成都市2019级高中毕业班摸底测试

数　学(文科)

本试卷分选择题和非选择题两部分。第Ⅰ卷(选择题)1至2页,第Ⅱ卷(非选择题)3至4页,共4页,满分150分,考试时间120分钟。

注意事项:

1. 答题前,务必将自己的姓名、考籍号填写在答题卡规定的位置上。
2. 答选择题时,必须使用2B铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑,如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其它答案标号。
3. 答非选择题时,必须使用0.5毫米黑色签字笔,将答案书写在答题卡规定的位置上。
4. 所有题目必须在答题卡上作答,在试题卷上答题无效。
5. 考试结束后,只将答题卡交回。

第Ⅰ卷(选择题,共60分)

一、选择题:本大题共12小题,每小题5分,共60分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 设全集$U=\{x\in\mathbf{N}^*\mid x<9\}$,集合$A=\{3,4,5,6\}$,则$\complement_U A=$

(A) $\{1,2,3,8\}$　　(B) $\{1,2,7,8\}$　　(C) $\{0,1,2,7\}$　　(D) $\{0,1,2,7,8\}$

2. 已知函数$f(x)=\begin{cases}\log_2(2-x), & x<1,\\ e^x, & x\geq 1.\end{cases}$ 则$f(-2)+f(\ln 4)=$

(A) 2　　(B) 4　　(C) 6　　(D) 8

3. 某校为增强学生垃圾分类的意识,举行了一场垃圾分类知识问答测试,满分为100分. 如图所示的茎叶图为某班20名同学的测试成绩(单位:分). 则这组数据的极差和众数分别是

茎	叶
6	8
7	2　3　3　6
8	1　2　2　8　8　8　9
9	0　1　1　3　5　7　7　8

(A) 20,88　　(B) 30,88

(C) 20,82　　(D) 30,91

4. 若实数x,y满足约束条件$\begin{cases}2x-y\geq 0,\\ x+y-4\leq 0,\\ y\geq 0.\end{cases}$ 则$z=x-2y$的最大值为

(A) -4　　(B) 0　　(C) 2　　(D) 4

5. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的一个焦点到其中一条渐近线的距离为 $2a$，则该双曲线的渐近线方程为

(A) $y=\pm 2x$　　(B) $y=\pm\frac{1}{2}x$

(C) $y=\pm x$　　(D) $y=\pm\sqrt{2}x$

6. 记函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$. 若 $f(x)=e^x\sin x$，则 $f'(0)=$

(A) 1　　(B) 0　　(C) -1　　(D) 2

7. 已知 M 为圆 $(x-1)^2+y^2=2$ 上一动点，则点 M 到直线 $x-y+3=0$ 的距离的最大值是

(A) $\sqrt{2}$　　(B) $2\sqrt{2}$

(C) $3\sqrt{2}$　　(D) $4\sqrt{2}$

8. 已知直线 $l_1:x+y+m=0$，$l_2:x+m^2y=0$. 则"$l_1 /\!/ l_2$"是"$m=1$"的

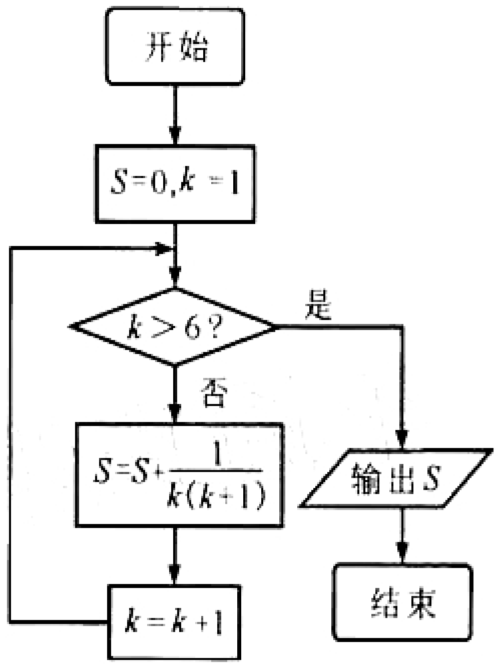
(A)充分不必要条件　　(B)必要不充分条件

(C)充要条件　　(D)既不充分也不必要条件

9. 执行如图所示的程序框图，则输出的 S 的值是

(A) $\frac{4}{5}$　　(B) $\frac{5}{6}$

(C) $\frac{6}{7}$　　(D) $\frac{7}{8}$



10. 在三棱锥 $P-ABC$ 中，已知 $PA\perp$ 平面 ABC，$PA=AB=BC=2$，$\angle ABC=\frac{\pi}{2}$. 若该三棱锥的顶点都在同一个球面上，则该球的表面积为

