2024 届高三一轮复习联考(一)

数 学 试 题

注意事项：

1.答卷前，考生务必将自己的姓名、考场号、座位号、准考证号填写在答题卡上。

2.回答选择题时，选出每小题答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3.考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

考试时间为 120 分钟，满分 150 分

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1.设集合 $A=\{-2,-1,0,1,2\}$，$B=\{x\mid x^2+x-2<0\}$，则 $A\cap B=$

A.$\{-2,-1,0\}$　　B.$\{-1,0\}$　　C.$\{-1,0,1\}$　　D.$\{0,1,2\}$

2.命题 p：$\exists n\in\mathbf{N}, n^2\geqslant 2^n$，则命题 p 的否定为

A.$\forall n\notin\mathbf{N}, n^2$ [illegible] 2^n

B.$\exists n\in\mathbf{N}, n^2\leqslant 2^n$

C.$\forall n\in\mathbf{N}, n^2<2^n$

D.$\exists n\in\mathbf{N}, n^2<2^n$

3.在平面直角坐标系 xOy 中，若角 θ 以坐标原点为顶点，x 轴非负半轴为始边，且终边过点 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$，则 $y=\sin(x+\theta)$ 取最小值时 x 的可能取值为

A.$\frac{4\pi}{3}$　　B.$-\frac{\pi}{3}$　　C.$-\frac{5\pi}{6}$　　D.$\frac{\pi}{3}$

4.若 $x>1, y>1$，则“$x-y>1$”是“$\ln x-\ln y>1$”的

A.充要条件

B.充分不必要条件

C.必要不充分条件

D.既不充分也不必要条件

5.若 $f(x)=\frac{a}{e^x+1}-1$ 为奇函数，则 $g(x)=\ln[(x-1)(x-a)]$ 的单调递增区间是

A.$(0,1)$　　B.$(1,+\infty)$　　C.$\left(\frac{3}{2},+\infty\right)$　　D.$(2,+\infty)$

6.已知 $\sin 126^\circ=\frac{\sqrt{5}+1}{4}$，则 $\sin 18^\circ=$

A.$\frac{3-\sqrt{5}}{4}$　　B.$\frac{3-\sqrt{5}}{8}$　　C.$\frac{\sqrt{5}-1}{8}$　　D.$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$

7.已知 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，$y=f(2x-1)$ 为奇函数，$y=f(x+1)$ 为偶函数，若当 $x\in(-1,1)$ 时，$f(x)=e^{x}$，则 $f(194)=$

A.$\frac{1}{e}$　　B.0　　C.1　　D.e

8.设 $a=\log_3 4$，$b=\log_{0.8}0.7$，$c=1.02^{51}$，则 a,b,c 的大小关系为

A.$a<c<b$　　B.$a<b<c$　　C.$b<a<c$　　D.$c<a<b$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9.已知 z_1,z_2 为复数，则下列说法正确的是

A.若 $z_1\in\mathbf{R}$，则 $z_1=\overline{z_1}$

B.若 $|z_1|=|z_2|$，则 $z_1=z_2$

C.若 $z_1=z_2$，则 $|z_1|=|z_2|$

D.若 $|z_1-z_2|=|z_1|$，则 $z_1=0$ 或 $z_2=2z_1$

10.已知正数 a,b 满足 $a\geqslant\frac{2}{a}+\frac{1}{b}$，$b\geqslant\frac{1}{a}+\frac{2}{b}$，则

A.$ab\geqslant3$　　B.$(a+b)^2\geqslant12$　　C.$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\quad\frac{2\sqrt{3}}{3}$　　D.$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}<\sqrt{2}$

11.已知函数 $f(x)=\cos^2\left(x+\frac{\varphi}{2}\right)(0<\varphi<\pi)$ 的一个对称中心为 $\left(\frac{\pi}{6},\frac{1}{2}\right)$，则

A.$f(x)$ 的最小正周期为 π

B.$f\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{1}{4}$

C.直线 $x=\frac{5\pi}{12}$ 是函数 $f(x)$ 图像的一条对称轴

D.若函数 $y=f(\omega x)(\omega>0)$ 在 $[0,\pi]$ 上单调递减，则 $\omega\in\left(0,\frac{7}{12}\right]$

12.已知函数 $f(x)=x^3-ax^2+bx+1$，则下列说法正确的是

A.当 $b=0$ 时，$f(x)$ 有两个极值点

B.当 $a=0$ 时，$f(x)$ 的图象关于 $(0,1)$ 中心对称

C.当 $b=\frac{a^2}{4}$，且 $a>-4$ 时，$f(x)$ 可能有三个零点

D.当 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调时，$a^2\geqslant3b$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13.已知 $\alpha,\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{3\sqrt{5}}{5}$，$\sin 2\alpha-\cos 2\beta=0$，则 $\tan\beta=$__________.

