2024 届高三年级 2 月份大联考

数学试题

本试卷共 4 页,19 题。全卷满分 150 分。考试用时 120 分钟。

注意事项:

1. 答题前,先将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上,并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。

2. 选择题的作答:每小题选出答案后,用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。

3. 非选择题的作答:用签字笔直接写在答题卡上对应的答题区域内。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。

4. 考试结束后,请将本试题卷和答题卡一并上交。

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{x\in\mathbf{Z}|x^2\leqslant 5\}$,$B=\left\{-3,-2,-1,0,\frac{1}{2},1\right\}$,则 $A\cup B$ 中元素的个数为

A. 4　　B. 5　　C. 6　　D. 7

2. 已知在△ABC 中,$AB=2$,$AC=1$,$\cos A=\frac{5}{6}$,则 $BC=$

A. 1　　B. $\frac{\sqrt{5}}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{5}}{3}$　　D. $\frac{\sqrt{15}}{3}$

3. 若 $(a-2b)^{20}=x_0a^{20}+x_1a^{19}b+x_2a^{18}b^2+\cdots+x_{19}ab^{19}+x_{20}b^{20}$,则 $x_{19}=$

A. -20　　B. -20×2^{19}　　C. -2^{19}　　D. 20×2^{19}

4. 若 $\sin\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}$,$\alpha\in\left(-\frac{3\pi}{2},-\frac{\pi}{2}\right)$,则 $\alpha=$

A. $-\frac{2\pi}{3}$　　B. $-\frac{3\pi}{4}$　　C. $-\frac{5\pi}{4}$　　D. $-\frac{4\pi}{3}$

5. 若定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x^2)=-f(-x^2)$,则下列结论一定正确的为

A. $f(x)$ 的图象关于原点对称　　B. $f(x)$ 的图象关于 y 轴对称

C. $f(x)$ 的图象关于点 $(1,0)$ 对称　　D. $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称

6. 已知点 P 是曲线 $\Gamma:\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}=1$ 在第一象限内的一点,A 为 Γ 的左顶点,R 为 PA 的中点,F 为 Γ 的右焦点. 若直线 OR(O 为原点)的斜率为 $\sqrt{5}$,则△PAF 的面积为

A. $\sqrt{10}+\sqrt{5}$　　B. $\sqrt{10}-\sqrt{5}$

C. $3\sqrt{2}+3$　　D. $3\sqrt{2}-3$

7. 在某电路上有 C、D 两个独立工作的元件,每次通电后,需要更换 C 元件的概率为 0.2,需要更换 D 元件的概率为 0.1,则在某次通电后 C、D 有且只有一个需要更换的条件下,C 需要更换的概率是

A. $\frac{3}{10}$　　B. $\frac{1}{50}$　　C. $\frac{9}{13}$　　D. $\frac{3}{4}$

8. 在各棱长都为 2 的正四棱锥 $V-ABCD$ 中，侧棱 VA 在平面 VBC 上的射影长度为

A. $\frac{2\sqrt{6}}{3}$　　B. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

C. $\sqrt{3}$　　D. 2

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 6 分，部分选对的得 3 分，有选错的得 0 分.

9. 若 z 满足 $z+\bar{z}=6$，$|z|=|z-2\mathrm{i}|$，则

A. z 的实部为 3

B. z 的虚部为 1

C. $\frac{z}{3-\mathrm{i}}=\frac{1-3\mathrm{i}}{2}$

D. z 对应的向量与实轴正方向夹角的正切值为 3

10. 已知 $\boldsymbol{a}=(2,1)$，$\boldsymbol{b}=(1,-1)$，$\boldsymbol{c}=(x,2)$，则

A. 若 $x=0$，则存在唯一的实数 p,q，使得 $\boldsymbol{a}=p\boldsymbol{b}+q\boldsymbol{c}$

B. 若 $x=1$，则 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{c}$

C. 若 $x=4$，则 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{c}$

D. 若 $x=1$，则 $\boldsymbol{c}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量为 $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$

11. 若过点 (a,b) 可作曲线 $f(x)=x^2\ln x$ 的 n 条切线（$n\in\mathbf{N}$），则

A. 若 $a\leqslant 0$，则 $n\leqslant 2$

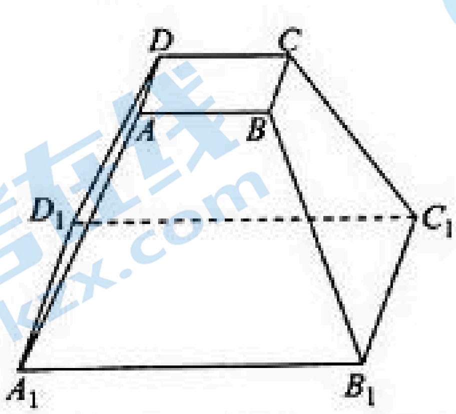
B. 若 $0<a<\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}$，且 $b=a^2\ln a$，则 $n=2$

