

## 漳州市 2021 届高三毕业班第二次教学质量检测

## 数学试题

本试卷共 5 页。满分 150 分。

考生注意：

1. 答题前，考生务必在试题卷、答题卡规定的地方填写自己的准考证号、姓名。考生要认真核对答题卡上粘贴的条形码的“准考证号、姓名”与考生本人准考证号、姓名是否一致。

2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3. 考试结束，考生必须将试题卷和答题卡一并交回。

一、单项选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 设全集  $U = \mathbf{R}$ ，若集合  $A = \{x \mid 0 \leq x \leq 2\}$ ， $B = \{x \mid y = \sqrt{x-1}\}$ ，则

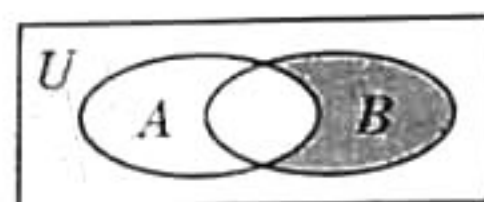
如图所示的阴影部分表示的集合为

A.  $(-\infty, 0)$

B.  $[1, 2]$

C.  $[1, +\infty)$

D.  $(2, +\infty)$



2. 若  $(3+i)(2+xi) = y$ ，其中  $x, y \in \mathbf{R}$ ，则复数  $x + yi$  在复平面内对应的点位于

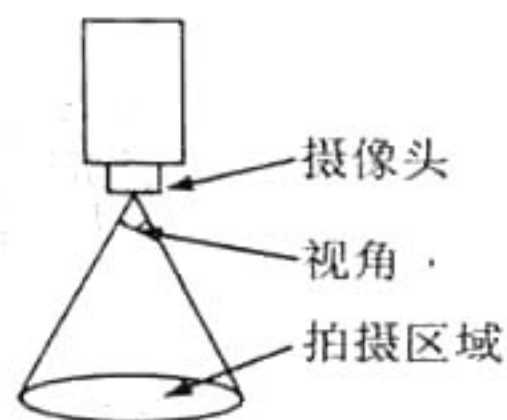
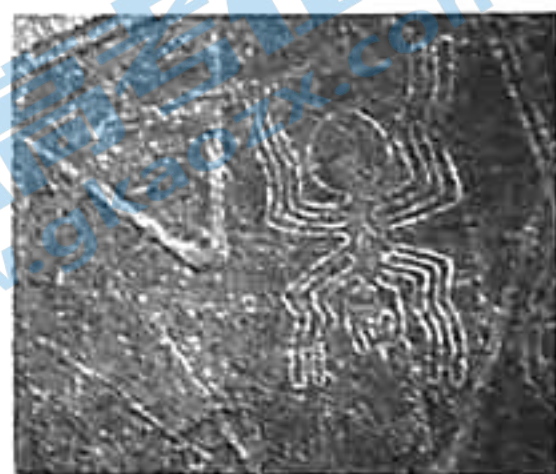
A. 第一象限

B. 第二象限

C. 第三象限

D. 第四象限

3. 纳斯卡线条是一种巨型的地上绘图，有着广大宽阔的直线，看起来就像机场跑道一样，描绘的大多是动植物，位于南美洲西部的秘鲁南部的纳斯卡荒原上，是存在了 2000 年的谜局：究竟是谁创造了它们并且为了什么而创造，至今仍无人能解，因此被列入“十大谜团”。在这些图案中，最清晰的图案之一是一只身长 50 米的大蜘蛛（如图），据说这是一种学名为“节腹目”的蜘蛛的形状。这种蜘蛛十分罕见，只有亚马逊河雨林中最偏远隐秘的地区才能找到。现用视角为  $30^\circ$  的摄像头（注：当摄像头和所拍摄的圆形区域构成一个圆锥时，该圆锥的轴截面的顶角称为该摄像头的视角）在该蜘蛛的上方拍摄，使得整个蜘蛛图案落在边长为 50 米的正方形区域内，则该摄像头距地面的高度的最小值是