14.已知函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上可导，且 $f(2x+3)=4x^2-1$，则 $f'(1)=$__________.

15.已知函数 $f(x)=\sin(2x+\varphi)$，$\varphi\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，若 $f(x)$ 在 $\left[0,\frac{17\pi}{12}\right]$ 上恰有三个零点，则 φ 的取值范围是__________.

16.已知函数 $f(x)=e^{x+1}-a\ln x$，若 $f(x)\geqslant a(\ln a-1)$ 对 $x>0$ 恒成立，则实数 a 的取值范围是__________.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.(10 分)已知函数 $f(x)=(x^2-4x+1)e^x$.

(1)求函数 $f(x)$ 的单调区间；

(2)当 $x\in[-2,4]$ 时，求函数 $y=f(x)$ 的最值.

18.(12 分)已知函数 $f(x)=2\sqrt{3}-4\sqrt{3}\cos\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)\quad 4\sin\omega x\cos\omega x$ $(x\in\mathbf{R},\omega>0)$ 的两个相邻的对称中心的距离为 $\frac{\pi}{2}$.

(1)求 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上的单调递增区间；

(2)当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 时，关于 x 的方程 $f(x)=m$ 有两个不相等的实数根 $x_1,x_2(x_1<x_2)$，求 $\cos\frac{x_1+x_2}{2}$ 的值.

19.(12 分)已知关于 x 的不等式 $4^x+4^{-x}\leqslant 2^x+2^{-x}+\frac{7}{4}$ 的解集为 M.

(1)求集合 M；

(2)若 $m,n\in M$，且 $m>0,n>0$，$\sqrt{m}+2\sqrt{n}=1$，求 $\frac{1}{4m}+\frac{1}{n}-\frac{3\sqrt{mn}}{n}$ 的最小值.

20.(12 分)已知函数 $f(x)=\ln(x+1)-ax+2$.

(1)若 $a=2$,求 $f(x)$在 $x=0$ 处的切线方程;

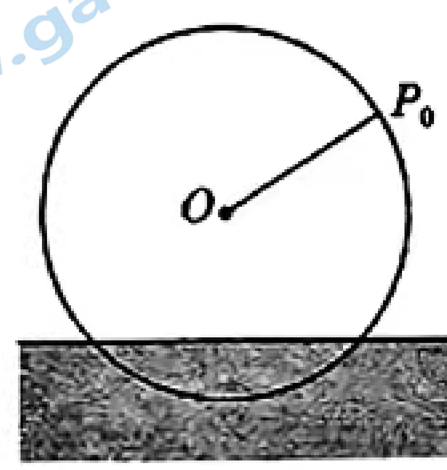
(2)当 $x\geqslant 0$ 时,$f(x)+2x+x\ln(x+1)\geqslant 0$ 恒成立,求整数 a 的最大值.

21.(12 分)筒车(chinese noria)亦称“水转筒车”。一种以水流作动力,取水灌田的工具。据史料记载,筒车发明于隋而盛于唐,距今已有 1 000 多年的历史.这种靠水力自动的古老筒车,在家乡郁郁葱葱的山间、溪流间构成了一幅幅远古的田园春色图.水转筒车是利用水力转动的筒车,必须架设在水流湍急的岸边.水激轮转,浸在水中的小筒装满了水带到高处,筒口向下,水即自筒中倾泻入轮旁的水槽而汇流入田.某乡间有一筒车,其最高点到水面的距离为 6 m,筒车直径为 8 m,设置有 8 个盛水筒,均匀分布在筒车转轮上,筒车上的每一个盛水筒都做逆时针匀速圆周运动,筒车转一周需要 24 s,如图,盛水筒 A(视为质点)的初始位置 P_0 距水面的距离为 4 m.

(1)盛水筒 A 经过 t s 后距离水面的高度为 h(单位:m),求筒车转动一周的过程中,h 关于 t 的函数 $h=f(t)$的解析式;

(2)盛水筒 B(视为质点)与盛水筒 A 相邻,设盛水筒 B 在盛水筒 A 的顺时针方向相邻处,求盛水筒 B 与盛水筒 A 的高度差的最大值(结果用含 π 的代数式表示),及此时对应的 t.

(参考公式:$\sin\theta-\sin\varphi=2\cos\dfrac{\theta+\varphi}{2}\sin\dfrac{\theta-\varphi}{2}$,$\cos\theta-\cos\varphi=2\sin\dfrac{\theta+\varphi}{2}\sin\dfrac{\varphi-\theta}{2}$)



22.(12 分)已知函数 $f(x)=\dfrac{x}{e^x}+a(x-1)^2$.

(1)当 $a=0$ 时,求 $f(x)$的最大值;

(2)若 $f(x)$存在极大值点,且极大值不大于$\dfrac{1}{2}$,求 a 的取值范围.