(A) 4π　　(B) 10π　　(C) 12π　　(D) 48π

11. 已知函数 $f(x)=\frac{a}{x+1}+\ln x$. 若对任意 $x_1,x_2\in(0,2]$，且 $x_1\neq x_2$，都有 $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}>-1$，则实数 a 的取值范围是

(A) $(-\infty,\frac{27}{4}]$　　(B) $(-\infty,2]$　　(C) $(-\infty,\frac{27}{2}]$　　(D) $(-\infty,8]$

12. 设抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 F，准线为 l，过抛物线上一点 A 作 l 的垂线，垂足为 B，设 $C(2p,0)$，AF 与 BC 相交于点 D. 若 $|CF|=|AF|$，且 $\triangle ACD$ 的面积为 $2\sqrt{2}$，则点 F 到准线 l 的距离是

(A) $\sqrt{2}$　　(B) $\sqrt{3}$　　(C) $\frac{4\sqrt{2}}{3}$　　(D) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

第Ⅱ卷(非选择题,共90分)

二、填空题:本大题共4小题,每小题5分,共20分.把答案填在答题卡上.

13. 设复数 $z=\frac{1+2i}{i}$ (i为虚数单位),则 $|z|=$________.

14. 一个路口的红绿灯,红灯的时间为30秒,黄灯的时间为5秒,绿灯的时间为40秒.当你到达该路口时,看见不是红灯的概率是________.

15. 已知关于 x,y 的一组数据:

x	1	m	3	4	5
y	0.5	0.6	n	1.4	1.5

根据表中这五组数据得到的线性回归直线方程为 $\hat{y}=0.28x+0.16$,则 $n-0.28m$ 的值为________.

16. 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数,当 $x>0$ 时,$f(x)=\begin{cases}2^{|x-1|}-1,0<x\leqslant 2,\\ \frac{1}{2}f(x-2),x>2.\end{cases}$ 有下列结论:

①函数 $f(x)$ 在 $(-6,-5)$ 上单调递增;

②函数 $f(x)$ 的图象与直线 $y=x$ 有且仅有2个不同的交点;

③若关于 x 的方程 $[f(x)]^2-(a+1)f(x)+a=0(a\in\mathbf{R})$ 恰有4个不相等的实数根,则这4个实数根之和为8;

④记函数 $f(x)$ 在 $[2k-1,2k](k\in\mathbf{N}^*)$ 上的最大值为 a_k,则数列 $\{a_n\}$ 的前7项和为 $\frac{127}{64}$.

其中所有正确结论的编号是________.

三、解答题:本大题共6小题,共70分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分12分)

已知函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{a}{2}x^2-2x+\frac{5}{6}$,其中 $a\in\mathbf{R}$.若函数 $f(x)$ 的图象在点 $(1,f(1))$ 处的切线与直线 $2x+y-1=0$ 平行.

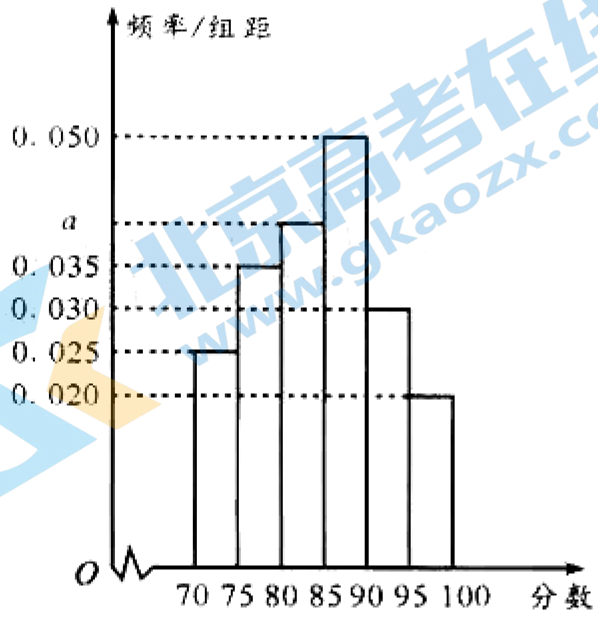
(Ⅰ)求 a 的值;

(Ⅱ)求函数 $f(x)$ 的极值.

