 D 为 A 的一个偏序关系.

(1) 设 $A = \{1,2,3\}$，判断集合 $D = \{(1,1),(1,2),(2,2),(2,3),(3,3)\}$ 是不是集合 A 的偏序关系，请你写出一个含有 4 个元素且是集合 A 的偏序关系的集合 D；

(2) 证明：$R_{\leqslant} = \{(a,b) \mid a \in R, b \in R, a \leqslant b\}$ 是实数集 R 的一个偏序关系；

(3) 设 E 为集合 A 的一个偏序关系，a，$b \in A$. 若存在 $c \in A$，使得 $(c,a) \in E$，$(c,b) \in E$，且 $\forall d \in A$，若 $(d,a) \in E$，$(d,b) \in E$，一定有 $(d,c) \in E$，则称 c 是 a 和 b 的交，记为 $c = a \wedge b$. 证明：对 A 中的两个给定元素 a，b，若 $a \wedge b$ 存在，则一定唯一.

高二数学 学段-1 答案

一、选择题

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
C	D	A	C	B	B	C	C	B	C	A	B

二、填空题

13. 5, 12　　14. -4　　15. (-2, −1)

16. $2\sqrt{5}$; $\sqrt{6}$　　17. 9　　18. ①④

三、解答题

19. 已知直线 $l_1: 2x+y+2=0$ 和 $l_2: x-y+4=0$ 的交点为 A.

求过点 A 与直线 $3x+4y-7=0$ 垂直的直线的方程.

解：设所求直线方程为 $y-y_0=\frac{4}{3}(x-x_0)$.

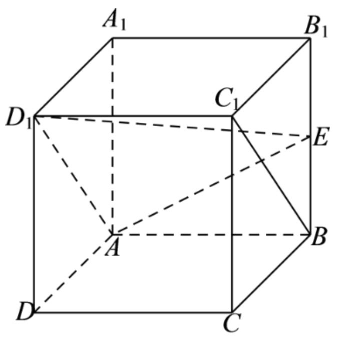
$\begin{cases}2x+y+2=0\\ x-y+4=0\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=-2\\ y=2\end{cases}$ $\therefore$ 交点为 $(-2,2)$

$\therefore$ 所求直线方程为：$4x-3y+14=0$

20. 如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E 为 BB_1 的中点.

（Ⅰ）求证：BC_1 // 平面 AD_1E；

（Ⅱ）求异面直线 BC_1 与 AE 所成角的余弦值.



【详解】（Ⅰ）如下图所示：

在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB//A_1B_1$ 且 $AB=A_1B_1$，

$A_1B_1//C_1D_1$ 且 $A_1B_1=C_1D_1$，

$\therefore AB//C_1D_1$ 且 $AB=C_1D_1$，

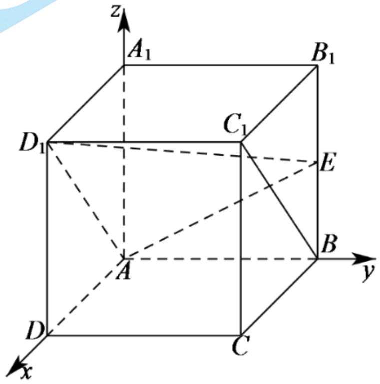
所以，四边形 ABC_1D_1 为平行四边形，则 $BC_1 // AD_1$，

$\because BC_1 \not\subset$ 平面 AD_1E， $AD_1 \subset$ 平面 AD_1E，

$\therefore BC_1 //$ 平面 AD_1E；

（Ⅱ）以点 A 为坐标原点， AD、AB、AA_1 所在直线分别为 x、y、z 轴建立

如下图所示的空间直角坐标系 $A-xyz$，



设正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2，

则 $A(0,0,0)$、$E(0,2,1)$、$B(0,2,0)$、$C_1(2,2,2)$

$\overrightarrow{BC_1}=(2,0,2)$， $\overrightarrow{AE}=(0,2,1)$，

设异面直线 BC_1 与 AE 所成角为 θ

$$\cos\theta=\frac{\left|\overrightarrow{BC_1}\cdot\overrightarrow{AE}\right|}{\left|\overrightarrow{BC_1}\right|\left|\overrightarrow{AE}\right|}=\frac{2}{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{10}}{10}$$

$\therefore$ 异面直线 BC_1 与 AE 所成角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{10}}{10}$.

