通州区 2020—2021 学年第一学期高三期中质量检测

数学试卷

2020 年 11 月

考生须知	
	1. 本试卷分为两部分，共 4 页。总分为 150 分。考试时间为 120 分钟。
	2. 试题答案一律填涂或书写在答题卡上，在试卷上作答无效。
	3. 在答题卡上，选择题用 2B 铅笔作答，其他试题用黑色字迹签字笔作答。
	4. 考试结束后，请将答题卡交回。

第一部分　选择题(共 40 分)

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分．在每小题列出的四个备选答案中，只有一个是符合题目要求的．

1. 已知集合 $A=\{-1,0,1,2\}$，$B=\{x\mid 0<x\leqslant 2\}$，那么 $A\cap B$ 等于

A. $\{1\}$　　B. $\{2\}$　　C. $\{-1,0\}$　　D. $\{1,2\}$

2. 在复平面内，复数 $z=\mathrm{i}(1+2\mathrm{i})$（i 是虚数单位）对应的点位于

A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限

3. 已知数列 $\{a_n\}$ 是等差数列，且 $a_1=2$，$a_4=8$，那么数列 $\{a_n\}$ 的前 6 项的和是

A. 42　　B. 48　　C. 62　　D. 126

4. 下列函数中，值域为 **R** 且不是奇函数的是

A. $f(x)=\dfrac{1}{x}$　　B. $f(x)=x^3$

C. $f(x)=2^x$　　D. $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}x$

5. 已知平面向量 $\boldsymbol{a}=(1,0)$，$\boldsymbol{b}=(-1,m)$，那么“$|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{13}$”是“$m=2$”的

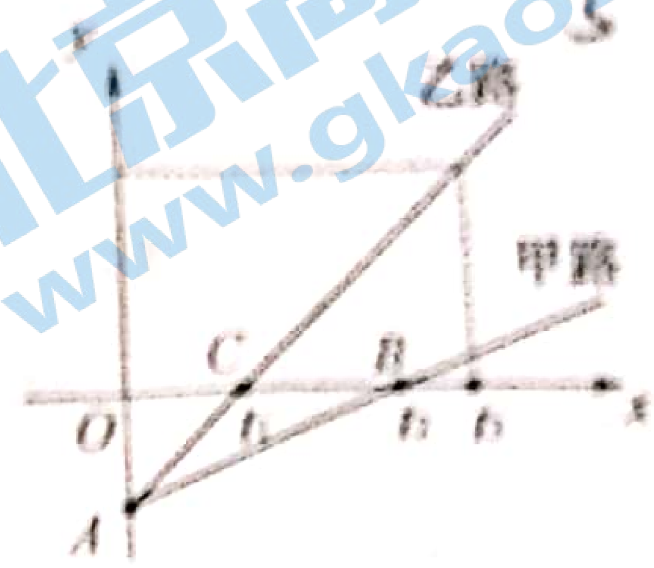
A. 充分而不必要条件　　B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

6. 已知 $\sin\alpha=\frac{4}{5}$，且 $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，那么 $\tan\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$ 等于

