2023—2024 学年高中毕业班阶段性测试（六）

数学·答案

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分

1.A　2.C　3.D　4.D　5.B　6.A　7.D　8.C

二、多项选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分.每小题全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分.

9.AC　10.CD　11.ACD

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分

12.2^{n-1}　13.$\frac{2}{3}$　14.2

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15.解析 （1）抛掷正四面体玩具 3 次，所有可能的结果有 $4^3=64$ 种，

3 次记录的数字可以排成等差数列，如果 3 个数字相同，则不同的结果有 4 种，如果 3 个数字互不相同，则不同的结果有 $2A_3^3=12$ 种，

因此所求的概率为 $\frac{4+12}{64}=\frac{1}{4}$.

（2）X 的所有可能取值为 $1,2,3,4$，

$P(X=1)=\frac{1}{64}$，

$P(X=2)=\frac{C_3^1+C_3^2+C_3^3}{64}=\frac{7}{64}$，

$P(X=3)=\frac{2^2C_3^1+2C_3^2+C_3^3}{64}=\frac{19}{64}$，

$P(X=4)=\frac{3^2C_3^1+3C_3^2+C_3^3}{64}=\frac{37}{64}$.

故 X 的分布列为

X	1	2	3	4
P	$\frac{1}{64}$	$\frac{7}{64}$	$\frac{19}{64}$	$\frac{37}{64}$

X 的数学期望 $E(X)=1\times\frac{1}{64}+2\times\frac{7}{64}+3\times\frac{19}{64}+4\times\frac{37}{64}=\frac{55}{16}$.

16.解析 (1) 取 DE 的中点 M，连接 BM,AM.

因为 $BC\parallel DE, BC=\frac{1}{2}DE=DM$，所以四边形 $BCDM$ 是平行四边形，

所以 $BM\parallel CD$.

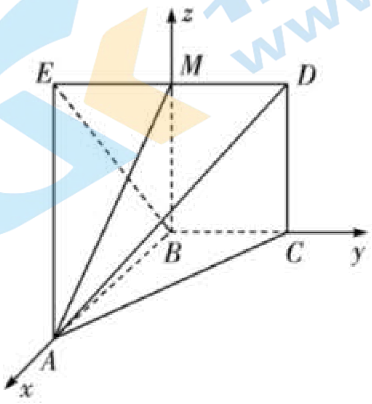
因为 $BC\perp CD$，所以 $BC\perp BM$.

又因为 $AB\perp BC, AB\cap BM=B$，所以 $BC\perp$ 平面 ABM，

所以 $DE\perp$ 平面 ABM，所以 $DE\perp AM$，

即 AM 是 DE 的垂直平分线，所以 $AE=AD$，即 $\triangle AED$ 是等腰三角形.

(2) 由 (1) 知 $BC\perp BM$，因为平面 $ABC\perp$ 平面 $BCDE$，所以 $BM\perp$ 平面 ABC，从而可知 BM,BC,BA 两两垂直.



以 B 为坐标原点，BA,BC,BM 所在直线为 x 轴、y 轴、z 轴建立空间直角坐标系，如图所示.

设 $A(a,0,0)(a>0)$，由已知得 $B(0,0,0),E(0,-1,1),D(0,1,1),C(0,1,0)$，

所以 $\overrightarrow{CD}=(0,0,1),\overrightarrow{CA}=(a,-1,0),\overrightarrow{BE}=(0,-1,1)$.

设 $\vec{n}=(x,y,z)$ 为平面 ACD 的法向量，

则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{CD}=0,\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{CA}=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}z=0,\\ ax=y,\end{cases}$ 取 $x=1$，得 $\vec{n}=(1,a,0)$.

设直线 BE 与平面 ACD 所成的角为 θ，

则 $\sin\theta=\left|\cos\langle\vec{n},\overrightarrow{BE}\rangle\right|=\frac{|a|}{\sqrt{2a^2+2}}=\frac{3\sqrt{5}}{10}$，

解得 $a=3$，故 $AB=3$.

17.解析 (1) 由 $(3-2n)S_{n+1}+2n(S_n+2a_n)=3S_n+2a_n$，

得 $(3-2n)(S_{n+1}-S_n)=2(1-2n)a_n$，即 $(3-2n)a_{n+1}=2(1-2n)a_n$，

所以$\dfrac{a_{n+1}}{1-2n}=2\cdot\dfrac{a_n}{3-2n}$，变形得$\dfrac{a_{n+1}}{3-2(n+1)}=2\cdot\dfrac{a_n}{3-2n}$，

故数列$\left\{\dfrac{a_n}{3-2n}\right\}$是首项为$\dfrac{a_1}{3-2}=1$，公比为 2 的等比数列，

所以$\dfrac{a_n}{3-2n}=2^{n-1}$，即$a_n=(3-2n)\cdot 2^{n-1}$.

