数学试题（文科）

（考试时间：120 分钟　满分：150 分）

注意事项：

1. 答题前，务必在答题卡和答题卷规定的地方填写自己的姓名、准考证号和座位号后两位。
2. 答第 I 卷时，每小题选出答案后，用 2B 铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。
3. 答第 II 卷时，必须使用 0.5 毫米的黑色墨水签字笔在答题卷上书写，要求字体工整、笔迹清晰。作图题可先用铅笔在答题卷规定的位置绘出，确认后再用 0.5 毫米的黑色墨水签字笔描清楚。必须在题号所指示的答题区域作答，超出答题区域书写的答案无效，在试题卷、草稿纸上答题无效。
4. 考试结束，务必将答题卡和答题卷一并上交。

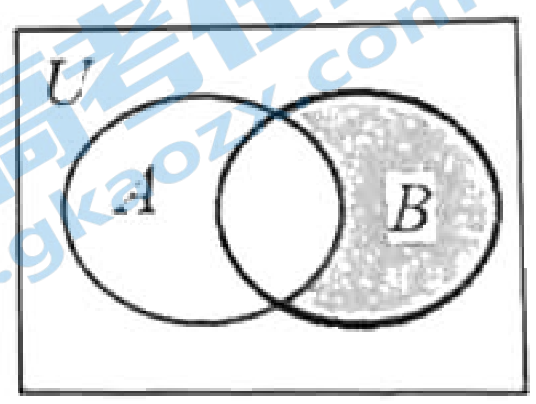
第 I 卷　(60 分)

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，满分 60 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1.设 $z=\dfrac{1+i}{2i}$（i 为虚数单位），则 $|z|=$

A. $\dfrac{1}{2}$　　B. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　C.1　　D. $\sqrt{2}$

2.已知全集 $U=R$，集合 $A=\{1,2,3,4,5\}$，$B=\{-2,0,1,2\}$ 之间关系的 Venn 图如图所示，则图中阴影部分表示的集合为



$\{-2,0\}$　　B. $\{-2\}$

C. $\{-2,0,1\}$　　D. $\{-2,0,2,1\}$

3.设正项等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_4-a_3=36$，$a_2=6$，则 a_1

A.3　　B. $\dfrac{1}{2}$　　2　　D. $\dfrac{1}{3}$

4.为庆祝中国共产党成立 100 周年，某校开展"唱红色歌曲，诵红色经典"歌咏比赛活动，甲、乙两位选手经历了 7 场初赛后进入决赛，他们的 7 场初赛成绩如右侧茎叶图所示.以下结论正确的是

A.乙成绩的极差比甲成绩的极差小

B.甲成绩的众数比乙成绩的中位数大

C.乙成绩的方差比甲成绩的方差小

D.甲成绩的平均数比乙成绩的平均数小

甲		乙
8	7	2
8 6 5 5 4	8	4 6 7 9
2	9	3 4

密　封　线　内　不　要　答　题

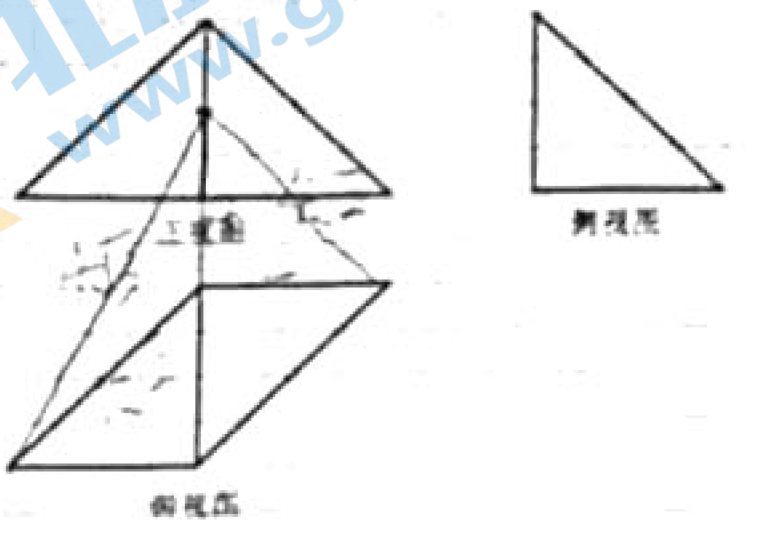
5.在平面直角坐标系中，已知点 $A(\cos15^\circ,\sin15^\circ)$，$B(\cos75^\circ,\sin75^\circ)$，则 $|AB|=$