18. (本小题满分12分)

"2021年全国城市节约用水宣传周"已于5月9日至15日举行.成都市围绕"贯彻新发展理念,建设节水型城市"这一主题,开展了形式多样,内容丰富的活动,进一步增强全民保护水资源,防治水污染,节约用水的意识.为了解活动开展成效,某街道办事处工作人员赴一小区调

查住户的节约用水情况，随机抽取了 300 名业主进行节约用水调查评分，将得到的分数分成 6 组：$[70,75)$，$[75,80)$，$[80,85)$，$[85,90)$，$[90,95)$，$[95,100]$，得到如图所示的频率分布直方图.

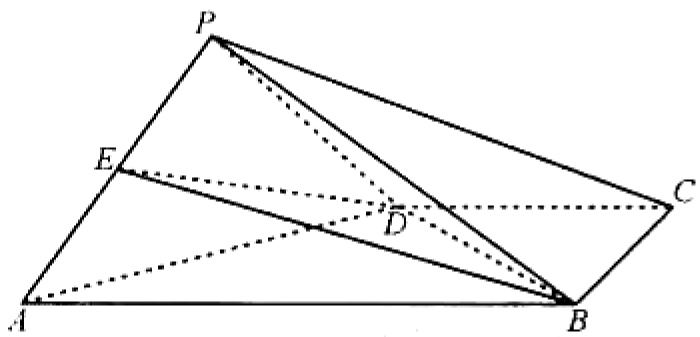


（Ⅰ）求 a 的值，并估计这 300 名业主评分的中位数；

（Ⅱ）若先用分层抽样的方法从评分在 $[90,95)$ 和 $[95,100]$ 的业主中抽取 5 人，然后再从抽出的这 5 位业主中任意选取 2 人作进一步访谈，求这 2 人中至少有 1 人的评分在 $[95,100]$ 的概率.

19.（本小题满分 12 分）

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$DC \parallel AB$，$BC \perp AB$，E 为棱 AP 的中点，$AB=4$，$PA=PD=DC=BC=2$.



（Ⅰ）求证：$DE \parallel$ 平面 PBC；

（Ⅱ）若平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$，试求三棱锥 $P-BDE$ 的体积.

20.（本小题满分 12 分）

已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左，右焦点分别为 F_1,F_2，点 P 在椭圆 C 上，$|PF_1|=2$，$\angle F_1PF_2=\dfrac{\pi}{3}$，且椭圆 C 的离心率为 $\dfrac{1}{2}$.

（Ⅰ）求椭圆 C 的方程；

（Ⅱ）设过点 $M(3,0)$ 的直线 l 与椭圆 C 相交于 A,B 两点，求 $\triangle ABF_2$ 面积的最大值.

21.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=2ax-\ln x$，其中 $a\in\mathbf{R}$.

（Ⅰ）讨论函数 $f(x)$ 的单调性；

（Ⅱ）记函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$. 当 $a>0$ 时，若 $x_1,x_2(0<x_1<x_2)$ 满足 $f(x_1)=f(x_2)$，证明：$f'(x_1)+f'(x_2)<0$.

22.（本小题满分 10 分）选修 4—4：坐标系与参数方程

在直角坐标系 xOy 中，曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=\cos\alpha,\\ y=\sin\alpha\end{cases}$（$\alpha$ 为参数）. 以 O 为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，直线 l 的极坐标方程为 $\sqrt{3}\rho\cos\theta-\rho\sin\theta+\sqrt{3}=0$.

（Ⅰ）求曲线 C 的普通方程和直线 l 的直角坐标方程；

（Ⅱ）在曲线 C 上任取一点 (x,y)，保持纵坐标 y 不变，将横坐标 x 伸长为原来的 $\sqrt{3}$ 倍得到曲线 C_1. 设直线 l 与曲线 C_1 相交于 M,N 两点，点 $P(-1,0)$，求 $|PM|+|PN|$ 的值.