C. 若 $n=3$，则 $a^2\ln a<b<2a\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-3}$

D. 过 $(\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}},-6)$，仅可作 $y=f(x)$ 的一条切线

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12. 如图是一个正四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，已知正四棱台的上、下底面的边长分别为 2 和 6，体积为 $\frac{104\sqrt{2}}{3}$，则侧面积为________.



13. 在数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=3$，且 $a_{n+1}=3a_n+4n-6$（$n\in\mathbf{N}^*$），则 $\{a_n\}$ 的通项公式为________.

14. 若圆 C 与抛物线 $\Gamma: y=\frac{x^2}{6}$ 在公共点 B 处有相同的切线，且 C 与 y 轴切于 Γ 的焦点 A，则 $\sin\frac{\angle ACB}{2}=$________

四、解答题:本题共 5 小题,共 77 分.解答应写出必要的文字说明,证明过程或演算步骤.

15.(本小题满分 13 分)

某小区在 2024 年的元旦举办了联欢会,现场来了 1 000 位居民.联欢会临近结束时,物业公司从现场随机抽取了 20 位幸运居民进入摸奖环节,这 20 位幸运居民的年龄用随机变量 X 表示,且 $X\sim N(45,225)$.

(1)请你估计现场年龄不低于 60 岁的人数(四舍五入取整数);

(2)奖品分为一等奖和二等奖,已知每个人摸到一等奖的概率为 40%,摸到二等奖的概率为 60%,每个人摸奖相互独立,设恰好有 $n(0\leqslant n\leqslant 20)$ 个人摸到一等奖的概率为 $P(n)$,求当 $P(n)$ 取得最大值时 n 的值.

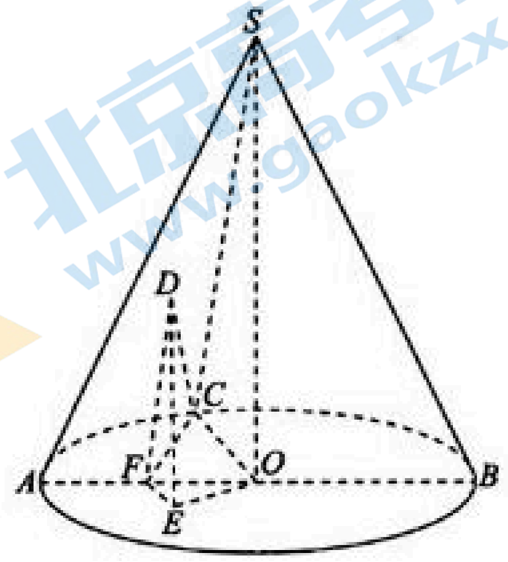
附:若 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$,则 $P\{|X-\mu|<\sigma\}=0.682\ 7$,$P\{|X-\mu|<2\sigma\}=0.954\ 5$.

16.(本小题满分 15 分)

如图,在圆锥 SO 中,若轴截面 SAB 是正三角形,C 为底面圆周上一点,F 为线段 OA 上一点,D(不与 S 重合)为母线上一点,过 D 作 DE 垂直底面于 E,连接 OE,EF,DF,CF,CD,且 $\angle COF=\angle EFO$.

(1)求证:平面 SCO//平面 DEF;

(2)若 $\triangle EFO$ 为正三角形,且 F 为 AO 的中点,求平面 CDF 与平面 DEF 夹角的余弦值.



17.(本小题满分 15 分)

设函数 $f(x)=\ln x+a(x-1)(x-2)$,其中 a 为实数.

(1)当 $a=1$ 时,求 $f(x)$的单调区间;

(2)当 $f(x)$在定义域内有两个不同的极值点 x_1,x_2 时,证明:$f(x_1)+f(x_2)>\frac{5}{9}+\ln\frac{9}{16}$.

18.(本小题满分 17 分)

在直角坐标系 xOy 中,已知 $C_1(-1,0)$,$C_2(1,0)$,$P(x,y)$,$4\overrightarrow{C_1P}\cdot\overrightarrow{C_2P}=3x^2$.