摄像头的视角示意图

A. 50 米

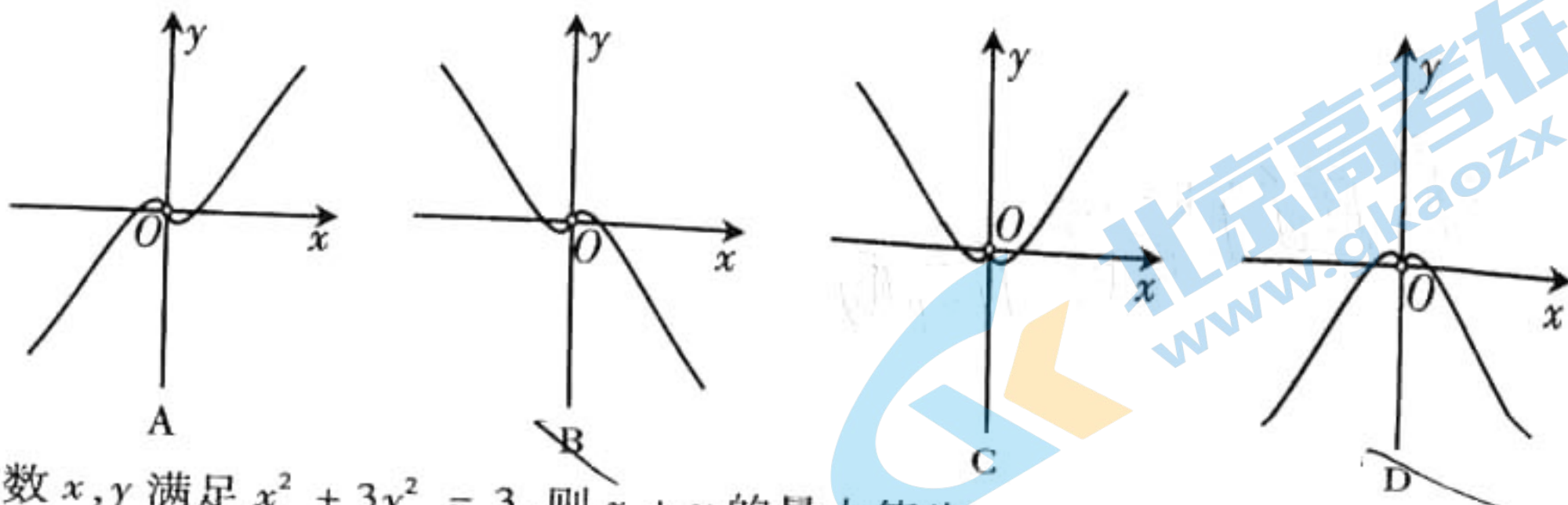
B.  $25(2\sqrt{2} + \sqrt{6})$  米

C.  $50(2 + \sqrt{3})$  米

D.  $50(2\sqrt{2} + \sqrt{6})$  米



4. 函数  $f(x) = x \ln |x| + \sin x$  的部分图象大致为



5. 已知实数  $x, y$  满足  $x^2 + 3y^2 = 3$ , 则  $x + y$  的最大值为

- A. 1 B.  $\sqrt{3}$  C. 2 D. 4

6. 某校甲、乙、丙三位同学报名参加  $A, B, C, D$  四所高校的强基计划考试, 每所高校报名人数不限, 因为四所高校的考试时间相同, 所以甲、乙、丙只能随机各自报考其中一所高校, 则恰有两人报考同一所高校的概率为

- A.  $\frac{1}{4}$  B.  $\frac{9}{32}$  C.  $\frac{4}{9}$  D.  $\frac{9}{16}$

7. 已知直角梯形  $ABCD$  中,  $AB \parallel DC$ ,  $\angle ABC = 90^\circ$ ,  $P$  是边  $BC$  上一点 (不包括  $B, C$  两点). 若  $|\overrightarrow{AB}| = 2$ ,  $|\overrightarrow{BC}| = 4$ , 且  $|\overrightarrow{CD}| = |\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{BP}|$ , 则  $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PD}$  的最小值为

- A. 0 B. 2 C. 3 D. 4

8. 已知函数  $f(x) = \frac{4}{e^x + 1}$ , 则下列结论错误的是

- A. 函数  $f(x)$  的值域为  $(0, 4)$   
B. 函数  $f(x)$  的图象关于点  $(0, 2)$  对称  
C. 函数  $g(x) = f(x) - |x|$  有且只有 2 个零点  
D. 曲线  $y = f(x)$  的切线斜率的最大值为  $-1$