(2) 因为$b_n=-\dfrac{a_{n+1}}{2^n}=2n-1$，

所以$c_n=\dfrac{a_n}{b_nb_{n+1}}=\dfrac{(3-2n)\cdot 2^{n-1}}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{2^{n-1}}{2n-1}-\dfrac{2^n}{2n+1}$，

$$T_n=\left(\frac{2^0}{1}-\frac{2^1}{3}\right)+\left(\frac{2^1}{3}-\frac{2^2}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{2^{n-2}}{2n-3}-\frac{2^{n-1}}{2n-1}\right)+\left(\frac{2^{n-1}}{2n-1}-\frac{2^n}{2n+1}\right)=1-\frac{2^n}{2n+1}.$$

因为$T_k\quad -\dfrac{51}{13}$，所以$1-\dfrac{2^k}{2k+1}\quad -\dfrac{51}{13}$，即$\dfrac{64}{13}\quad \dfrac{2^k}{2k+1}$.

设函数$f(n)=\dfrac{2^n}{2n+1},n\in\mathbf{N}^*$.

因为$f(n+1)-f(n)=\dfrac{2^{n+1}}{2n+3}-\dfrac{2^n}{2n+1}=\dfrac{(4n+2-2n-3)2^n}{(2n+3)(2n+1)}=\dfrac{(2n-1)2^n}{(2n+3)(2n+1)}>0$，

所以$f(n)=\dfrac{2^n}{2n+1}\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$单调递增.

又$f(6)=\dfrac{2^6}{2\times6+1}=\dfrac{64}{13}$，所以$k\quad 6$，

所以使$T_k\quad -\dfrac{51}{13}$成立的最大正整数k的值为 6.

18.解析 (1) 由题意知$Q(-a,0)$，设$F(c,0)(c>0)$.

因为$|QF|=3$，所以$a+c=3$①.

因为$\overrightarrow{DQ}=(-a,-1),\overrightarrow{DF}=(c,-1),\overrightarrow{DQ}\cdot\overrightarrow{DF}=-1$，

所以$-ac+1=-1$，即$ac=2$②.

由①②解得$a=2,c=1,b=\sqrt{4-1}=\sqrt{3}$，

所以C的方程为$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$.

(2) 设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，由题可设直线 $AB: y=kx+1$，则 $E(x_2,-y_2),y_1>0,y_2>0$.

令 $y=0$，得 $x=-\frac{1}{k}$，由 $-\frac{1}{k}<-2$，得 $0<k<\frac{1}{2}$.

由 $\begin{cases} y=kx+1, \\ 3x^2+4y^2=12, \end{cases}$ 得 $(3+4k^2)x^2+8kx-8=0$，

所以 $x_1+x_2=\frac{-8k}{3+4k^2},x_1x_2=\frac{-8}{3+4k^2}$.

直线 QA 的方程为 $y=\frac{y_1}{x_1+2}(x+2)$，

令 $x=1$，得 $y_M=\frac{3y_1}{x_1+2}$，

直线 QE 的方程为 $y=\frac{-y_2}{x_2+2}(x+2)$，

令 $x=1$，得 $y_N=-\frac{3y_2}{x_2+2}$，

所以 $|MN|=|y_M-y_N|=3\left(\frac{y_1}{x_1+2}+\frac{y_2}{x_2+2}\right)$，

因为 $\frac{y_1}{x_1+2}+\frac{y_2}{x_2+2}=\frac{kx_1+1}{x_1+2}+\frac{kx_2+1}{x_2+2}$

$=\frac{2kx_1x_2+(2k+1)(x_1+x_2)+4}{x_1x_2+2(x_1+x_2)+4}$

$=\frac{2k\times\left(\frac{-8}{3+4k^2}\right)+(2k+1)\times\left(\frac{-8k}{3+4k^2}\right)+4}{\frac{-8}{3+4k^2}+2\times\left(\frac{-8k}{3+4k^2}\right)+4}=\frac{3}{1-2k}$，

又 $|TF|=1+\frac{1}{k}$，

所以 $S_{\triangle TMN}=\frac{1}{2}\times\frac{9}{1-2k}\times\left(1+\frac{1}{k}\right)=\frac{9(k+1)}{2k(1-2k)}$.