成都市2019级高中毕业班摸底测试

数学(文科)参考答案及评分意见

第Ⅰ卷(选择题,共60分)

一、选择题:(每小题5分,共60分)

1. B; 2. C; 3. B; 4. D; 5. A; 6. A; 7. C; 8. B; 9. C; 10. C; 11. A; 12. D.

第Ⅱ卷(非选择题,共90分)

二、填空题:(每小题5分,共20分)

13. $\sqrt{5}$; 14. $\frac{3}{5}$; 15. 0.44; 16. ①④.

三、解答题:(共70分)

17. 解:(Ⅰ)由已知,可得 $f'(x)=x^2+ax-2$. ……1分

∵函数 $f(x)$ 的图象在点 $(1,f(1))$ 处的切线与直线 $2x+y-1=0$ 平行,

∴$f'(1)=a-1=-2$. ……3分

∴$a=-1$.

经验证,$a=-1$ 符合题意. ……4分

(Ⅱ)由(Ⅰ)得 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x+\frac{5}{6}$.

∴$f'(x)=x^2-x-2=(x+1)(x-2)$. ……5分

当 x 变化时,$f'(x)$ 与 $f(x)$ 的变化情况如下表:

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,2)$	2	$(2,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	单调递增↗	极大值2	单调递减↘	极小值$-\frac{5}{2}$	单调递增↗

……10分

∴当 $x=-1$ 时,$f(x)$ 取得极大值2;当 $x=2$ 时,$f(x)$ 取得极小值 $-\frac{5}{2}$. ……12分

18. 解:(Ⅰ)∵第三组的频率为 $1-(0.020+0.025+0.030+0.035+0.050)\times5=0.200$,

……2分

∴$a=\frac{0.200}{5}=0.040$. ……3分

又第一组的频率为 $0.025\times5=0.125$,第二组的频率为 $0.035\times5=0.175$,

第三组的频率为0.200.

∵前三组的频率之和为 $0.125+0.175+0.200=0.500$, ……4分

∴这300名业主评分的中位数为85. ……5分

(Ⅱ)由频率分布直方图,知评分在[90,95)的人数与评分在[95,100]的人数的比值为3∶2.

∴采用分层抽样法抽取5人,评分在[90,95)的有3人,评分在[95,100]有2人.

……7分

不妨设评分在[90,95)的 3 人分别为 A_1,A_2,A_3；评分在[95,100]的 2 人分别为 B_1,B_2.

则从 5 人中任选 2 人的所有可能情况有：

$\{A_1,A_2\},\{A_1,A_3\},\{A_1,B_1\},\{A_1,B_2\},\{A_2,A_3\},\{A_2,B_1\},\{A_2,B_2\},\{A_3,B_1\},$
$\{A_3,B_2\},\{B_1,B_2\}$.共 10 种. ……10 分

其中选取的 2 人中至少有 1 人的评分在[95,100]的情况有：

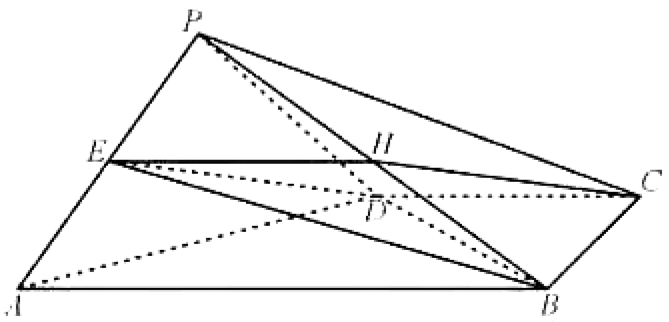
$\{A_1,B_1\},\{A_1,B_2\},\{A_2,B_1\},\{A_2,B_2\},\{A_3,B_1\},\{A_3,B_2\},\{B_1,B_2\}$.

共 7 种. ……11 分

故这 2 人中至少有 1 人的评分在[95,100]的概率为

$P=\dfrac{7}{10}$. ……12 分

19. 解：(Ⅰ)如图，取 PB 中点 H，连接 EH，HC.



在△PAB 中，∵E 为 AP 的中点，H 为 PB 的中点，

∴EH 为△PAB 的中位线.

∴$EH /\!/ AB$，$EH=\dfrac{1}{2}AB$. ……1 分

又 $DC /\!/ AB$，$DC=\dfrac{1}{2}AB$，

∴$EH /\!/ DC$ 且 $EH=DC$.