2024 届高三一轮复习联考(一)

数学参考答案及评分意见

1.B 【解析】由题意知 $B=(-2,1)$，则 $A\cap B=(-1,0)$，故选 B.

2.C 【解析】存在量词命题的否定为全称量词命题，所以命题 p 的否定应该为 $\forall n\in\mathbf{N},n^2<2^n$.故选 C.

3.A 【解析】∵角 θ 的终边经过点 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$，∴$\sin\theta=\frac{1}{2}$，$\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$，∴$\theta=\frac{\pi}{6}+2n\pi,n\in\mathbf{Z}$，$y=\sin(x+\theta)$ 取最小值时，$x+\theta=\frac{3}{2}\pi+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，即 $x=\frac{4}{3}\pi+2k\pi-2n\pi,k\in\mathbf{Z},n\in\mathbf{Z}$，故选 A.

4.C 【解析】取 $x=4,y=2$，则 $x-y=2>1$，$\ln x-\ln y=\ln 4-\ln 2=\ln 2<1$，所以“$x-y>1$”不是“$\ln x-\ln y>1$”的充分条件；必要性：当 $\ln x-\ln y>1$ 时，$\ln x>\ln y+1$，所以 $x>ey>2y>y+1$，即 $x>y+1$，所以“$x-y>1$”是“$\ln x-\ln y>1$”的必要条件，综上，“$x-y>1$”是“$\ln x-\ln y>1$”的必要不充分条件，故选 C.

5.D 【解析】由题意知 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，$f(-x)+f(x)=\frac{a}{e^{-x}+1}-1+\frac{a}{e^{x}+1}-1=a-2=0$，∴$a=2$，$g(x)=\ln[(x-1)(x-2)]$ 的定义域为 $(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$，当 $x\in(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$ 时，$y=(x-1)(x-2)$ 的单调增区间为 $(2,+\infty)$，$g(x)=\ln[(x-1)(x-2)]$ 的单调递增区间为 $(2,+\infty)$，故选 D.

6.D 【解析】$\sin 126^\circ=\sin(90^\circ+36^\circ)=\cos 36^\circ=\frac{\sqrt{5}+1}{4}$，$\cos 36^\circ=1-2\sin^2 18^\circ=\frac{\sqrt{5}+1}{4}$，解得 $\sin^2 18^\circ=\frac{3-\sqrt{5}}{8}$，

∵$\sin 18^\circ>0$，∴$\sin 18^\circ=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$，故选 D.

7.C 【解析】$y=f(2x-1)$ 为奇函数，即 $f(2x-1)+f(-2x-1)=0$，所以 $f(x)$ 关于 $(-1,0)$ 中心对称；$y=f(x+1)$ 为偶函数，即 $f(x+1)=f(-x+1)$，所以 $f(x)$ 关于直线 $x=1$ 对称，所以 $f(x)=f(-x+2)=-f(x-4)$，故 $f(x+8)=-f(x+4)=f(x)$，即 $f(x)$ 是周期为 8 的周期函数，所以 $f(194)=f(8\times 24+2)=f(2)=f(0)=1$，故选 C.

8.B 【解析】$3<4<3\sqrt{3}$，所以 $a=\log_3 4\in\left(1,\frac{3}{2}\right)$；因为 $(0.8)^{\frac{3}{2}}=\left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{3}{2}}=\frac{8}{5\sqrt{5}}=\frac{1}{5}\sqrt{\frac{64}{5}}>\frac{1}{5}\sqrt{\frac{49}{4}}=0.7$，$0.7>0.64=(0.8)^2$，即 $(0.8)^{\frac{3}{2}}>0.7>(0.8)^2$，所以 $b=\log_{0.8}0.7\in\left(\frac{3}{2},2\right)$；设 $f(x)=x-1-\ln x$，则 $f'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$，所以当 $x>1$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 单调递增；当 $0<x<1$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 在 $(0,1)$ 单调递减，所以 $f(x)\geqslant f(1)=0$，即 $x-1\geqslant\ln x$，当且仅当 $x=1$ 时等号成立，同理 $f\left(\frac{1}{x}\right)\geqslant 0$，即 $\frac{1}{x}-1\geqslant-\ln x$，所以 $\ln x\geqslant 1-\frac{1}{x}$，当且仅当 $x=1$ 时等号成立，故 $\ln 1.02>1-\frac{1}{1.02}=\frac{1}{51}$，所以 $\ln 1.02^{51}>1$，从而 $c=1.02^{51}>e$，综上，$1<a<\frac{3}{2}<b<2<e<c$，故选 B.