A.1　　B.$\sqrt{2}$　　C.$\sqrt{3}$　　D.2

6.已知 $f(x)=a-\dfrac{2}{3^x+1}$（a 为常数）为奇函数，则满足 $f(ax)>f(1)$ 的实数 x 的取值范围是

A.$(1,+\infty)$　　B.$(-\infty,1)$　　C.$(-1,+\infty)$　　D.$(-\infty,-1)$

7.如图，网格纸中小正方形的边长为 1，粗实线画出的是一个四棱锥的三视图，则该四棱锥最长棱的长度为



A.$4\sqrt{2}$

B.$4\sqrt{3}$

C.8

D.$8\sqrt{2}$

8.右图上半部分为一个油桃园.每年油桃成熟时，园主都需要雇佣人工采摘，并沿两条路径将采摘好的油桃迅速地运送到水果集散地 C 处销售. 路径 1：先集中到 A 处，再沿公路 AC 运送；路径 2：先集中到 B 处，再沿公路 BC 运送. 园主在果园中画定了一条界线，使得从该界线上的点出发，按这两种路径运送油桃至 C 处所走路程一样远.已知 $AC=3\text{km}$，$BC=4\text{km}$，若这条界线是曲线 E 的一部分，则曲线 E 为

A.圆

B.椭圆

C.抛物线

D.双曲线

9.若函数 $f(x)=\begin{cases}2^x, & 0<x<2,\\ 4-x, & x\ge 2\end{cases}$ 满足 $f(a)=f(2^a)$，则 $f(2a)=$

A.2　　B.0

C.-2　　D.-4

10.某市抗洪指挥部接到最新雨情通报，未来 24h 城区拦洪坝外洪水将超过警戒水位，因此需要紧急抽调工程机械加高加固拦洪坝.经测算，加高加固拦洪坝工程需要调用 20 台某型号翻斗车，且每辆翻斗车需要平均工作 24h.而抗洪指挥部目前只有一辆翻斗车可立即投入施工，其余翻斗车需要从其他施工现场抽调.若抽调的翻斗车每隔 20min 才有一辆到达施工现场投入工作，要在 24h 内完成拦洪坝加高加固工程，指挥部至少还需要抽调这种型号翻斗车

A.25 辆　　B.24 辆　　C.23 辆　　D.22 辆

11.在三棱锥 $S-ABC$ 中，$\angle SAC=\angle SBC=\dfrac{\pi}{2}$，$\angle ACB=\dfrac{2\pi}{3}$，$AC=BC=1$. 若三棱锥 $S-ABC$ 的体积为 1，则该三棱锥外接球的表面积为

A.13π　　B.$\dfrac{37\pi}{3}$　　C.49π　　D.52π

12.若函数 $f(x)=a^x-x^a$（$a>0$，$a\ne1$，$x>0$）只有一个零点，则实数 a 的取值范围为

A.$(0,1)\cup(1,e]$　　B.$(0,1)\cup\{e\}$

C.$\left(0,\dfrac{e}{3}\right]\cup\{e\}$　　D.$(1,e]\cup\{e^2\}$

第II卷 （非选择题 共 90 分）

本卷包括必考题和选考题两部分. 第 13 题—第 21 题为必考题，每个试题考生都必须作答. 第 22 题、第 23 题为选考题，考生根据要求作答.

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，满分 20 分.把答案填在答题卡上的相应位置.

13.命题："$\forall x\in(0,+\infty)$，$2^x>1$"的否定是______________.

14.在$\triangle ABC$中，$\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{DC}$，若$\overrightarrow{AD}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，则$\frac{x}{y}$的值是________.

15.已知抛物线C：$y^2=2px$（$p>0$）的焦点为F，直线$y=4$与y轴的交点为P，与抛物线C的交点为Q，若$|QF|=2|PQ|$，则抛物线C的方程为________.