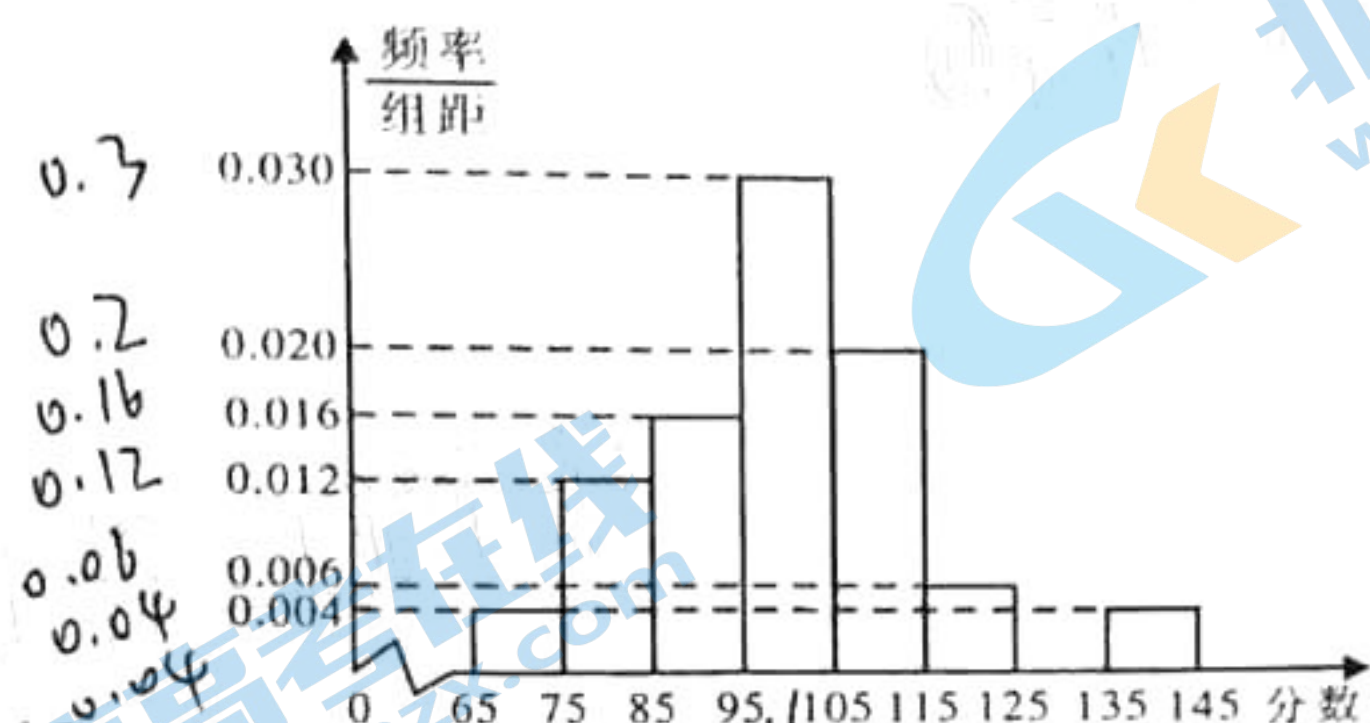
二、多项选择题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分, 在每小题给出的四个选项中, 有多个选项符合题目要求, 全部选对的得 5 分, 选对但不全的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 设  $\triangle ABC$  的内角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ , 若  $a = 2\sqrt{2}$ ,  $b = \sqrt{2}$ , 则角  $B$  可以是

- A.  $15^\circ$  B.  $30^\circ$  C.  $45^\circ$  D.  $75^\circ$



10. 在第一次全市高三年级统考后,某数学老师为了解本班学生的本次数学考试情况,将全班 50 名学生的数学成绩绘制成频率分布直方图. 已知该班级学生的数学成绩全部介于 65 分到 145 分之间(满分 150 分),将数学成绩按如下方式分成八组: 第一组  $[65, 75)$ , 第二组  $[75, 85)$ , ..., 第八组  $[135, 145]$ , 按上述分组方法得到的频率分布直方图的一部分, 如图所示, 则下列结论正确的是



- A. 第七组的频率为 0.008  
 B. 该班级数学成绩的中位数的估计值为 101 分  
 C. 该班级数学成绩的平均分的估计值大于 95 分  
 D. 该班级数学成绩的方差的估计值大于 26

11. 已知正三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  中,  $AB = 2, AA_1 = 1, M$  为  $AB$  的中点, 点  $P$  在线段  $BC_1$  上, 则下列结论正确的是

- A. 直线  $BC_1 \parallel$  平面  $A_1MC$   
 B.  $A$  和  $P$  到平面  $A_1MC$  的距离相等  
 C. 存在点  $P$ , 使得  $AP \perp$  平面  $A_1MC$   
 D. 存在点  $P$ , 使得  $AP \perp A_1C$

12. 已知  $F$  为抛物线  $C: y^2 = 2px (p > 0)$  的焦点,  $K$  为  $C$  的准线与  $x$  轴的交点, 点  $P$  在抛物线  $C$  上, 设  $\angle KPF = \alpha, \angle PKF = \beta, \angle PFK = \theta$ , 则下列结论正确的是

- A. 抛物线  $C$  在点  $(\frac{p}{2}, p)$  处的切线过点  $K$   
 B.  $\beta$  的最大值为  $\frac{\pi}{3}$   
 C.  $\tan \beta = \sin \theta$   
 D. 存在点  $P$ , 使得  $\alpha = \frac{3}{2}\beta$

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 写出一个离心率为 2 的双曲线方程:  $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$

14. 已知  $(x+1)^6 = a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)^2 + \dots + a_6(x-1)^6$ , 则  $a_4 =$  \_\_\_\_\_