21．已知函数 $f(x)=\cos^2 x-\sin^2 x+\dfrac{1}{2}$.

（Ⅰ）求 $f(x)$ 的单调递增区间与最小正周期；

（Ⅱ）设△ABC 为锐角三角形，角 A 所对边 $a=\sqrt{19}$，角 B 所对边 $b=5$，若 $f(A)=0$，求△ABC 的面积

解：(1) $f(x)=\cos 2x+\dfrac{1}{2}$， 单调递增区间为 $\left[k\pi-\dfrac{\pi}{2},k\pi\right],k\in Z$，$T=\pi$.

(2) $\cos 2A=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow A=\dfrac{\pi}{3}$， $\therefore \cos A=\dfrac{25+c^2-19}{2\cdot 5\cdot c}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow c=2$ 或 $c=3$，

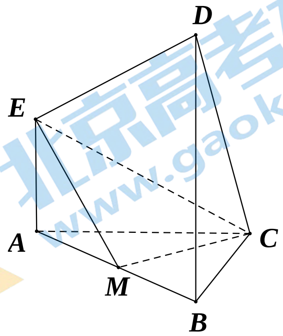
根据锐角三角形， $\cos B>0$， $\therefore c=3$， $S=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{15}{4}\sqrt{3}$

22．在如图所示的多面体中，$EA\perp$平面ABC，$DB\perp$平面ABC，$AC\perp BC$，且$AC=BC=BD=2AE=2$，M是AB的中点．

（Ⅰ）求证：$CM\perp EM$；

（Ⅱ）求平面EMC与平面BCD所成的锐二面角的余弦值；

（Ⅲ）在棱DC上是否存在一点N，使得直线MN与平面EMC所成的角为60°．若存在，指出点N的位置；若不存在，请说明理由．



(Ⅰ) 证明：$\because AC=BC, M$是AB的中点$\therefore CM\perp AB$ ．

又$\because EA\perp$平面ABC，$CM\perp EA$ ．

$\because EA\cap AB=A \therefore CM\perp$平面$AEM$

$\therefore CM\perp EM$

（Ⅱ）以M为原点，分别以MB，MC为 x，y 轴，建立坐标系$M-xyz$，

则$M(0,0,0), C(0,\sqrt{2},0), B(\sqrt{2},0,0), D(\sqrt{2},0,2), E(-\sqrt{2},0,1)$

$\overrightarrow{ME}=(-\sqrt{2}.0.1), \overrightarrow{MC}=(0,\sqrt{2},0), \overrightarrow{BD}=(0,0,2), \overrightarrow{BC}=(-\sqrt{2},\sqrt{2},0)$

设平面EMC的一个法向量$\vec{m}=(x_1,y_1,z_1)$，则$\begin{cases}-\sqrt{2}x_1+z_1=0\\ \sqrt{2}y_1=0\end{cases}$

取$x_1=1, y_1=0, z_1=\sqrt{2}$所以$\vec{m}=(1,0,\sqrt{2})$

设平面DBC的一个法向量$\vec{n}=(x_2,y_2,z_2)$，则$\begin{cases}-\sqrt{2}x_2+\sqrt{2}y_2=0\\ 2z_2=0\end{cases}$

取$x_2=1, y_2=1, z_2=0$，所以$\vec{n}=(1,1.0)$　　$\cos\langle\vec{m},\vec{n}\rangle=\dfrac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}||\vec{n}|}=\dfrac{1}{\sqrt{2}\times\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$

所以平面EMC与平面BCD所成的锐二面角的余弦值$\dfrac{\sqrt{6}}{6}$.

（Ⅲ）设$N(x,y,z)$且$\overrightarrow{DN}=\lambda\overrightarrow{DC}$，$0\le\lambda\le1$

$\therefore (x-\sqrt{2},y,z-2)=\lambda(-\sqrt{2},\sqrt{2},-2)$,

$x=\sqrt{2}-\sqrt{2}\lambda, y=\sqrt{2}\lambda, z=2-2\lambda$

$\overrightarrow{MN}=(\sqrt{2}-\sqrt{2}\lambda,\sqrt{2}\lambda,2-2\lambda)$

若直线 MN 与平面 EMC 所成的角为 60^0，则

$$|\cos\langle\overrightarrow{MN},\vec{m}\rangle|=\frac{|\sqrt{2}-\sqrt{2}\lambda+\sqrt{2}(2-2\lambda)|}{\sqrt{3}\sqrt{2(1-\lambda)^2+2\lambda^2+4(1-\lambda)^2}}=\sin 60^0=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

解得：$\lambda=\frac{1}{2}$，所以符合条件的点 N 存在，为棱 DC 的中点.