16.已知函数$f(x)=\cos(\omega x+\varphi)(\omega>0)$是奇函数，且存在正数$\alpha$使得函数$f(x)$在$[0,\ \alpha]$上单调递增. 若函数$f(x)$在区间$\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}\right]$上取得最小值时的$x$值有且仅有一个，则$\omega$的取值范围是______________.

三、解答题：本大题共 6 小题，满分 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（本小题满分 12 分）

在ΔABC中，角A，B，C的对边分别为a，b，c，且$a=b(\sin C+\cos C)$.

(1) 求B；

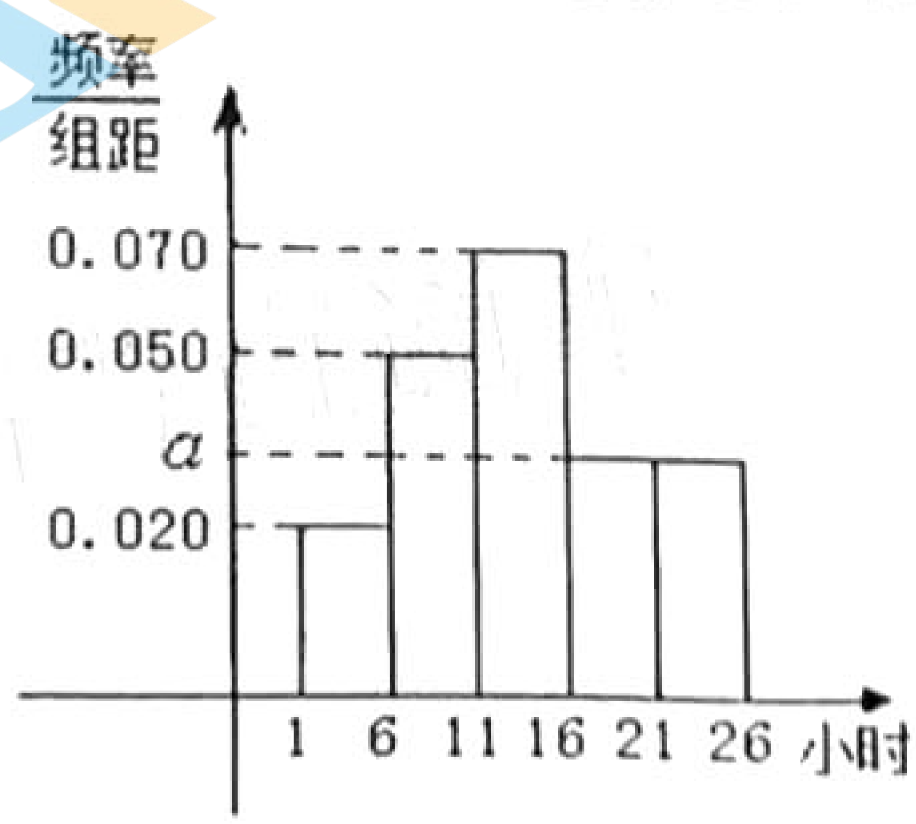
(2) 若$b=1$，求ΔABC面积的最大值.

18.（本小题满分 12 分）

某中学为了解学生参加学校暑期开设的网课学习情况，从网站注册的学生中随机选取了 100 位，统计某周每位学生的学习时长，绘制成如图所示的频率分布直方图，并从学习时长落在$[6,\ 11)$，$[21,\ 26]$两组内的学生中，按分层抽样方法抽取了 8 位学生进行跟踪调查.

(1) 求图中a的值并估算这 100 位学生学习的平均时长；

(2) 若从上述 8 位学生中随机抽取 2 位家访，求这 2 位学生来自不同组别的概率.