15. 已知  $\omega > 0, \varphi > 0$ , 函数  $f(x) = 2\cos(3x + \frac{\pi}{3}) + 1$  的图象向右平移  $\varphi$  个单位得到  $g(x)$  的图象, 若函数  $g(x)$  与函数  $h(x) = 4\sin(\omega x - \frac{\pi}{6})$  的极值点完全相同, 则  $\omega =$  3,  $\varphi$  的最小值为 \_\_\_\_\_ (第一空 2 分, 第二空 3 分)

16. 已知正方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  的棱长为 4, 点  $P$  在平面  $A_1BCD_1$  内, 且  $PA = 3PB$ , 则点  $P$  的轨迹的长度为 \_\_\_\_\_



四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10 分)

已知数列  $(a_n)$  的前  $n$  项和为  $S_n$ ，且满足  $a_1 = 1, S_{n+1} - 3S_n = 1$ 。

(1) 求  $(a_n)$  的通项公式；

(2) 若  $b_n = \log_3 a_n + 1$ ，求数列  $\left\{ \frac{1}{b_n \cdot b_{n+1}} \right\}$  的前  $n$  项和  $T_n$ 。

18. (12 分)

已知  $\triangle ABC$  的内角  $A, B, C$  所对的边分别为  $a, b, c$ ，且满足

$$2 \sin^2 A - 2 \sin^2 B - \sin^2 C - 2 \sin B \sin C = \cos^2 C - \cos 2C.$$

(1) 求角  $A$ ；

(2) 设点  $D$  在边  $BC$  上，且  $AD = 2$ ，

证明：若 \_\_\_\_\_，则  $b + c$  存在最大值或最小值。

请在下面的两个条件中选择一个条件填到上面的横线上，并证明。

①  $AD$  是  $\triangle ABC$  的中线；

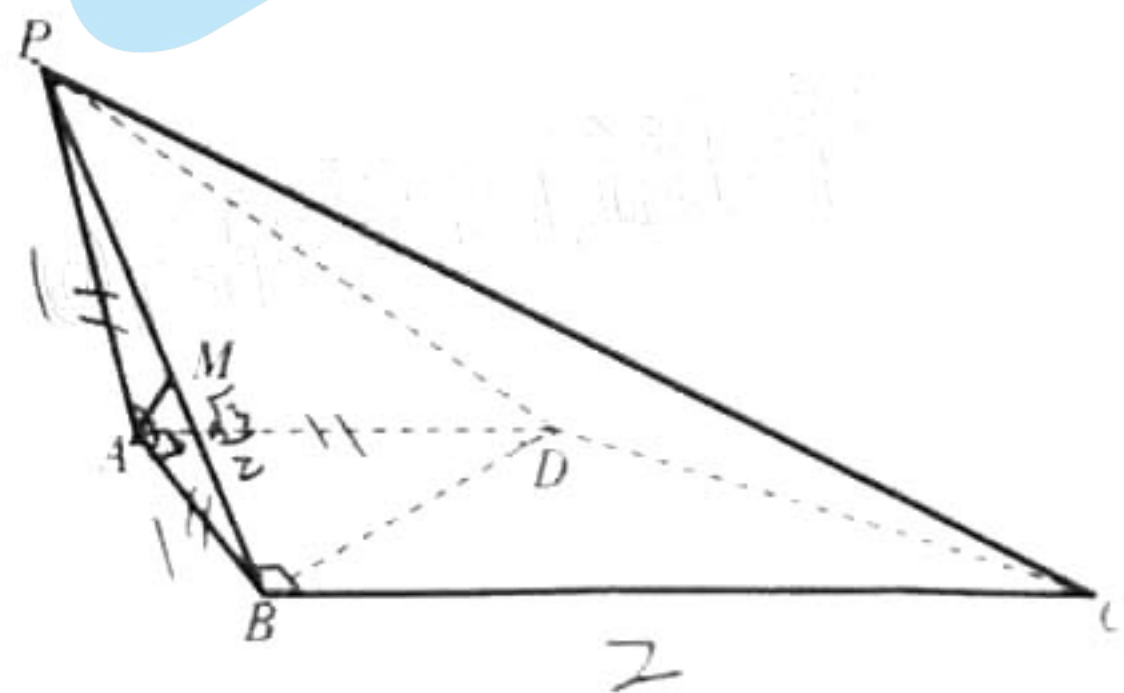
②  $AD$  是  $\triangle ABC$  的角平分线。

19. (12 分)

如图，在四棱锥  $P-ABCD$  中，侧面  $PAB \perp$  底面  $ABCD$ ，底面  $ABCD$  是直角梯形， $AD \parallel BC$ ， $AB \perp BC$ ， $\angle PAB = 120^\circ$ ， $PA = AD = AB = 1$ ， $BC = 2$ 。

(1) 证明：平面  $PBC \perp$  平面  $PAB$ ；

(2) 在线段  $PB$  上是否存在点  $M$ ，使得直线  $AM$  与平面  $PBD$  所成角的正弦值为  $\frac{\sqrt{15}}{5}$ ？若存在，求出线段  $PM$  的长度；若不存在，请说明理由。





20. (12 分)

已知左、右焦点分别为  $F_1, F_2$  的椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  过点  $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ , 以  $F_1 F_2$  为直径的圆过  $C$  的下顶点  $A$ .