设 $k+1=t$，则 $k=t-1,1<t<\frac{3}{2}$，

则 $S_{\triangle TMN}=\frac{9t}{2(t-1)(3-2t)}=\frac{9t}{2(-2t^2+5t-3)}=\frac{9}{2\left(-2t-\frac{3}{t}+5\right)}$

$$\frac{9}{2\left(5-2\sqrt{6}\right)}=\frac{9}{2}\left(5+2\sqrt{6}\right),$$

当且仅当$2t=\dfrac{3}{t}$，即$t=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$时等号成立，所以$\triangle TMN$面积的最小值为$\dfrac{9}{2}\left(5+2\sqrt{6}\right)$.

19.解析 (1) 当$m=2$时，$f\left(x\right)=\left(3-x\right)\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{2x}-2$,

则$f'\left(x\right)=\left(3-x-1\right)\mathrm{e}^{x}-2\mathrm{e}^{2x}=\left(2-x-2\mathrm{e}^{x}\right)\mathrm{e}^{x}$,

易知函数$h\left(x\right)=2-x-2\mathrm{e}^{x}$在$\mathbf{R}$上单调递减，又$h\left(0\right)=0$,

所以当$x<0$时，$h\left(x\right)>0$，即$f'\left(x\right)>0$，当$x>0$时，$h\left(x\right)<0$，即$f'\left(x\right)<0$,

所以$f\left(x\right)$在$\left(-\infty,0\right)$上单调递增，在$\left(0,+\infty\right)$上单调递减.

(2) 由题意知$f'\left(x\right)=\left(m+1-x-1\right)\mathrm{e}^{x}-m\mathrm{e}^{2x}=\left(m-x-m\mathrm{e}^{x}\right)\mathrm{e}^{x}$，且$f'\left(0\right)=0$.

令函数$g\left(x\right)=m-x-m\mathrm{e}^{x}$，则$g'\left(x\right)=-1-m\mathrm{e}^{x}$.

①若m 0，则$g'\left(x\right)<0,g\left(x\right)$在$\mathbf{R}$上单调递减.

又$g\left(0\right)=0$，则当$x<0$时，$g\left(x\right)>0$，所以$f'\left(x\right)>0,f\left(x\right)$在$\left(-\infty,0\right)$上单调递增,

当$x>0$时，$g\left(x\right)<0$，所以$f'\left(x\right)<0,f\left(x\right)$在$\left(0,+\infty\right)$上单调递减.

所以$f\left(x\right)$在$x=0$处取得极大值，不合题意.

②若$-1<m<0$，则$\ln\left(-\dfrac{1}{m}\right)>0$，令$g'\left(x\right)<0$，得$x<\ln\left(-\dfrac{1}{m}\right)$，故$g\left(x\right)$在$\left(-\infty,\ln\left(-\dfrac{1}{m}\right)\right)$上单调递减.

又$\left(-\infty,0\right)\subseteq\left(-\infty,\ln\left(-\dfrac{1}{m}\right)\right),g\left(0\right)=0$,

所以当$x<0$时，$g\left(x\right)>0$，从而$f'\left(x\right)>0,f\left(x\right)$在$\left(-\infty,0\right)$上单调递增;

当$0<x<\ln\left(-\dfrac{1}{m}\right)$时，$g\left(x\right)<0$，从而$f'\left(x\right)<0,f\left(x\right)$在$\left(0,\ln\left(-\dfrac{1}{m}\right)\right)$上单调递减,

所以$f\left(x\right)$在$x=0$处取得极大值，不合题意.

③若$m=-1$，则$\ln\left(-\dfrac{1}{m}\right)=0$，令$g'\left(x\right)>0$，解得$x>0$，令$g'\left(x\right)<0$，解得$x<0$,

所以 $g(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $g(x)$ 在 $x=0$ 处取得极小值，也是最小值，所以 $g(x)\quad g(0)=0$，从而 $f'(x)\quad 0$，

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增，不合题意.

④若 $m<-1$，则 $\ln\left(-\frac{1}{m}\right)<0$，

令 $g'(x)>0$，解得 $x>\ln\left(-\frac{1}{m}\right)$，故 $g(x)$ 在 $\left(\ln\left(-\frac{1}{m}\right),+\infty\right)$ 上单调递增.

又 $(0,+\infty)\subseteq\left(\ln\left(-\frac{1}{m}\right),+\infty\right), g(0)=0$，

故当 $\ln\left(-\frac{1}{m}\right)<x<0$ 时，$g(x)<0$，从而 $f'(x)<0, f(x)$ 在 $\left(\ln\left(-\frac{1}{m}\right),0\right)$ 上单调递减，

当 $x>0$ 时，$g(x)>0$，从而 $f'(x)>0, f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取得极小值，符合题意.

综上，m 的取值范围是 $(-\infty,-1)$.