9.AC 【解析】易知 A 正确；取 $z_1=1,z_2=i$，满足 $|z_1|=|z_2|$，但 $z_1\neq z_2$，故 B 错误；设 $z_1=a+bi,z_2=c+di$，$a,b,c,d\in\mathbf{R}$，由 $z_1=z_2$，得 $a+bi=c+di$，即 $a=c,b=d$，所以 $a^2+b^2=c^2+d^2$，即 $|z_1|=|z_2|$，故 C 正确；取 $z_1=2,z_2=1+\sqrt{3}i$，则 $z_1-z_2=1-\sqrt{3}i$，$|z_1-z_2|=2=|z_1|$，此时 $z_1\neq 0$ 且 $z_2\neq 2z_1$，故 D 不正确.故选 AC.

10.ABD 【解析】$a\geqslant\frac{2}{a}+\frac{1}{b}$，$b\geqslant\frac{1}{a}+\frac{2}{b}$，所以 $a+b\geqslant\frac{3}{a}+\frac{3}{b}$，即 $a+b\geqslant3\cdot\frac{a+b}{ab}$，因为 $a+b>0$，所以 $ab\geqslant3$，故 A 正确；$(a+b)^2\geqslant(2\sqrt{ab})^2\geqslant(2\sqrt{3})^2=12$，故 B 正确；取 $a=2$，$b=2$，则满足 $a\geqslant\frac{2}{a}+\frac{1}{b}$，$b\geqslant\frac{1}{a}+\frac{2}{b}$，此时 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1<\frac{2\sqrt{3}}{3}$，故 C 不正确；$a\geqslant\frac{2}{a}+\frac{1}{b}>\frac{2}{a}$，所以 $\frac{1}{a}<\frac{\sqrt{2}}{2}$，同理 $\frac{1}{b}<\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}<\sqrt{2}$，故 D 正确.故选 ABD.

11.AC 【解析】$f(x)=\frac{1}{2}\cos(2x+\varphi)+\frac{1}{2}$，则有 $2\times\frac{\pi}{6}+\varphi=\frac{\pi}{2}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，解得 $\varphi=\frac{\pi}{6}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$.因为 $0<\varphi<\pi$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{6}$，所以 $f(x)=\frac{1}{2}\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{2}$，则 $f(x)$ 的最小正周期为 π，故 A 正确；$f\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{3}{4}$，故 B 错误；$2\times\frac{5\pi}{12}+\frac{\pi}{6}=\pi$，则直线 $x=\frac{5\pi}{12}$ 是 $f(x)$ 图像的一条对称轴，故 C 正确；$y=f(\omega x)=\frac{1}{2}\cos\left(2\omega x+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{2}$，当 $x\in[0,\pi]$ 时，$2\omega x+\frac{\pi}{6}\in\left[\frac{\pi}{6},2\omega\pi+\frac{\pi}{6}\right]$，若函数 $y=f(\omega x)(\omega>0)$ 在 $[0,\pi]$ 上单调递减，则有 $2\omega\pi+\frac{\pi}{6}\leqslant\pi$，解得 $\omega\leqslant\frac{5}{12}$，则 $\omega\in\left(0,\frac{5}{12}\right]$，故 D 错误，故选 AC.

12.BC 【解析】当 $b=0$ 时，$f(x)=x^3-ax^2+1$，$f'(x)=3x^2-2ax$，取 $a=0$ 时，$f'(x)=3x^2\geqslant0$，则 $f(x)$ 在定义域内单调递增，无极值点，故 A 错误；当 $a=0$ 时，$f(x)=x^3+bx+1$，$f(-x)=-x^3-bx+1$，则 $f(x)+f(-x)=2$，所以 $f(x)$ 的图象关于 $(0,1)$ 中心对称，故 B 正确；当 $b=\frac{a}{4}$ 时，$f(x)=x^3-ax^2+\frac{a^2}{4}x+1$，$f'(x)=3x^2-2ax+\frac{a^2}{4}=3\left(x-\frac{a}{6}\right)\left(x-\frac{a}{2}\right)$，当 $-4<a<-3\sqrt[3]{2}$，即 $-64<a^3<-54$ 时，$\frac{a}{6}>\frac{a}{2}$，所以当 $x<\frac{a}{2}$ 时，$f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 $\left(-\infty,\frac{a}{2}\right)$ 上单调递增，当 $\frac{a}{2}<x<\frac{a}{6}$ 时，$f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在 $\left(\frac{a}{2},\frac{a}{6}\right)$ 上单调递减，当 $x>\frac{a}{6}$ 时，$f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 $\left(\frac{a}{6},+\infty\right)$ 上单调递增，所以 $f_{极小}(x)=f\left(\frac{a}{6}\right)=\frac{a^3}{54}+1<0$，$f_{极大}(x)=f\left(\frac{a}{2}\right)=1>0$，即 $f\left(\frac{a}{2}\right)f\left(\frac{a}{6}\right)<0$，所以 $f(x)$ 在 $\left(\frac{a}{2},\frac{a}{6}\right)$ 有一个零点，因为 $f(a)=\frac{a^3}{4}+1<-\frac{25}{2}<0$，$f\left(\frac{a}{2}\right)>0$，所以 $f(x)$ 在 $\left(a,\frac{a}{2}\right)$ 有一个零点，因为 $f(-a)=-\frac{9}{4}a^3+1>-\frac{9}{4}\times(-54)+1>0$，$f\left(\frac{a}{6}\right)<0$，所以 $f(x)$ 在 $\left(\frac{a}{6},-a\right)$ 有一个零点，所以当 $-4<a<-3\sqrt[3]{2}$ 时，$f(x)$ 有三个零点，故 C 正确；若 $f(x)$ 在定义域 $\mathbf{R}$ 上是单调函数，因为 $f'(x)=3x^2-2ax+b$，所以 $\Delta=4a^2-12b\leqslant0$，解得 $a^2\leqslant3b$，所以 D 错误，故选 BC.