A. -7　　B. $-\frac{1}{7}$　　C. $\frac{1}{7}$　　D. 7

7. 有甲、乙两条公共汽车线路，两路车所在公司收支差额 y（单位：千元）与乘客量 x（单位：千人）的关系如图所示．给出下列四个结论：



①当 $x=0$ 时，甲、乙两路车的公司都亏损且亏损额相同；

②当 $x>t_1$ 时，乙路车的公司将盈利；

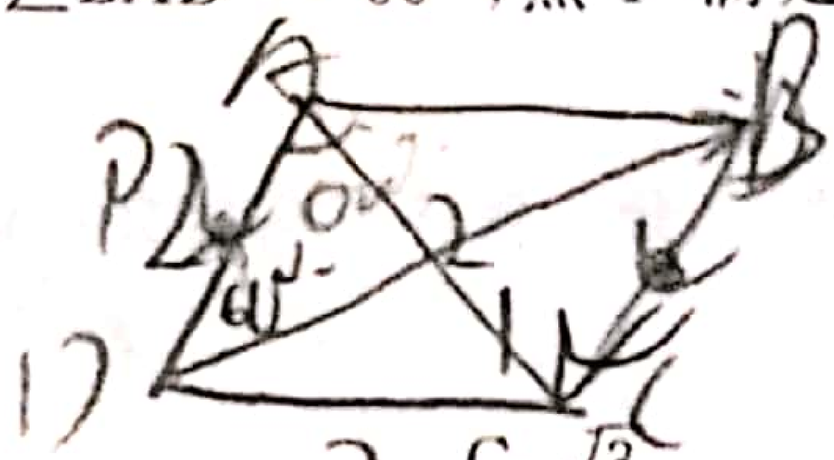
③当 $x\in(t_1,t_2)$ 时，甲、乙两路车的公司都亏损；

④当 $x\in(t_2,t_3)$ 时，甲、乙两路车的公司都盈利且乙路车的公司盈利更高．

其中正确结论的个数是

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

8. 已知菱形 $ABCD$ 的边长为 2，$\angle BAD=60°$，点 P 满足 $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})$，那么 $\overrightarrow{DP}\cdot\overrightarrow{DB}$ 等于



A. 1　　B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. 2

9. 已知函数 $f(x)=e^x-\frac{\ln x}{a}$，若 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上是增函数，则实数 a 的取值范围是

A. $\left(0,\frac{1}{2e^2}\right]$　　B. $\left[\frac{1}{e},+\infty\right)$

C. $(-\infty,0)\cup\left(0,\frac{1}{2e^2}\right]$　　D. $(-\infty,0)\cup\left[\frac{1}{e},+\infty\right)$

10. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项的乘积为 Q_n，且 $Q_n=2^{(n-1)^2}$，若对任意 $n\in N^*$，都有 $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}<m$，则实数 m 的最小值是

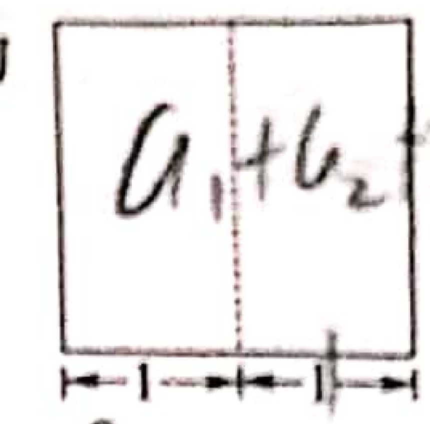
A. $\frac{4}{3}$　　B. $\frac{5}{3}$　　C. $\frac{8}{3}$　　D. $\frac{10}{3}$

第二部分　非选择题(共 110 分)

二、填空题：本大题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分．

11. 已知函数 $f(x)=x+1+\frac{1}{x}(x>0)$，那么当 $x=$ 1 时，$f(x)$ 取得最小值．

12. 在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AA_1\perp$ 底面 ABC，底面 ABC 是边长为 2 的正三角形，该三棱柱的正视图如图所示，那么该三棱柱的体积是 $2\sqrt{3}$．



13. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且满足 $S_n+a_n=2$，那么 $a_6=$ $\frac{1}{32}$

14. 已知函数 $f(x)=\cos(x+\varphi)$，若 $\exists x_0\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$，使得 $f(x_0)=1$，则常数 φ 的一个取值为 $-\frac{\pi}{3}$

15. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}2^{|x|}, x<0,\\ \frac{x^2}{e^x}, x\geqslant 0,\end{cases}$ 设函数 $F(x)=f(x)-a$，若 $F(x)$ 无零点，则实数 a 的取值范围是____．

三、解答题：本大题共 6 小题，共 85 分．解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程．

16. (本题 13 分)

已知函数 $f(x)=2\sin^2x+\sin 2x-1$．

(Ⅰ)求 $f(x)$ 的最小正周期；

(Ⅱ)若 $x\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\right]$ 时，求 $f(x)$ 的最小值．