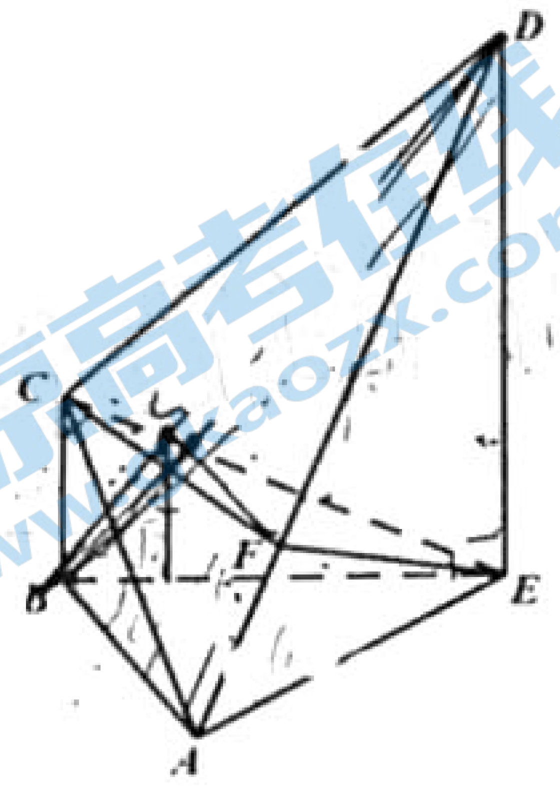


19.（本小题满分 12 分）

如图，在四棱锥 $A-BCDE$ 中，$BC\perp$ 平面 ABE，$DE\parallel BC$，$DE=3BC=6$，$\angle BAC=45^\circ$，$\angle DAE=\angle ABE=60^\circ$.

(1) 求证：平面 $ABC\perp$ 平面 ADE；

(2) 若点 F 满足 $\overrightarrow{AF}=\lambda\overrightarrow{FD}$，且 $AB\parallel$ 平面 CEF，求 λ 的值.



20.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=(x+1)\ln x$，曲线 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程为 $y=g(x)$.

(1) 求证：当 $x>1$ 时，$f(x)>g(x)$；

(2) 求证：$\dfrac{\ln 2}{1}+\dfrac{\ln 7}{6}+\cdots+\dfrac{\ln(n^2-2)}{n^2-3}>\dfrac{3}{2}-\dfrac{2}{n}$（$n\geq 2$，$n\in N^*$）.

21.（本小题满分 12 分）

在平面直角坐标系中，已知点 $P(1,0)$，$Q(4,1)$.过点 P 的直线 l 与椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$ 分别交于点 M，N.

(1) 若直线 l 与 x 轴垂直，求 ΔMNQ 的面积；

(2) 记直线 QM，QP，QN 的斜率分别为 k_1，k_2，k_3，求证：k_1，k_2，k_3 成等差数列.

请考生在第 22、23 题中任选一题作答.注意：只能做所选定的题目，如果多做，则按所做的第一个题目计分，作答时，请用 2B 铅笔在答题卡上，将所选题号对应的方框涂黑.

22.（本小题满分 10 分）选修 4-4：坐标系与参数方程

在平面直角坐标系 xOy 中，直线 l 过点 $M(1,2)$.以坐标原点为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C 的极坐标方程为 $\rho\cos^2\theta=4\sin\theta$.

(1) 设直线 l 的倾斜角为 α，写出其参数方程，并求曲线 C 的直角坐标方程；

(2) 若直线 l 与曲线 C 交于 P，Q 两点，且线段 PQ 的中点为 M，求直线 l 的方程.

23.（本小题满分 10 分）选修 4-5：不等式选讲

已知函数 $f(x)=|x+a|+2|x-1|$.

(1) 当 $a=2$ 时，解不等式 $f(x)\leq 4$；

(2) 若存在 $x\in[1,2]$，使得不等式 $f(x)>x^2$ 成立，求实数 a 的取值范围.

合肥市2021年高三第三次教学质量检测

数学试题（文科）参考答案及评分标准

一、选择题：本大题共12小题，每小题5分，共60分.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	B	A	C	D	A	A	B	D	A	C	D	B

二、填空题：本大题共4小题，每小题5分，共20分.

13. $\exists x_0\in(0,+\infty)$，$2^{x_0}\le 1$　　14. $\frac{1}{2}$　　15. $y^2=8x$　　16. $\left(0,\frac{15}{2}\right)$

三、解答题：

17.（本小题满分12分）

解：(1) 因为 $a=b(\sin C+\cos C)$，由正弦定理得 $\sin A=\sin B(\sin C+\cos C)$，

即 $\sin(B+C)=\sin B(\sin C+\cos C)$，∴ $\cos B\sin C=\sin B\sin C$.