∴四边形 $CDEH$ 为平行四边形. ∴$DE /\!/ CH$. ……3 分

又 $DE\not\subset$平面 PBC，$CH\subset$平面 PBC， ……4 分

∴$DE /\!/$平面 PBC. ……5 分

(Ⅱ)∵$DC /\!/ AB$，$BC\perp AB$，∴$BC\perp DC$.

在 Rt△BCD 中，∵$DC=BC=2$，∴$BD=\sqrt{DC^2+BC^2}=2\sqrt{2}$.

在直角梯形 $ABCD$ 中，易得 $AD=2\sqrt{2}$.

在△ABD 中，∵$AD=2\sqrt{2}$，$AB=4$，∴$AD^2+BD^2=AB^2$.

∴$BD\perp AD$. ……7 分

∵平面 $PAD\perp$平面 $ABCD$，平面 $PAD\cap$平面 $ABCD=AD$，$BD\perp AD$，

$BD\subset$平面 $ABCD$，

∴$BD\perp$平面 PAD. ……9 分

在△PAD 中，∵$PA=PD=2$，$AD=2\sqrt{2}$，∴$PA^2+PD^2=AD^2$.

∴$PA\perp PD$.

∴$S_{\triangle PDE}=\dfrac{1}{2}\times1\times2=1$. ……10 分

∴$V_{P-BDE}=V_{B-PDE}=\dfrac{1}{3}S_{\triangle PDE}\cdot BD=\dfrac{1}{3}\times1\times2\sqrt{2}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$. ……12 分

20. 解：(Ⅰ)∵P 在椭圆 C 上，$|PF_1|=2$，∴$|PF_2|=2a-2$.

在△PF_1F_2 中，由余弦定理得 $4c^2=|PF_1|^2+|PF_2|^2-2|PF_1||PF_2|\cos\angle F_1PF_2$，

即 $4c^2=4+(2a-2)^2-4(2a-2)\cos\dfrac{\pi}{3}$.

化简，得 $c^2=a^2-3a+3$. …① ……2 分

又椭圆 C 的离心率 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{2}$，∴$a=2c$. …② ……3 分

由①②，解得 $c=1, a=2$. ……4分

$\therefore b^2=a^2-c^2=3$.

$\therefore$ 椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. ……5分

（Ⅱ）由题意，直线 l 的斜率存在且不为0. 设直线 l 的方程为 $x=my+3$.

由 $\begin{cases} x=my+3, \\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1 \end{cases}$ 消去 x，得 $(3m^2+4)y^2+18my+15=0$. ……6分

由 $\Delta=144m^2-240>0$，得 $m^2>\frac{5}{3}$. ……7分

设 $A(x_1,y_1), B(x_2,y_2)$. 则 $y_1+y_2=\frac{-18m}{3m^2+4}, y_1y_2=\frac{15}{3m^2+4}$.

$\therefore |AB|=\sqrt{1+m^2}\,|y_1-y_2|=\sqrt{1+m^2}\cdot\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}$

$=\frac{4\sqrt{1+m^2}\cdot\sqrt{9m^2-15}}{3m^2-4}$. ……8分

设点 F_2 到直线 l 的距离为 d，又 $F_2(1,0)$，则 $d=\frac{2}{\sqrt{m^2+1}}$.

$\therefore S_{\triangle ABF_2}=\frac{1}{2}|AB|\cdot d=\frac{4\sqrt{9m^2-15}}{3m^2+4}$. ……9分

令 $\sqrt{9m^2-15}=t\,(t>0)$，则 $m^2=\frac{t^2+15}{9}$.

$\therefore S_{\triangle ABF_2}=\frac{12t}{t^2+27}=\frac{12}{t+\frac{27}{t}}\leqslant\frac{2\sqrt{3}}{3}$. ……10分

当且仅当 $t=3\sqrt{3}$ 时等号成立. 此时 $m^2=\frac{14}{3}>\frac{5}{3}$. ……11分

$\therefore \triangle ABF_2$ 面积的最大值为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. ……12分

21. 解：（Ⅰ）函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，$f'(x)=\frac{2ax-1}{x}$. ……1分

①当 $a\leqslant 0$ 时，则当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f'(x)\leqslant 0$ 恒成立.