17. (本题 13 分)

已知函数 $f(x)=x^2+bx-2\,(b\in\mathbf{R})$．

(Ⅰ)若对于任意 $x\in\mathbf{R}$，都有 $f(-x)=f(x)$，求 b 的值；

(Ⅱ)若 $b>0$，$f(x)$ 的最小值是 -3，求 $f(x)$ 在区间 $[0,2]$ 上的最大值．

18. (本题 13 分)

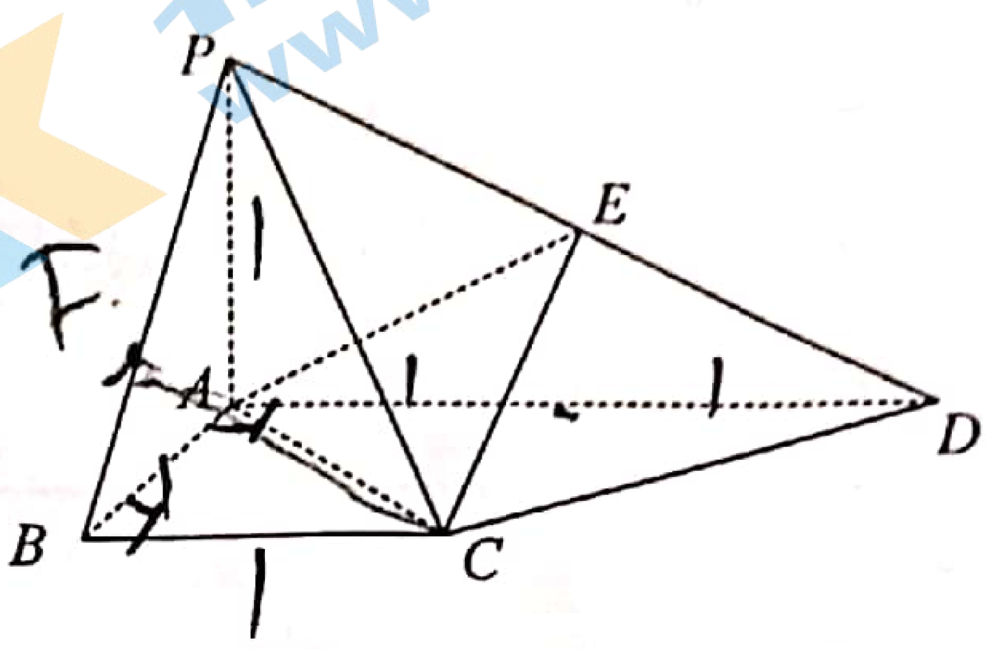
在 $\triangle ABC$ 中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，已知 $a=2$，$b=3$，$\frac{\sin 2B}{\sin A}=\frac{3\sqrt{7}}{14}$．

（Ⅰ）求 $\cos B$ 的值；

（Ⅱ）求 c 的值及 $\triangle ABC$ 的面积 $S_{\triangle ABC}$．

19．（本题 16 分）

如图，四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为梯形，$AD\parallel BC$，$\angle ABC=90^\circ$，$PA\perp$ 平面 $ABCD$，E 是 PD 的中点，$PA=AB=BC=1$，$AD=2$．



（Ⅰ）求证：$PD\perp AB$；

（Ⅱ）求直线 PC 与平面 AEC 所成角的正弦值；

（Ⅲ）在线段 PB 上是否存在一点 F，使得平面 $AFC\perp$ 平面 AEC，若存在，求出 $\dfrac{|PF|}{|PB|}$ 的值；若不存在，请说明理由．

20．（本题 15 分）

已知函数 $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$．

（Ⅰ）求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(2,f(2))$ 处的切线方程；

（Ⅱ）求 $f(x)$ 的极值；

（Ⅲ）设函数 $g(x)=f(x)+x^2-\dfrac{2}{x}$，当 $x>-1$ 时，求 $g(x)$ 的单调区间．

21．（本题 15 分）

设非空集合 $M\subseteq\mathbf{R}$，函数 $f(x)$ 的定义域为 D，若对任意 $t\in M$ 且 $x\in D$，不等式 $f(x+t)\geqslant f(x)$ 恒成立，则称函数 $f(x)$ 具有 M 性质．