(1) 求椭圆  $C$  的方程;

(2) 若过点  $P(0, 1)$  的直线  $l$  与椭圆  $C$  相交于  $M, N$  两点, 且直线  $AM, AN$  的斜率分别为  $k_1, k_2$ , 证明:  $k_1 \cdot k_2$  为定值.

21. (12 分)

某种玩具启动后, 该玩具上的  $LED$  灯会亮起红灯或绿灯 (红灯和绿灯不会同时亮起), 第 1 次亮灯时, 亮起红灯的概率为  $P_1$ , 亮起绿灯的概率为  $1 - P_1$ . 若第  $n$  次亮起的是红灯, 则第  $n + 1$  次亮起红灯的概率为  $\frac{1}{3}$ , 亮起绿灯的概率为  $\frac{2}{3}$ ; 若第  $n$  次亮起的是绿灯, 则第  $n + 1$  次亮起红灯的概率为  $\frac{2}{3}$ , 亮起绿灯的概率为  $\frac{1}{3}$ . 记第  $n$  次亮灯时, 亮起红灯的概率为  $P_n$ ,  $n \in N^*$ . 该玩具启动前可输入  $P_1$ , 玩具启动后, 当  $\frac{1010}{2021} < P_n < \frac{1}{2}$  且第  $n$  次亮起红灯时, 该玩具会唱一首歌曲, 否则不唱歌.

(1) 若输入  $P_1 = \frac{1}{2}$ , 记该玩具启动后, 前 3 次亮灯中亮起红灯的次数为  $X$ , 求  $X$  的分布列和期望;

(2) 若输入  $P_1 = \frac{1}{3}$ ,

(i) 求数列  $\{P_n\}$  的通项公式;

(ii) 该玩具启动后, 在前 20 次亮灯中, 该玩具最多唱几次歌?

22. (12 分)

已知函数  $f(x) = \frac{1}{x} + b \ln x - a$ ,  $g(x) = ae^{x-1} + \ln x - a$ ,  $h(x) = f(x) - g(x)$ .

(1) 求  $f(x)$  的单调区间;

(2) 若  $b = 1$ , 且  $f(x)$  有两个不同的零点  $x_1, x_2$ ,

证明:  $h(x)$  有唯一零点 (记为  $x_0$ ), 且  $x_1 + x_2 > 2x_0$ .



数学参考答案及评分细则

评分说明：

- 1. 本解答给出了一种或几种解法供参考，如果考生的解法与本解答不同，可根据试题的主要考查内容比照评分标准制定相应的评分细则。
- 2. 对计算题，当考生的解答在某一步出现错误时，如果后继部分的解答未改变该题的内容和难度，可视影响的程度决定后继部分的给分，但不得超过该部分正确解答应给分数的一半；如果后继部分的解答有较严重的错误，就不再给分。
- 3. 解答右端所注分数，表示考生正确做到这一步应得的累加分数。
- 4. 只给整数分数。选择题和填空题不给中间分。

一、单项选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. D      2. B      3. B      4. A      5. C      6. D  
7. C      8. D

二、多项选择题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分，在每小题给出的四个选项中，有多个选项符合题目要求，全部选对的得 5 分，选对但不全的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. AB      10. BCD      11. AB      12. ACD

三、填空题：本大题共 4 题，每小题 5 分，共 20 分。

13.  $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$  (答案不唯一)      14. 60  
15.  $3, \frac{\pi}{3}$       16.  $\frac{\sqrt{34}}{2}\pi$

四、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

17. 解：(1) 因为  $S_{n+1} - 3S_n = 1$ ，所以当  $n = 1$  时， $S_2 - 3S_1 = a_1 + a_2 - 3a_1 = 1$ ，  
又  $a_1 = 1$ ，所以  $a_2 = 3$ . ..... 1 分  
因为  $S_{n+1} - 3S_n = 1$ ，  
所以当  $n \geq 2$  时， $S_n - 3S_{n-1} = 1$ ，两式相减得： $a_{n+1} - 3a_n = 0$ ，  
所以  $a_{n+1} = 3a_n, n \geq 2$ , ..... 3 分  
又  $a_2 = 3a_1$ ，所以  $a_{n+1} = 3a_n, n \in \mathbb{N}^*$ , ..... 4 分  
所以数列  $\{a_n\}$  是以 1 为首项，以 3 为公比的等比数列，所以  $a_n = 3^{n-1}$ . ..... 5 分