∵在 ΔABC 中，$\sin C>0$，∴ $\cos B=\sin B$，即 $\tan B=1$.

∵ $B\in(0,\pi)$，∴ $B=\frac{\pi}{4}$.　　……………………………5分

(2) 由余弦定理 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$ 得 $\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{a^2+c^2-1}{2ac}$，

∴ $\sqrt{2}ac=a^2+c^2-1\ge 2ac-1$，即 $ac\le\frac{1}{2-\sqrt{2}}=\frac{2+\sqrt{2}}{2}$，

∴ ΔABC 的面积 $S=\frac{1}{2}ac\sin B\le\frac{1}{2}\cdot\frac{2+\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}+1}{4}$，等号当且仅当 $a=c$ 时取等号，

∴ ΔABC 面积的最大值为 $\frac{\sqrt{2}+1}{4}$.　　……………………………12分

18.（本小题满分12分）

解：(1) $a=0.03$，$\bar{x}=0.1\times3.5+0.25\times8.5+0.35\times13.5+0.15\times18.5+0.15\times23.5=13.5$.

可以估算，这100位学生学习的平均时长为13.5小时.　……………………………5分

(2) 落在 $[6,11)$ 内数据个数为 $5\times0.05\times100=25$，落在 $[21,26]$ 内数据个数为 $5\times0.03\times100=15$.

按照分层抽样方法抽取8人，则在 $[6,11)$ 内抽取5人，记为 a_1，a_2，a_3，a_4，a_5；在 $[21,26]$ 内抽取3人，记为 b_1，b_2，b_3. 从这8位学生中每次抽取2人，可能的情况有：

(a_1,a_2)，(a_1,a_3)，(a_1,a_4)，(a_1,a_5)，(a_1,b_1)，(a_1,b_2)，(a_1,b_3)；

(a_2,a_3)，(a_2,a_4)，(a_2,a_5)，(a_2,b_1)，(a_2,b_2)，(a_2,b_3)；

(a_3,a_4)，(a_3,a_5)，(a_3,b_1)，(a_3,b_2)，(a_3,b_3)；

(a_4,a_5)，(a_4,b_1)，(a_4,b_2)，(a_4,b_3)；

(a_5,b_1)，(a_5,b_2)，(a_5,b_3)；

(b_1,b_2)，(b_1,b_3)；

(b_2,b_3)，共有28种结果，且各结果等可能.

其中，2位学生来自不同组别的取法有15种.

∴抽取的2位学生来自不同组别的概率为 $p=\frac{15}{28}$.　……………………………12分

19.（本小题满分 12 分）

(1) 证明：$\because DE \parallel BC$，$BC \perp$ 平面 ABE，$\therefore DE \perp$ 平面 ABE.

又$\because AE \subset$ 平面 ABE，$\therefore DE \perp AE$.

在 $Rt\Delta ADE$ 中，由 $\angle DAE = 60^\circ$，$DE = 6$ 得，$AE = 2\sqrt{3}$.

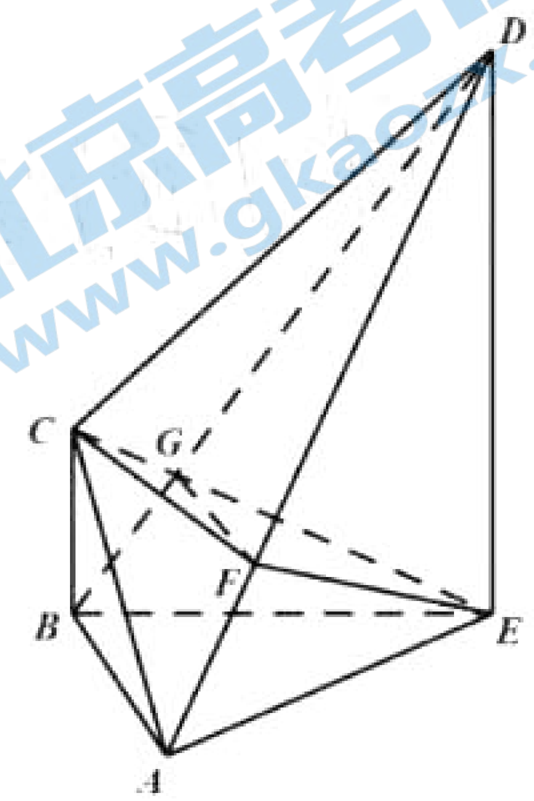
在 ΔABE 中，$AE^2 = AB^2 + BE^2 - 2AB \cdot BE\cos\angle ABE$，解得 $BE = 4$.