（Ⅰ）当 $M=\{1\}$ 时，求证：函数 $h(x)=2^x$ 具有 M 性质；

（Ⅱ）当 $M=\{m\mid -1<m<0\}$ 时，若函数 $g(x)=|x^2+2x|$，$x\in(-\infty,a]$ 具有 M 性质，求 a 的取值范围；

（Ⅲ）当 $M=\{2,b\}$，$b\in\mathbf{Z}$，若 D 为整数集且具有 M 性质的函数均为常值函数，求所有符合条件的 b 的值．

通州区 2020—2021 学年第一学期高三期中质量检测

数学试卷参考答案和评分标准

2020 年 11 月

一、选择题:本大题共 10 小题,每小题 4 分,共 40 分.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	D	B	A	D	B	B	C	A	D	B

二、填空题:本大题共 5 小题,每小题 5 分,共 25 分.

11. 1　　12. $2\sqrt{3}$　　13. $\frac{1}{32}$　　14. $-\frac{\pi}{3}$ (答案不唯一)　　15. $(-\infty,0)\cup\left(\frac{4}{e^2},1\right]$

三、解答题:本大题共 6 小题,共 85 分.

16. (本题 13 分)

解:(Ⅰ)因为 $f(x)=2\sin^2x+\sin2x-1$,

所以 $f(x)=\sin2x-\cos2x$ ……………………………… 3 分

$=\sqrt{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$. ……………………………… 6 分

所以 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$.

所以 $f(x)$的最小正周期是 π. ……………………………… 8 分

(Ⅱ)因为 $\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{3\pi}{4}$,所以 $\pi\leqslant 2x\leqslant\frac{3\pi}{2}$.

所以 $\frac{3\pi}{4}\leqslant 2x-\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{5\pi}{4}$. ……………………………… 10 分

所以当 $2x-\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{4}$,即 $x=\frac{3\pi}{4}$ 时, ……………………………… 11 分

$f(x)$取得最小值,最小值是 $\sqrt{2}\sin\frac{5\pi}{4}=-1$.

所以 $x\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\right]$ 时,$f(x)$的最小值是 -1. ……………………………… 13 分

17. (本题 13 分)

解:(Ⅰ)因为函数 $f(x)=x^2+bx-2$,

所以 $f(-x)=x^2-bx-2$. ……………………………… 3 分

因为 $f(-x)=f(x)$,

所以 $x^2-bx-2=x^2+bx-2$. ……………………………… 5 分

所以 $b=0$. ……………………………… 6 分

(Ⅱ)因为 $f(x)$的最小值是-3,

所以 $\dfrac{-8-b^2}{4}=-3$.

因为 $b>0$,所以 $b=2$. …………………………………………………………………… 9 分

所以 $f(x)=x^2+2x-2$. …………………………………………………………………… 11 分

因为 $f(x)$ 在区间 $[0,2]$ 上单调递增, ………………………………………………… 13 分

所以 $f(x)$ 在区间 $[0,2]$ 上最大值是 $f(2)=6$.

18.(本题 13 分)

解:(Ⅰ)因为 $\dfrac{\sin 2B}{\sin A}=\dfrac{3\sqrt{7}}{14}$,

………………………………………………………………………………………… 2 分

所以 $\dfrac{2\sin B\cos B}{\sin A}=\dfrac{3\sqrt{7}}{14}$.

………………………………………………………………………………………… 4 分

由正弦定理得 $\dfrac{\sin B}{\sin A}=\dfrac{b}{a}=\dfrac{3}{2}$.

………………………………………………………………………………………… 5 分

所以 $\cos B=\dfrac{\sqrt{7}}{14}$.

(Ⅱ)由余弦定理得 $9=4+c^2-2\times 2c\cdot\dfrac{\sqrt{7}}{14}$.