13.$\frac{1}{3}$ 【解析】$\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{3\sqrt{5}}{5}$，两边平方得 $1+\sin2\alpha=\frac{9}{5}$，所以 $\cos2\beta=\sin2\alpha=\frac{4}{5}$，故 $\cos^2\beta-\sin^2\beta=\frac{4}{5}$，因为 $\cos^2\beta+\sin^2\beta=1$，则 $\tan^2\beta=\frac{1}{9}$，又因为 $\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $\tan\beta=\frac{1}{3}$.

14.-4 【解析】令 $t=2x+3$，则 $x=\frac{t-3}{2}$，则 $f(t)=t^2-6t+8$，即 $f(x)=x^2-6x+8$，$f'(x)=2x-6$，所以 $f'(1)=-4$.

15.$\left(-\frac{\pi}{2},0\right]\cup\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$ 【解析】由 $2x+\varphi=k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，解得 $x=-\frac{\varphi}{2}+\frac{k\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，所以函数 $f(x)=\sin(2x+\varphi)$ 的零点为 $x=-\frac{\varphi}{2}+\frac{k\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$.当 $\varphi\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$-\frac{\varphi}{2}\in\left(-\frac{\pi}{4},0\right)$，所以 $y=f(x)$ 在 $\left[0,\frac{17\pi}{12}\right]$ 上的三个零点分别为

$-\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{2},-\frac{\varphi}{2}+\pi,-\frac{\varphi}{2}+\frac{3\pi}{2}$，故满足 $-\frac{\varphi}{2}+\frac{3\pi}{2}\leqslant\frac{17\pi}{12}<-\frac{\varphi}{2}+2\pi$，解得 $\frac{\pi}{6}\leqslant\varphi<\frac{7\pi}{6}$，从而 $\frac{\pi}{6}\leqslant\varphi<\frac{\pi}{2}$；当 $\varphi\in\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$ 时，$-\frac{\varphi}{2}\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$，所以 $y=f(x)$ 在 $\left[0,\frac{17\pi}{12}\right]$ 上的三个零点分别为 $-\frac{\varphi}{2},-\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{2},-\frac{\varphi}{2}+\pi$，故满足 $-\frac{\varphi}{2}+\pi\leqslant\frac{17\pi}{12}<-\frac{\varphi}{2}+\frac{3\pi}{2}$，解得 $-\frac{5\pi}{6}\leqslant\varphi<\frac{\pi}{6}$，从而 $-\frac{\pi}{2}<\varphi\leqslant 0$．综上，$\varphi\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right]\cup\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$．

16．$(0,e^2]$ 【解析】易知 $a>0$，由 $e^{x+1}-a\ln x\geqslant a(\ln a-1)$ 可得 $\frac{e^{x+1}}{a}+1-\ln a\geqslant\ln x$，即 $e^{x+1-\ln a}+1-\ln a\geqslant\ln x$，则有 $e^{x+1-\ln a}+x+1-\ln a\geqslant x+\ln x$，设 $h(x)=e^x+x$，$h(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，$h(x+1-\ln a)\geqslant h(\ln x)$，所以 $x+1-\ln a\geqslant\ln x$，即 $x-\ln x\geqslant\ln a-1$，设 $g(x)=x-\ln x$，易知 $g(x)\geqslant g(1)=1$，则有 $1\geqslant\ln a-1$，解得 $a\in(0,e^2]$．

17．解：(1) 函数 $f(x)$ 定义域为 $\mathbf{R}$，$f'(x)=(x^2-2x-3)e^x=(x-3)(x+1)e^x$．………………………… 1 分

令 $f'(x)>0$，解得 $x<-1$，或 $x>3$．………………………………………………………… 2 分

令 $f'(x)<0$，解得 $-1<x<3$．……………………………………………………………… 3 分

∴函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty,-1)$，$(3,+\infty)$；单调递减区间为 $(-1,3)$．…………………… 4 分