$\therefore BE^2 = AB^2 + AE^2$，即 $AB \perp AE$.

而 $BC \perp AE$，AB，$BC \subset$ 平面 ABC，$AB \cap BC = B$，

$\therefore AE \perp$ 平面 ABC.

又$\because AE \subset$ 平面 ADE，$\therefore$ 平面 $ABC \perp$ 平面 ADE. ……………………………………6 分



(2) 连接 BD 交 CE 于点 G，连接 FG.

$\because AB \parallel$ 平面 CEF，平面 $ABD \cap$ 平面 $CEF = FG$，

$\therefore AB \parallel FG$，$\therefore \dfrac{AF}{FD} = \dfrac{BG}{GD}$.

在直角梯形 $BCDE$ 中，$\Delta BCG \backsim \Delta DEG$，$\therefore \dfrac{BG}{GD} = \dfrac{BC}{DE} = \dfrac{1}{3}$，

$\therefore \lambda = \dfrac{1}{3}$. ……………………………………………………12 分

20.（本小题满分 12 分）

解：(1) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0，+\infty)$，$f'(x) = \ln x + \dfrac{x+1}{x}$.

又$\because f'(1) = 2$，$f(1) = 0$，$\therefore$ 该切线方程为 $y = 2(x-1)$，即 $g(x) = 2(x-1)$.

设 $F(x) = (x+1)\ln x - 2x + 2$，则 $F'(x) = \ln x + \dfrac{1}{x} - 1$.

令 $h(x) = F'(x)$，则 $h'(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x-1}{x^2}$.

当 $x > 1$ 时，$h'(x) > 0$，$\therefore F(x)$ 在 $(1，+\infty)$ 上单调递增.

又$\because h(1) = 0$，$\therefore h(x) = F'(x) > 0$，即 $F(x)$ 在 $(1，+\infty)$ 上单调递增，$\therefore$ 当 $x > 1$ 时，$F(x) > F(1) = 0$，

$\therefore$ 当 $x > 1$ 时，$f(x) > g(x)$. ……………………………………………6 分

(2) 由 (1) 知，当 $x > 1$ 时，$(x+1)\ln x > 2(x-1)$.

令 $x = n^2 - 2 > 1$（$n \ge 2$，$n \in N$），则 $(n^2-1)\ln(n^2-2) > 2(n^2-3)$，

$$\therefore \frac{\ln(n^2-2)}{n^2-3} > \frac{2}{(n^2-1)} = \frac{2}{(n-1)(n+1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1},$$

$$\therefore \sum_{k=2}^{n}\frac{\ln(k^2-2)}{k^2-3} > \left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right),$$

化简得 $\dfrac{\ln 2}{1} + \dfrac{\ln 7}{6} + \cdots + \dfrac{\ln(n^2-2)}{n^2-3} > 1 + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1} > \dfrac{3}{2} - \dfrac{2}{n}$. ………………12 分

21.（本小题满分 12 分）

解：(1) 当直线 l 与 x 轴垂直时，其方程为 $x = 1$，代入 $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{2} = 1$ 得到 $y^2 = \dfrac{3}{2}$，$\therefore |MN| = \sqrt{6}$.

由点 Q 到 MN 的距离为 3 知，$S = \dfrac{3}{2}|MN| = \dfrac{3}{2}\sqrt{6}$. ………………………………5 分

(2) 记 Q (4，1). 由 (1) 知，当直线 l 与 x 轴垂直时，$k_1 + k_3 = \dfrac{1-\sqrt{\frac{3}{2}}}{3} + \dfrac{1+\sqrt{\frac{3}{2}}}{3} = \dfrac{2}{3}$，而 $k_2 = \dfrac{1}{3}$，满足 $k_1 + k_3 = 2k_2$，

$\therefore k_1$，k_2，k_3 成等差数列.