………………………………………………………………………………………… 7 分

所以 $c^2-c\cdot\dfrac{2\sqrt{7}}{7}-5=0$.

………………………………………………………………………………………… 9 分

所以 $c=\sqrt{7}$.(负值舍去)

因为 $\cos B=\dfrac{\sqrt{7}}{14}$,

………………………………………………………………………………………… 11 分

所以 $\sin B=\dfrac{3\sqrt{21}}{14}$.

所以 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{1}{2}\times 2\times\sqrt{7}\times\dfrac{3\sqrt{21}}{14}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

所以 c 的值是 $\sqrt{7}$,$\triangle ABC$ 的面积 $S_{\triangle ABC}$ 是 $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$. ………………………… 13 分

19.(本题 16 分)

解:(Ⅰ)证明:因为 $PA\perp$ 平面 $ABCD$,$\angle ABC=90^\circ$,

所以 $PA\perp AB$,$PA\perp AD$. …………………………………………………………… 1 分

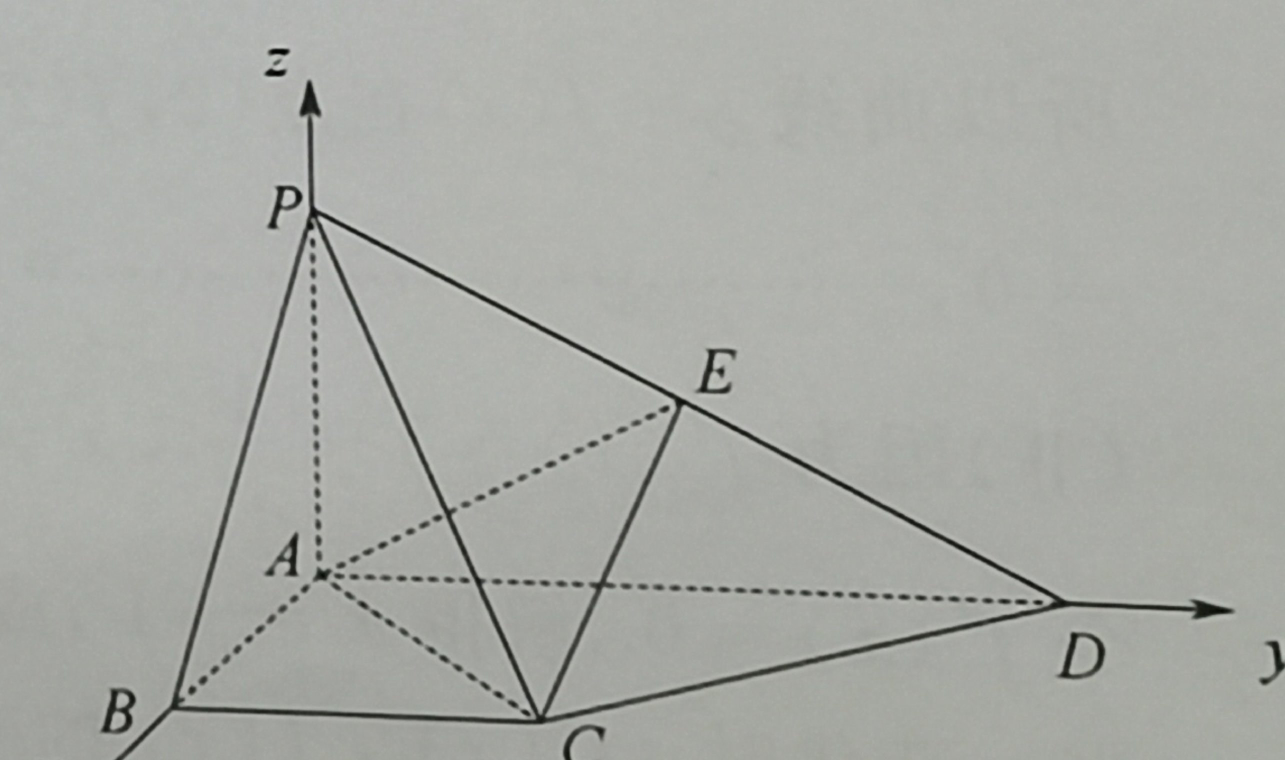
所以点 A 为坐标原点,分别以直线 AB,AD,AP 为 x,y,z 轴建立空间直角坐标系 $Axyz$. …………………………………………………………………………………… 2 分

所以 $P(0,0,1)$,$D(0,2,0)$,$A(0,0,0)$,$B(1,0,0)$,$C(1,1,0)$.