(2) 由 (1) 可得函数 $f(x)$ 在区间 $[-2,-1)$ 上单调递增，在 $(-1,3)$ 上单调递减，在 $(3,4]$ 上单调递增．

可得 $x=-1$ 时，函数 $f(x)$ 取得极大值；$x=3$ 时，函数 $f(x)$ 取得极小值．…………………… 6 分

又 $f(-1)=$ [illegible]，$f(3)=-2e^3$，$f(-2)=\frac{13}{e^2}$，$f(4)=e^4$．……………………………………… 8 分

∴$x=4$ 时，函数 $f(x)$ 取得最大值为 e^4；$x=3$ 时，函数 $f(x)$ 取得最小值为 $-2e^3$．……………… 10 分

18．解：(1) $f(x)=2\sqrt{3}-4\sqrt{3}\cos^2\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)-4\sin\omega x\cos\omega x$ [illegible] $-2\sin 2\omega x=-\sqrt{3}\cos 2\omega x+\sin 2\omega x=2\sin\left(2\omega x-\frac{\pi}{3}\right)$．……………………………………………… 2 分

由题意知，$f(x)$ 的最小正周期为 π，所以 $T=\frac{2\pi}{2\omega}=\pi$，解得 $\omega=1$．……………………… 3 分

∴$f(x)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$，$-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 2x-\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，解得 $-\frac{\pi}{12}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{5\pi}{12}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$．…… 4 分

取 $k=1$，则 $\frac{11\pi}{12}\leqslant x\leqslant\frac{17\pi}{12}$，取 $k=0$，则 $-\frac{\pi}{12}\leqslant x\leqslant\frac{5\pi}{12}$．

所以 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上的单调递增区间为 $\left[0,\frac{5\pi}{12}\right]$，$\left[\frac{11\pi}{12},\pi\right]$．……………………………… 6 分

(2) 由 (1) 知 $f(x)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$，当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 时，$-\frac{\pi}{3}\leqslant 2x-\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{2\pi}{3}$．……………… 8 分

由 $y=\sin x$ 的对称性可知，$\left(2x_1-\frac{\pi}{3}\right)+\left(2x_2-\frac{\pi}{3}\right)=\pi$，解得 $x_1+x_2=\frac{5\pi}{6}$．………………… 11 分

所以 $\cos\frac{x_1+x_2}{2}=\cos\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$．…………………………………………………… 12 分

19．解：(1) $4^x+4^{-x}\leqslant 2^x+2^{-x}+\frac{7}{4}$，∴$(2^x+2^{-x})^2-2\leqslant 2^x+2^{-x}+\frac{7}{4}$，

即 $(2^x+2^{-x})^2-(2^x+2^{-x})-\frac{15}{4}\leqslant 0$，…………………………………………………… 2 分

$\left(2^x+2^{-x}-\frac{5}{2}\right)\left(2^x+2^{-x}+\frac{3}{2}\right)\leqslant 0$，解得 $-\frac{3}{2}\leqslant 2^x+2^{-x}\leqslant\frac{5}{2}$. ………………………………………………………… 4 分

因为 $2^x+2^{-x}\geqslant 2$，所以 $2\leqslant 2^x+2^{-x}\leqslant\frac{5}{2}$，

解得 $\frac{1}{2}\leqslant 2^x\leqslant 2$，所以 $-1\leqslant x\leqslant 1$，故 $M=[-1,1]$. ………………………………………………………… 6 分

(2) $m,n\in M$，且 $m>0,n>0$，则 $m,n\in(0,1]$，

$\sqrt{m}+2\sqrt{n}=1$，两边平方得 $m+4n+4\sqrt{mn}=1$. ………………………………………………………… 7 分

所以 $\frac{1}{4m}+\frac{1}{n}-\frac{3\sqrt{mn}}{n}=\frac{m+4n+4\sqrt{mn}}{4m}+\frac{m+4n+4\sqrt{mn}}{n}-\frac{3\sqrt{mn}}{n}=\frac{n}{m}+\frac{m}{n}+\sqrt{\frac{n}{m}}+\sqrt{\frac{m}{n}}+\frac{17}{4}$

$=\left(\sqrt{\frac{n}{m}}+\sqrt{\frac{m}{n}}\right)^2+\sqrt{\frac{n}{m}}+\sqrt{\frac{m}{n}}+\frac{9}{4}$. ………………………………………………………… 9 分

$\because m,n\in(0,1]$，$\sqrt{m}+2\sqrt{n}=1$，$\therefore$ 令 $t=\sqrt{\frac{n}{m}}+\sqrt{\frac{m}{n}}\geqslant 2$，当且仅当 $m=n=\frac{1}{9}$ 时等号成立. ……………… 10 分

所以 $\frac{1}{4m}+\frac{1}{n}-\frac{3\sqrt{mn}}{n}=t^2+t+\frac{9}{4}\geqslant\frac{33}{4}$.