(2) 由(1)得  $b_n = \log_3 a_n + 1 = \log_3 3^{n-1} + 1 = n$ , ..... 6分

所以  $\frac{1}{b_n \cdot b_{n+1}} = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ , ..... 8分

所以  $T_n = (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + \cdots + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$ .  
..... 10分

18. 解: (1) 因为  $2 \sin^2 A - 2 \sin^2 B - \sin^2 C - 2 \sin B \sin C = \cos^2 C - \cos 2C$ ,  
所以  $2 \sin^2 A - 2 \sin^2 B - \sin^2 C - 2 \sin B \sin C = \cos^2 C - (\cos^2 C - \sin^2 C) = \sin^2 C$ ,  
..... 2分

所以  $\sin^2 B + \sin^2 C - \sin^2 A = -\sin B \sin C$ ,  
所以由正弦定理, 得  $b^2 + c^2 - a^2 = -bc$ , ..... 3分

所以  $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{-bc}{2bc} = -\frac{1}{2}$ , ..... 4分

因为  $A \in (0, \pi)$ , 所以  $A = \frac{2\pi}{3}$ . ..... 6分

(2) 若选择 ①, 则  $\vec{AD} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AC})$ , ..... 7分

所以  $\vec{AD}^2 = \frac{1}{4}(\vec{AB}^2 + 2\vec{AB} \cdot \vec{AC} + \vec{AC}^2)$ , ..... 8分

因为  $AD = 2$ ,

所以  $4 = \frac{1}{4}[c^2 + 2cb \cdot (-\frac{1}{2}) + b^2]$ , ..... 9分

所以  $16 = (b+c)^2 - 3bc \geq (b+c)^2 - 3 \cdot (\frac{b+c}{2})^2 = \frac{(b+c)^2}{4}$ ,

即  $(b+c)^2 \leq 64$ , 所以  $b+c \leq 8$ , ..... 11分

当且仅当  $b=c=4$  时,  $(b+c)_{\max} = 8$ .

所以  $b+c$  存在最大值, 所以原命题成立. .... 12分

若选择 ②, 则  $\angle BAD = \angle DAC = \frac{1}{2}A = \frac{\pi}{3}$ ,

因为  $S_{\triangle ABD} + S_{\triangle ADC} = S_{\triangle ABC}$ . ..... 7分

所以  $\frac{1}{2}AB \cdot AD \cdot \sin \frac{\pi}{3} + \frac{1}{2}AD \cdot AC \cdot \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}AB \cdot AC \cdot \sin \frac{2\pi}{3}$ , ..... 8分

因为  $AD = 2$ ,

所以  $\frac{1}{2}c \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot b \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}c \cdot b \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,

所以  $2c + 2b = bc$ , 所以  $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2}$ , ..... 9分

所以  $b+c = 2(b+c)(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}) = 2(1 + \frac{b}{c} + \frac{c}{b} + 1) \geq 2(2 + 2\sqrt{\frac{b}{c} \cdot \frac{c}{b}}) = 8$ ,

关注北京高考在线官方微信: 北京高考资讯 (ID:bj-gaokao), 获取更多试题资料及排名分析信息 11分

当且仅当  $b=c=4$  时,  $(b+c)_{\min} = 8$ .



所以  $b + c$  存在最小值, 所以原命题成立. .... 12 分

19. (1) 证明: 因为平面  $PAB \perp$  底面  $ABCD$ , 且平面  $PAB \cap$  平面  $ABCD = AB$ ,

$BC \perp AB$ ,  $BC \subset$  平面  $ABCD$ , 所以  $BC \perp$  平面  $ABP$ , .... 2 分

又  $BC \subset$  平面  $PBC$ , 所以平面  $PBC \perp$  平面  $PAB$ . .... 4 分

(2) 解: 在平面  $PAB$  内, 过点  $A$  作  $AE \perp AB$  交  $PB$  于点  $E$ , 则可知  $AE \perp$  平面  $ABCD$ .

以  $A$  为坐标原点, 分别以  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AD}$ ,  $\overrightarrow{AE}$  方向为  $x$ ,  $y$ ,  $z$  轴的正方向, 建立空间直角坐标系  $A - xyz$ , .... 5 分

则由  $\angle PAB = 120^\circ$ ,  $PA = AD = AB = 1$ ,  $BC = 2$ ,

可得  $P(-\frac{1}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2})$ ,  $B(1, 0, 0)$ ,  $C(1, 2, 0)$ ,  $D(0, 1, 0)$ ,

则  $\overrightarrow{DP} = (-\frac{1}{2}, -1, \frac{\sqrt{3}}{2})$ ,  
 $\overrightarrow{DB} = (1, -1, 0)$ ,  
 $\overrightarrow{PB} = (\frac{3}{2}, 0, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ , .... 6 分