所以 $\overrightarrow{PD}=(0,2,-1)$,$\overrightarrow{AB}=(1,0,0)$.

所以 $\overrightarrow{PD}\cdot\overrightarrow{AB}=0$.

所以 $PD\perp AB$. ……………………………………………… 5 分



(Ⅱ)因为 E 是 PD 的中点,所以 $E\left(0,1,\dfrac{1}{2}\right)$.

所以 $\overrightarrow{PC}=(1,1,-1)$，$\overrightarrow{AC}=(1,1,0)$，$\overrightarrow{AE}=\left(0,1,\frac{1}{2}\right)$.

设平面 AEC 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，所以 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0,\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AE}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x+y=0,\\ y+\frac{1}{2}z=0.\end{cases}$

令 $y=-1$，则 $x=1$，$z=2$. 所以 $\vec{n}=(1,-1,2)$. ………………………… 8 分

所以 $\cos\langle\overrightarrow{PC},\vec{n}\rangle=\frac{-2}{\sqrt{3}\times\sqrt{6}}=-\frac{\sqrt{2}}{3}$.

所以直线 PC 与平面 AEC 所成角的正弦值是 $\frac{\sqrt{2}}{3}$. ………………………… 10 分

（Ⅲ）存在．理由如下：……………………………………………………… 11 分

设点 $F(a,b,c)$，$\left|\frac{PF}{PB}\right|=\lambda$，$\lambda\in[0,1]$.

所以 $\overrightarrow{PF}=(a,b,c-1)$，$\overrightarrow{PB}=(1,0,-1)$.

所以 $a=\lambda$，$b=0$，$c-1=-\lambda$. 所以点 $F(\lambda,0,-\lambda+1)$.

所以 $\overrightarrow{AF}=(\lambda,0,-\lambda+1)$.

设平面 AFC 的法向量为 $\vec{m}=(x_1,y_1,z_1)$，

所以 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{AC}=0,\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{AF}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x_1+y_1=0,\\ \lambda x_1+(-\lambda+1)z_1=0.\end{cases}$

令 $y=-1$，则 $x=1$，$z=\frac{\lambda}{\lambda-1}$. 所以 $\vec{m}=\left(1,-1,\frac{\lambda}{\lambda-1}\right)$. ……………… 14 分

因为平面 $AFC\perp$ 平面 AEC，

所以 $\vec{m}\cdot\vec{n}=0$，即 $1+1+\frac{2\lambda}{\lambda-1}=0$.

所以 $\lambda=\frac{1}{2}$.

所以在线段 PB 上存在一点 F，使得平面 $AFC\perp$ 平面 AEC，且 $\left|\frac{PF}{PB}\right|$ 的值是 $\frac{1}{2}$. …… 16 分

20.（本题 15 分）

解：（Ⅰ）因为函数 $f(x)=x+\frac{1}{x}$，所以 $f'(x)=1-\frac{1}{x^2}$.

所以 $f(2)=\frac{5}{2}$，$f'(2)=\frac{3}{4}$.

所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(2,f(2))$ 处的切线方程是 $y-\frac{5}{2}=\frac{3}{4}(x-2)$，即 $3x-4y+4=0$. ……………………………………………………………………… 3 分

（Ⅱ）因为 $f'(x)=1-\frac{1}{x^2}$，$x\neq0$.

令 $f'(x)=0$，解得 $x=-1$，或 $x=1$.