23. 已知集合 $S=\{1,2,\cdots,n\}$（$n\geqslant 3$ 且 $n\in\mathbf{N}^*$），$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$，且 $A\subseteq S$. 若对任意 $a_i\in A,a_j\in A$（$1\leqslant i\leqslant j\leqslant m$），当 $a_i+a_j\leqslant n$ 时，存在 $a_k\in A$（$1\leqslant k\leqslant m$），使得 $a_i+a_j=a_k$，则称 A 是 S 的 m 元完美子集.

（Ⅰ）判断下列集合是否是 $S=\{1,2,3,4,5\}$ 的 3 元完美子集，并说明理由；

① $A_1=\{1,2,4\}$；　　② $A_2=\{2,4,5\}$.

（Ⅱ）若 $A=\{a_1,a_2,a_3\}$ 是 $S=\{1,2,\cdots,7\}$ 的 3 元完美子集，求 $a_1+a_2+a_3$ 的最小值；

（Ⅲ）若 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$ 是 $S=\{1,2,\cdots,n\}$（$n\geqslant 3$ 且 $n\in\mathbf{N}^*$）的 m 元完美子集，

求证：$a_1+a_2+\cdots+a_m\geqslant\frac{m(n+1)}{2}$，并指出等号成立的条件.

解：（Ⅰ）①因为 $1+2=3\leqslant 5$，又 $3\notin A_1$，所以 A_1 不是 S 的 3 元完美子集.

②因为 $2+2=4\leqslant 5$，且 $4\in A_2$，而 $5+5>4+5>4+4>2+5>2+4>5$，

所以 A_2 是 S 的 3 元完美子集.

（Ⅱ）不妨设 $a_1<a_2<a_3$.

若 $a_1=1$，则 $a_1+a_1=2\in A$，$1+2=3\in A$，$1+3=4\in A$，与 3 元完美子集矛盾；

若 $a_1=2$，则 $a_1+a_1=4\in A$，$2+4=6\in A$，而 $2+6>7$，符合题意，

此时 $a_1+a_2+a_3=12$.

若 $a_1\geqslant 3$，则 $a_1+a_1\geqslant 6$，于是 $a_2\geqslant 4$，$a_3\geqslant 6$，所以 $a_1+a_2+a_3\geqslant 13$.

综上，$a_1+a_2+a_3$ 的最小值是 12.

（Ⅲ）证明：不妨设 $a_1 < a_2 < \cdots < a_m$.

对任意 $1 \leqslant i \leqslant m$，都有 $a_i + a_{m+1-i} \geqslant n+1$，

否则，存在某个 $i(1 \leqslant i \leqslant m)$，使得 $a_i + a_{m+1-i} \leqslant n$.

由 $a_1 < a_2 < \cdots < a_m$，得 $a_i < a_i + a_1 < a_i + a_2 < \cdots < a_i + a_{m+1-i} \leqslant n$.

所以 $a_i + a_1, a_i + a_2, \cdots, a_i + a_{m+1-i}$ 是 A 中 $m+1-i$ 个不同的元素，且均属于

集合 $\{a_{i+1}, a_{i+2}, \cdots, a_m\}$，

该集合恰有 $m-i$ 个不同的元素，显然矛盾.

所以对任意 $1 \leqslant i \leqslant m$，都有 $a_i + a_{m+1-i} \geqslant n+1$.

于是

$$2(a_1 + a_2 + \cdots + a_{m-1} + a_m) = (a_1 + a_m) + (a_2 + a_{m-1}) + \cdots + (a_{m-1} + a_2) + (a_m + a_1) \geqslant m(n+1) .$$

即 $a_1 + a_2 + \cdots + a_m \geqslant \dfrac{m(n+1)}{2}$.

等号成立的条件是 $a_1 = \dfrac{n+1}{m+1} \in \mathbf{N}^*$ 且 $a_i = \dfrac{(n+1)i}{m+1} (2 \leqslant i \leqslant m)$.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 50W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数千场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。

推荐大家关注北京高考在线网站官方微信公众号：京考一点通，我们会持续为大家整理分享最新的高中升学资讯、政策解读、热门试题答案、招生通知等内容！