当直线l与x轴不垂直时，设l：$y=k(x-1)$，与$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$联立得$(2k^2+1)x^2-4k^2x+2k^2-4=0$.

令$M(x_1, y_1)$，$N(x_2, y_2)$，则$\begin{cases}x_1+x_2=\dfrac{4k^2}{2k^2+1}\\ x_1x_2=\dfrac{2k^2-4}{2k^2+1}\end{cases}$，且$\Delta>0$.

$k_1+k_3=\frac{1-y_1}{4-x_1}+\frac{1-y_2}{4-x_2}=\frac{(1-y_1)(4-x_2)+(1-y_2)(4-x_1)}{(4-x_1)(4-x_2)}$，将$\begin{cases}y_1=k(x_1-1)\\ y_2=k(x_2-1)\end{cases}$代入并整理得

$k_1+k_3=\frac{2kx_1x_2-(5k+1)(x_1+x_2)+8k+8}{x_1x_2-4(x_1+x_2)+16}=\frac{2k(2k^2-4)-4k^2(5k+1)+8(k+1)(2k^2+1)}{2k^2-4-16k^2+16(2k^2+1)}$

$=\frac{12k^2+8}{18k^2+12}=\frac{2}{3}$.

而$k_2=\frac{1}{3}$，满足$k_1+k_3=2k_2$，∴k_1，k_2，k_3成等差数列.

综上，k_1，k_2，k_3成等差数列. ……………………………12分

22.（本小题满分10分）

(1) 直线l的参数方程为$\begin{cases}x=1+t\cos\alpha\\ y=2+t\sin\alpha\end{cases}$（$t$为参数）. 由$\rho\cos^2\theta=4\sin\theta$得，$\rho^2\cos^2\theta=4\rho\sin\theta$，

∴曲线C的直角坐标方程为$x^2=4y$. ……………………………5分

(2) 将直线l的参数方程$\begin{cases}x=1+t\cos\alpha\\ y=2+t\sin\alpha\end{cases}$代入$x^2=4y$，并整理得$t^2\cdot\cos^2\alpha+(2\cos\alpha-4\sin\alpha)t-7=0$.

设点P,Q对应的参数分别为t_1,t_2，

由线段PQ的中点为M得$t_1+t_2=0$，即$-\frac{2\cos\alpha-4\sin\alpha}{\cos^2\alpha}=0$，

∴直线l的斜率$k=\tan\alpha=\frac{1}{2}$.

∴直线l的方程为$y-2=\frac{1}{2}(x-1)$，即$x-2y+3=0$. ……………………………………10分

23.（本小题满分10分）

解：(1) 当$a=2$时，$f(x)=|x+2|+2|x-1|$.

当$x\le-2$时，$f(x)=-x-2-2x+2\le4$，解得$x\ge-\frac{4}{3}$，结合$x\le-2$得，解集为$\varnothing$；

当$-2<x\le1$时，$f(x)=x+2-2x+2\le4$，解得$x\ge0$，结合$-2<x\le1$得，$0\le x\le1$；

当$x>1$时，$f(x)=x+2+2x-2\le4$，解得$x\le\frac{4}{3}$，结合$x>1$得，$1<x\le\frac{4}{3}$.

∴原不等式的解集为$\left[0,\ \frac{4}{3}\right]$. ……………………………5分

(2) 当$1\le x\le2$时，$|x+a|+2|x-1|>x^2$可化为$|x+a|>x^2-2x+2$，

∴$x+a>x^2-2x+2$或$x+a<-x^2+2x-2$，

即存在$x\in[1,\ 2]$，使得$a>x^2-3x+2$，或$a<-x^2+x-2$.

∴$a>-\frac{1}{4}$，或$a<-2$，

∴实数a的取值范围为$(-\infty,-2)\cup\left(-\frac{1}{4},+\infty\right)$. ……………………………10分