$\therefore f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，无单调递增区间； ……2分

②当 $a>0$ 时，则由 $f'(x)=0$ 得 $x=\frac{1}{2a}$.

$\therefore$ 当 $x\in(0,\frac{1}{2a})$ 时，$f'(x)<0$；当 $x\in(\frac{1}{2a},+\infty)$ 时，$f'(x)>0$.

$\therefore f(x)$ 在 $(0,\frac{1}{2a})$ 上单调递减，在 $(\frac{1}{2a},+\infty)$ 上单调递增. ……3分

综上所述，当 $a\leqslant 0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，无单调递增区间；

当 $a>0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,\frac{1}{2a})$ 上单调递减，在 $(\frac{1}{2a},+\infty)$ 上单调递增. ……4分

（Ⅱ）$f(x)=2ax-\ln x$，$f'(x)=2a-\frac{1}{x}\,(x>0)$.

$\because x_1, x_2\,(0<x_1<x_2)$ 满足 $f(x_1)=f(x_2)$，

$\therefore 2ax_1-\ln x_1=2ax_2-\ln x_2$，即$\dfrac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}=2a$. ……5 分

$\therefore f'(x_1)+f'(x_2)=2a-\dfrac{1}{x_1}+2a-\dfrac{1}{x_2}=4a-\dfrac{x_1+x_2}{x_1x_2}$.

欲证 $f'(x_1)+f'(x_2)<0$，即证$\dfrac{x_1+x_2}{x_1x_2}>4a$，

亦即$\dfrac{x_1+x_2}{x_1x_2}>\dfrac{2(\ln x_1-\ln x_2)}{x_1-x_2}$. ……7 分

即证 $2\ln\dfrac{x_1}{x_2}>\dfrac{x_1^2-x_2^2}{x_1x_2}=\dfrac{x_1}{x_2}-\dfrac{x_2}{x_1}$. ……8 分

$\because 0<x_1<x_2$，设$\dfrac{x_1}{x_2}=t(0<t<1)$，即证 $2\ln t+\dfrac{1}{t}-t>0$. ……9 分

设 $h(t)=2\ln t+\dfrac{1}{t}-t(0<t<1)$.

$\because h'(t)=\dfrac{2}{t}-\dfrac{1}{t^2}-1=\dfrac{-(t-1)^2}{t^2}<0$ 在 $t\in(0,1)$上恒成立， ……10 分

$\therefore h(t)$在$(0,1)$上单调递减，$\therefore h(t)>h(1)=0$. ……11 分

$\therefore 2\ln t+\dfrac{1}{t}-t>0$.

即 $f'(x_1)+f'(x_2)<0$ 成立. ……12 分

22. 解：（Ⅰ）由曲线 C 的参数方程，消去参数 α，得曲线 C 的普通方程为

$x^2+y^2=1$. ……2 分

$\because \rho\cos\theta=x,\rho\sin\theta=y$，$\therefore$直线 l 的直角坐标方程为

$\sqrt{3}x-y+\sqrt{3}=0$. ……4 分

（Ⅱ）设曲线 C 上任一点(x,y)经坐标变换后对应的点为(x',y').

据题意，得$\begin{cases}x'=\sqrt{3}x,\\ y'=y.\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x',\\ y=y'.\end{cases}$

$\because x^2+y^2=1$，$\therefore \dfrac{x'^2}{3}+y'^2=1$.

即曲线 C_1 的普通方程为$\dfrac{x^2}{3}+y^2=1$. ……6 分

$\because$直线 l 过定点 $P(-1,0)$，

$\therefore$直线 l 的参数方程为$\begin{cases}x=-1+\dfrac{1}{2}t,\\ y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\end{cases}$（$t$ 为参数）. ……7 分

将直线 l 的参数方程代入曲线 C_1 的普通方程，整理可得

$5t^2-2t-4=0$. …(*)

$\Delta=(-2)^2-4\times5\times(-4)=84>0$.

设 t_1,t_2 为方程(*)的两个实数根. 则 $t_1+t_2=\dfrac{2}{5}$，$t_1t_2=-\dfrac{4}{5}<0$. ……8 分

$\therefore |PM|+|PN|=|t_1|+|t_2|=|t_1-t_2|=\sqrt{(t_1+t_2)^2-4t_1t_2}=\dfrac{2\sqrt{21}}{5}$. ……10 分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “精益求精、专业严谨 ” 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。