设  $\vec{n} = (x, y, z)$  为平面  $PBD$  的法向量,

则有  $\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{DP} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{DB} = 0 \end{cases}$ , 即  $\begin{cases} -\frac{1}{2}x - y + \frac{\sqrt{3}}{2}z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$ ,

取  $\vec{n} = (1, 1, \sqrt{3})$ , .... 8 分

设  $\overrightarrow{PM} = \lambda \overrightarrow{PB} (0 \leq \lambda \leq 1)$ , 则  $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PM} = (\frac{3\lambda - 1}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}(1 - \lambda)}{2})$ ,

若直线  $AM$  与平面  $PBD$  所成角的正弦值为  $\frac{\sqrt{15}}{5}$ ,

则  $|\cos \langle \overrightarrow{AM}, \vec{n} \rangle| = \frac{|\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}|}{|\overrightarrow{AM}| |\vec{n}|} = \frac{1}{\sqrt{3\lambda^2 - 3\lambda + 1} \cdot \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{15}}{5}$ , .... 10 分

解得  $\lambda = \frac{1}{3}$  或  $\lambda = \frac{2}{3}$ . .... 11 分

故存在点  $M$  满足题意, 此时  $PM = \frac{\sqrt{3}}{3}$  或  $PM = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ . .... 12 分

20. 解: (1) 因为以  $F_1 F_2$  为直径的圆过点  $A(0, -b)$ , 所以  $b = c$ , .... 1 分

所以  $a = \sqrt{b^2 + c^2} = \sqrt{2}b$ , .... 2 分

关注北京高考在线官方微信, 北京高考资讯 (ID:bj-gaokao), 获取更多试题资料及排名分析信息。

所以  $C: \frac{x^2}{2b^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , 因为  $C$  过点  $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ , 所以  $\frac{2}{2b^2} + \frac{3}{b^2} = 1$ ,



解得  $b = 2, a = 2\sqrt{2}$ , ..... 4 分

所以椭圆  $C$  的方程为  $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$ . ..... 5 分

(2) 由题意, 可设直线  $l$  的方程为  $y = kx + 1, M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$ ,

由方程组  $\begin{cases} \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1 \\ y = kx + 1 \end{cases}$ , 消去  $y$  得  $(1 + 2k^2)x^2 + 4kx - 6 = 0$ . ..... 6 分

于是  $x_1 + x_2 = -\frac{4k}{1 + 2k^2}, x_1x_2 = \frac{-6}{1 + 2k^2}$ , ..... 8 分

因为  $A(0, -2)$ , 所以  $k_1 = \frac{y_1 + 2}{x_1}, k_2 = \frac{y_2 + 2}{x_2}$ , ..... 9 分

于是  $k_1 \cdot k_2 = \frac{(y_1 + 2)(y_2 + 2)}{x_1x_2} = \frac{(kx_1 + 3)(kx_2 + 3)}{x_1x_2} = \frac{k^2x_1x_2 + 3k(x_1 + x_2) + 9}{x_1x_2}$   
 $= k^2 + 2k^2 - \frac{9(1 + 2k^2)}{6} = -\frac{3}{2}$  为定值. .... 12 分

21. 解: (1) 由题意, 得  $X$  的所有取值为 0, 1, 2, 3,  
因为  $X = 0$  表示前 3 次亮灯的颜色为“绿绿绿”,

所以  $P(X = 0) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{18}$ .

因为  $X = 1$  表示前 3 次亮灯的颜色为“红绿绿”或“绿红绿”或“绿绿红”,

所以  $P(X = 1) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$ .

因为  $X = 2$  表示前 3 次亮灯的颜色为“红红绿”或“红绿红”或“绿红红”,

所以  $P(X = 2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{4}{9}$ .

因为  $X = 3$  表示前 3 次亮灯的颜色为“红红红”,

所以  $P(X = 3) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{18}$ .

所以  $X$  的分布列为 ..... 4 分

|     |                |               |               |                |
|-----|----------------|---------------|---------------|----------------|
| $X$ | 0              | 1             | 2             | 3              |
| $p$ | $\frac{1}{18}$ | $\frac{4}{9}$ | $\frac{4}{9}$ | $\frac{1}{18}$ |

所以  $E(X) = 0 \times \frac{1}{18} + 1 \times \frac{4}{9} + 2 \times \frac{4}{9} + 3 \times \frac{1}{18} = \frac{3}{2}$ . ..... 5 分

(2) (i) 由题意, 得  $P_{n+1} = P_n \times \frac{1}{3} + (1 - P_n) \times \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}P_n + \frac{2}{3}$ , ..... 6 分

关注北京高考在线官方微信: 北京高考资讯(ID:bj-gaokao), 获取更多试题资料及排名分析信息。  
所以  $P_{n+1} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{3}(P_n - \frac{1}{2})$ , ..... 7 分