综上，当 $m=n=\frac{1}{9}$ 时 $\frac{1}{4m}+\frac{1}{n}-\frac{3\sqrt{mn}}{n}$ 取到最小值 $\frac{33}{4}$. ………………………………………………………… 12 分

20.解：(1) 若 $a=2$，则 $f(x)=\ln(x+1)-2x+2$，$f(0)=2$，………………………………………………………… 1 分

$f'(x)=\frac{1}{x+1}-2$，则 $f'(0)=-1$. ………………………………………………………… 3 分

所以切线方程为 $y-2=-(x-0)$，即 $x+y-2=0$. ………………………………………………………… 5 分

(2) 由题意得 $ax\leqslant(x+1)[\ln(x+1)+2]$，

当 $x=0$ 时，$a\cdot 0\leqslant 2$，$a\in\mathbf{R}$；………………………………………………………… 6 分

当 $x>0$ 时，$a\leqslant\frac{(x+1)[\ln(x+1)+2]}{x}$，

设 $g(x)=\frac{(x+1)[\ln(x+1)+2]}{x}$，$g'(x)=\frac{x-2-\ln(x+1)}{x^2}$，

设 $h(x)=x-2-\ln(x+1)$，$h'(x)=\frac{x}{x+1}>0$，………………………………………………………… 8 分

则 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增，………………………………………………………… 9 分

$h(3)=1-\ln 4<0$，$h(4)=2-\ln 5>0$，所以存在 $x_0\in(3,4)$ 使得 $h(x_0)=0$，即 $x_0-2=\ln(x_0+1)$. …… 10 分

则有 $g(x)$ 在 $(0,x_0)$ 单调递减，在 $(x_0,+\infty)$ 单调递增，$g(x)\geqslant g(x_0)$，

所以 $a\leqslant g(x_0)=\frac{(x_0+1)[\ln(x_0+1)+2]}{x_0}=\frac{(x_0+1)[(x_0-2)+2]}{x_0}=x_0+1$，

因为 $x_0\in(3,4)$，所以 $x_0+1\in(4,5)$，所以整数 a 的最大值为 4. ………………………………………………………… 12 分

21.解：以筒车转轮的中心 O 为原点，与水面平行的直线为 x 轴建立平面直角坐标系，

(1) 设 $h=M\sin(\omega t+\varphi)+N$，$t\in[0,24]$，由题意知，$2M=8$，$M+N=6$，

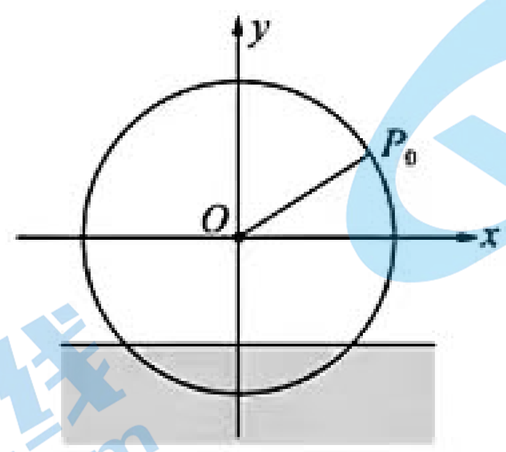
$\therefore M=4$，$N=2$，即 $h=4\sin(\omega t+\varphi)+2$. ………………………………………………………… 2 分

当 $t=0$ 时，$h=4\sin\varphi+2=4$，解得 $\sin\varphi=\frac{1}{2}$，

结合图像可知 $\varphi=\frac{\pi}{6}$， …………………………………………………………………………………… 3 分

又因为 $T=\frac{2\pi}{\omega}=24$，所以 $\omega=\frac{\pi}{12}$， ……………………………………………………………………… 4 分

综上，$h=4\sin\left(\frac{\pi}{12}t+\frac{\pi}{6}\right)+2$，$t\in[0,24]$． ……………………………………………………………… 5 分



(2)经过 t s 后 A 距离水面的高度 $h=4\sin\left(\frac{\pi}{12}t+\frac{\pi}{6}\right)+2$，由题意知 $\angle AOB=\frac{2\pi}{8}=\frac{\pi}{4}$，所以经过 t s 后 B 距离水面的高度 $h'=4\sin\left(\frac{\pi}{12}t-\frac{\pi}{12}\right)+2$， ……………………………………………………………………… 6 分

则盛水筒 B 与盛水筒 A 的高度差为 $H=|h-h'|=4\left|\sin\left(\frac{\pi}{12}t+\frac{\pi}{6}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{12}t-\frac{\pi}{12}\right)\right|$，

利用 $\sin\theta-\sin\varphi=2\cos\frac{\theta+\varphi}{2}\sin\frac{\theta-\varphi}{2}$，得 $H=4\left|\sin\left(\frac{\pi}{12}t+\frac{\pi}{6}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{12}t-\frac{\pi}{12}\right)\right|=8\sin\frac{\pi}{8}\left|\cos\left(\frac{\pi}{12}t+\frac{\pi}{24}\right)\right|$， ……