当 x 变化时，$f'(x)$，$f(x)$ 的变化情况如下表所示．

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	单调递增	-2	单调递减	单调递减	2	单调递增

所以当 $x=-1$ 时，$f(x)$ 有极大值，且极大值是 $f(-1)=-2$；
当 $x=1$ 时，$f(x)$ 有极小值，且极小值是 $f(1)=2$． …………………………… 7 分

（Ⅲ）因为函数 $g(x)=f(x)+x^2-\dfrac{2}{x}$，所以 $g(x)=x^2+x-\dfrac{1}{x}$．

所以 $g'(x)=2x+1+\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{2x^3+x^2+1}{x^2}$．

①当 $x>0$ 时，$g'(x)>0$ 恒成立，
所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增．
②当 $-1<x<0$ 时，令 $h(x)=2x^3+x^2+1$，
所以 $h'(x)=6x^2+2x$．

当 $x\in\left(-\dfrac{1}{3},0\right)$ 时，$h'(x)<0$．所以 $h(x)$ 在 $\left(-\dfrac{1}{3},0\right)$ 上单调递减．

所以 $h(x)>h(0)=1$．

当 $x\in\left(-1,-\dfrac{1}{3}\right)$ 时，$h'(x)>0$．所以 $h(x)$ 在 $\left(-1,-\dfrac{1}{3}\right)$ 上单调递增．

所以 $h(x)>h(-1)=0$．
所以当 $-1<x<0$ 时，$h(x)>0$．
所以 $g(x)$ 在 $(-1,0)$ 上单调递增． …… 15 分
综上所述，$g(x)$ 的单调递增区间是 $(-1,0)$，$(0,+\infty)$，无单调递减区间．

21.（本题 15 分）

解：（Ⅰ）证明：因为 $M=\{1\}$，且函数 $h(x)=2^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数，
所以 $h(x)<h(x+1)$ 恒成立．
所以 $h(x)=2^x$ 具有 M 性质． …………………………………………………… 3 分
（Ⅱ）因为 $M=\{m\mid -1<m<0\}$，且函数 $g(x)=|x^2+2x|$，$x\in(-\infty,a]$ 具有 M 性质，
所以对任意 $t\in M$，不等式 $g(x+t)\geqslant g(x)$ 恒成立．
所以 $g(x)=|x^2+2x|$ 在区间 $(-\infty,a]$ 为减函数．
因为 $g(x)=|x^2+2x|$ 的减区间为 $(-\infty,-2]$，
所以 $a\leqslant -2$．
所以 a 的取值范围是 $(-\infty,-2]$． ……………………………………………… 7 分
（Ⅲ）因为 $M=\{2,b\}(b\in\mathbf{Z})$，$D$ 为整数集且具有 M 性质的函数均为常值函数，
所以当 $t=2$ 时，$f(x)=f(x+2)$ 恒成立．
所以 $f(2k)=p\,(k\in\mathbf{Z})$，$f(2n-1)=q\,(n\in\mathbf{Z})$．
由题意 $p=q$，可得 $f(2k)=f(2n-1)\,(k,n\in\mathbf{Z})$．
所以当 $x=2k$ 时，$f(x)=f(x+2n-2k-1)$．
所以 $b=2n-2k-1\,(k,n\in\mathbf{Z})$．
所以当 $x=2n-1$ 时，$f(x)=f(x+2k-2n+1)$．
所以 $b=2k-2n+1\,(k,n\in\mathbf{Z})$．
综上所述，b 的值为所有奇数． …………………………………………………… 15 分

关于我们

北京高考资讯是专注于北京新高考政策、新高考选科规划、志愿填报、名校强基计划、学科竞赛、高中生涯规划的超级升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有北京高考在线网站（www.gaokzx.com）和微信公众平台等媒体矩阵。

目前，北京高考资讯微信公众号拥有30W+活跃用户，用户群体涵盖北京80%以上的重点中学校长、老师、家长及考生，引起众多重点高校的关注。
北京高考在线官方网站：www.gaokzx.com

北京高考资讯（ID：bj-gaokao）
扫码关注获取更多