因为  $P_1 = \frac{1}{3}$ , 所以  $P_1 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6} \neq 0$ , ..... 8 分

所以  $\{P_n - \frac{1}{2}\}$  是首项为  $-\frac{1}{6}$ , 公比为  $-\frac{1}{3}$  的等比数列,

所以  $P_n - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6} \times (-\frac{1}{3})^{n-1}$ , 所以  $P_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times (-\frac{1}{3})^n$ , ..... 9 分

(ii) 由  $P_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times (-\frac{1}{3})^n < \frac{1}{2}$ , 得  $\frac{1}{2} \times (-\frac{1}{3})^n < 0$ , 又  $n \in N^*$ , 所以  $n$  为正奇数,

由  $P_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times (-\frac{1}{3})^n > \frac{1010}{2021}$ , 得  $(-\frac{1}{3})^n > -\frac{1}{2021}$ ,

当  $n$  为奇数时,  $\frac{1}{3^n} < \frac{1}{2021}$ ,  $3^n > 2021$ , 所以  $n \geq 7$ , ..... 11 分

所以该玩具启动后, 在前 20 次亮灯中, 当  $n = 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19$  时, 该玩具可能唱歌, 所以该玩具启动后, 在前 20 次亮灯中, 该玩具最多唱 7 次歌. .... 12 分

22. 解: (1)  $f(x)$  的定义域为  $(0, +\infty)$ ,  $f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{b}{x} = \frac{-1 + bx}{x^2}$  ..... 1 分

① 若  $b \leq 0$ , 则  $f'(x) < 0$ , 所以  $f(x)$  的递减区间为  $(0, +\infty)$ , 无递增区间. .... 2 分

② 若  $b > 0$ , 则由  $f'(x) < 0$ , 得  $0 < x < \frac{1}{b}$ , 由  $f'(x) > 0$ , 得  $x > \frac{1}{b}$ ,

所以  $f(x)$  的递减区间为  $(0, \frac{1}{b})$ , 递增区间为  $(\frac{1}{b}, +\infty)$ . .... 4 分

(2) 因为  $b = 1$ , 所以由 (1) 知  $f(x)$  在  $(0, 1)$  上递减, 在  $(1, +\infty)$  上递增,

因为  $f(x)$  有两个不同的零点  $x_1, x_2$ , 不妨设  $x_1 < x_2$ ,

所以  $0 < x_1 < 1 < x_2$ , 且  $f(1) = 1 - a < 0$ ,

所以  $a > 1$ , ..... 5 分

又  $h(x) = \frac{1}{x} - ac^{x-1}$ ,  $x > 0$ ,

因为当  $x > 0$  时,  $h'(x) = -\frac{1}{x^2} - ac^{x-1} < 0$ ,

所以  $h(x)$  在  $(0, +\infty)$  上是减函数, ..... 6 分

关注北京高考在线官方微信: [北京高考资讯 \(ID:bj-gaokao\)](#), 获取更多试题资料及排名分析信息。

又因为  $h(\frac{1}{a}) = a - ac^{\frac{1}{a}-1} = a(1 - c^{\frac{1}{a}-1}) > 0$ ,  $h(1) = 1 - a < 0$ ,  $h(x)$  的图象



连续不断，

所以  $h(x)$  有唯一零点  $x_0$ ，且  $\frac{1}{a} < x_0 < 1$ . ..... 7 分

所以  $2x_0 < 2$ ，

要证明  $x_1 + x_2 > 2x_0$ ，

只需证明  $x_1 + x_2 > 2$ ， ..... 8 分

只需证明  $x_2 > 2 - x_1$ ，

因为  $f(x)$  在  $(1, +\infty)$  上递增， $x_2, 2 - x_1 \in (1, +\infty)$ ，

所以只需证明  $f(x_2) > f(2 - x_1)$ ， ..... 9 分

因为  $f(x_1) = f(x_2) = 0$ ，

所以只需证明  $f(x_1) > f(2 - x_1)$ ，

只需证明  $f(x_1) - f(2 - x_1) > 0$ ，

令  $\varphi(x) = f(x) - f(2 - x)$ ，

只需证明  $\varphi(x_1) > 0 = \varphi(1)$ ，

只需证明  $\varphi(x)$  在  $(0, 1)$  上递减， ..... 10 分

因为  $f'(x) = \frac{x - 1}{x^2}$ ，

所以当  $0 < x < 1$  时， $\varphi'(x) = f'(x) + f'(2 - x) = -\frac{4(x - 1)^2}{x^2(x - 2)^2} < 0$ ，  
..... 11 分

所以  $\varphi(x)$  在  $(0, 1)$  上递减，

所以  $x_1 + x_2 > 2x_0$ . ..... 12 分



## 关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。



微信搜一搜

北京高考资讯