……… 8 分

当 $\frac{\pi}{12}t+\frac{\pi}{24}=k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，即 $t=-\frac{1}{2}+12k$，$k\in\mathbf{Z}$ 时，H 取最大值 $8\sin\frac{\pi}{8}$(m)． ………………… 10 分

又因为 $t\in[0,24]$，所以当 $t=11.5$ 或 $t=23.5$ 时，H 取最大值，综上，盛水筒 B 与盛水筒 A 的高度差的最大值约为 $8\sin\frac{\pi}{8}$ m，此时 $t=11.5$ 或 $t=23.5$． ……………………………………………………………… 12 分

2.解：(1)当 $a=0$ 时，$f(x)=\frac{x}{e^x}$，定义域为 $\mathbf{R}$，$f'(x)=\frac{1-x}{e^x}$， ……………………………………………… 1 分

当 $x>1$ 时，$f'(x)<0$；当 $x<1$ 时，$f'(x)>0$， ………………………………………………………………… 3 分

$\therefore f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调递增；在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，故 $f(x)$ 的最大值为 $f(1)=\frac{1}{e}$． ……………… 4 分

(2) $f(x)=\frac{x}{e^x}+a(x-1)^2$，$f'(x)=\frac{1-x}{e^x}+2a(x-1)=\frac{(x-1)(2ae^x-1)}{e^x}$， ……………………………… 5 分

①当 $a\leqslant0$ 时，$2ae^x-1<0$，当 $x>1$ 时，$f'(x)<0$；当 $x<1$ 时，$f'(x)>0$，$\therefore f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调递增；在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，所以 $f(x)$ 的极大值为 $f(1)=\frac{1}{e}<\frac{1}{2}$，符合题意． ……………………………… 6 分

②当 $a=\frac{1}{2e}$ 时，$f'(x)=\frac{(x-1)(e^{x-1}-1)}{e^x}$，当 $x>1$ 时，$f'(x)>0$；当 $x<1$ 时，$f'(x)>0$，$\therefore f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，此时，$f(x)$ 无极值点． ……………………………………………………………………………… 7 分

③当 $a>\frac{1}{2e}$ 时，令 $f'(x)=\frac{(x-1)(2ae^x-1)}{e^x}=0$，解得 $x_1=1$ 或 $x_2=-\ln(2a)$，且满足 $\ln(2a)>-1$．

当 $x>1$ 时，$f'(x)>0$；当 $-\ln(2a)<x<1$ 时，$f'(x)<0$，当 $x<-\ln(2a)$ 时，$f'(x)>0$，

$\therefore f(x)$ 在 $(-\infty,-\ln(2a))$ 上单调递增，在 $(-\ln(2a),1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $f(x)$ 的极大值 $f(-\ln(2a))=\dfrac{-\ln(2a)}{e^{-\ln(2a)}}+a[-\ln(2a)-1]^2=a[1+\ln(2a)]^2$，

令 $t=\ln 2a>-1$，则 $f(-\ln(2a))=\dfrac{1}{2}e^t(1+t^2)$，设 $g(t)=\dfrac{1}{2}e^t(1+t^2)$，

则 $g'(t)=$ [illegible]，所以 $g(t)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上单调递增，

由题意知 $f_{极大}(x)=f(-\ln(2a))=\dfrac{1}{2}e^t$ [illegible] $\leqslant\dfrac{1}{2}$，即 $g(t)\leqslant\dfrac{1}{2}=g(0)$，

所以 $t\leqslant 0$，即 $a\leqslant\dfrac{1}{2}$，故 $\dfrac{1}{2e}<a\leqslant\dfrac{1}{2}$. …………………………………………………… 9 分

④当 $0<a<\dfrac{1}{2e}$ 时，$f'(x)=\dfrac{(x-1)(2ae^x-1)}{e^x}=0$，解得 $x_1=1$ 或 $x_2=-\ln(2a)$，且满足 $-\ln(2a)>1$，

当 $x>-\ln(2a)$ 时，$f'(x)>0$；当 $1<x<-\ln(2a)$ 时，$f'(x)<0$，当 $x<1$ 时，$f'(x)>0$，

$\therefore f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调递增，在 $(1,-\ln(2a))$ 上单调递减，在 $(-\ln(2a),+\infty)$ 上单调递增，

所以 $f(x)$ 的极大值为 $f(1)=\dfrac{1}{e}<\dfrac{1}{2}$，符合题意. ………………………………………………… 11 分

综上，$a\in\left(-\infty,\dfrac{1}{2e}\right)\cup\left(\dfrac{1}{2e},\dfrac{1}{2}\right]$. …………………………………………………………… 12 分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 50W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数千场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。

推荐大家关注北京高考在线网站官方微信公众号：京考一点通，我们会持续为大家整理分享最新的高中升学资讯、政策解读、热门试题答案、招生通知等内容！