(1)求点 P 的轨迹 C 的方程;

(2)设直线 l 不过坐标原点且不垂直于坐标轴,l 与 C 交于 A、B 两点,点 $M(x_0,y_0)$ $(x_0,y_0\neq0)$为弦 AB 的中点.过点 M 作 l 的垂线交 C 于 D、E,N 为弦 DE 的中点.

①证明:l 与 ON 相交;

②已知 l 与直线 ON 交于 T,若$\overrightarrow{ON}=\lambda\overrightarrow{NT}(\lambda>0)$,求 λ 的最大值.

19.(本小题满分 17 分)

在无穷数列$\{a_n\}$中,令 $T_n=a_1a_2\cdots a_n$,若 $\forall n\in\mathbf{N}^*$,$T_n\in\{a_n\}$,则称$\{a_n\}$对前 n 项之积是封闭的.

(1)试判断:任意一个无穷等差数列$\{a_n\}$对前 n 项之积是否是封闭的?

(2)设$\{a_n\}$是无穷等比数列,其首项 $a_1=2$,公比为 q.若$\{a_n\}$对前 n 项之积是封闭的,求出 q 的两个值(若多求,则按前 2 个计分);

(3)证明:对任意的无穷等比数列$\{a_n\}$,总存在两个无穷数列$\{b_n\}$和$\{c_n\}$,使得 $a_n=b_n\cdot c_n(n\in\mathbf{N}^*)$,其中$\{b_n\}$和$\{c_n\}$对前 n 项之积都是封闭的.

2024 届高三年级 2 月份大联考

数学参考答案及解析

一、选择题

1. D 【解析】因为 $A=\{x\in\mathbf{Z}|x^2\leqslant5\}=\{x\in\mathbf{Z}|-\sqrt{5}\leqslant x\leqslant\sqrt{5}\}=\{-2,-1,0,1,2\}$，$B=\left\{-3,-2,-1,0,\frac{1}{2},1\right\}$，所以 $A\cup B=\left\{-3,-2,-1,0,\frac{1}{2},1,2\right\}$中元素的个数为 7. 故选 D.

2. D 【解析】由余弦定理得 $BC^2=2^2+1^2-2\times2\times1\times\frac{5}{6}=\frac{5}{3}$，所以 $BC=\frac{\sqrt{15}}{3}$. 故选 D.

3. B 【解析】$x_{15}=C_{20}^{15}(-2)^{15}=-20\times2^{19}$，所以 B 正确. 故选 B.

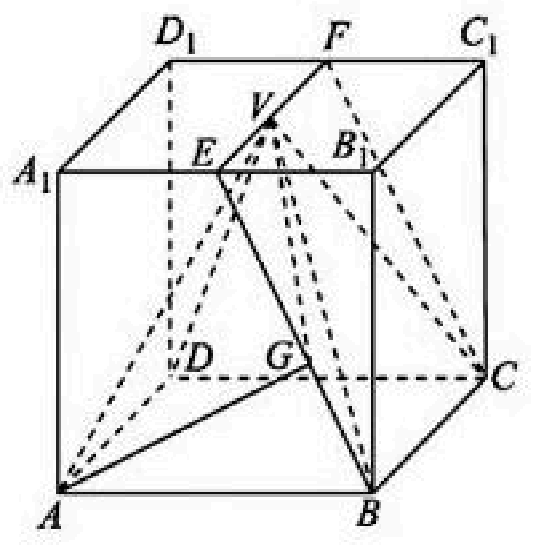
4. A 【解析】因为 $\sin\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $\alpha=2k\pi+\frac{4\pi}{3}$或 $\alpha=2k\pi+\frac{5\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$，因为 $\alpha\in\left(-\frac{3\pi}{2},-\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $\alpha=-\frac{2\pi}{3}$. 故选 A.

5. A 【解析】若 $\forall t\in\mathbf{R}$，当 $t>0$ 时，令 $t=x^2$，因为 $f(x^2)=-f(-x^2)$，所以 $f(t)=-f(-t)$，即 $f(-t)=-f(t)$；当 $t=0$ 时，令 $t=x^2=0$，因为 $f(x^2)=-f(-x^2)$，所以 $f(0)=-f(-0)$，即 $f(0)=0$；当 $t<0$ 时，令 $t=-x^2$，因为 $f(x^2)=-f(-x^2)$，所以 $f(-t)=-f(t)$，综上，$\forall t\in\mathbf{R}$，$f(-t)=-f(t)$，所以 $f(x)$是奇函数，所以 A 正确；若 $f(x)=x$，则 $f(x^2)=-f(-x^2)$成立，但 B、C、D 都不成立. 故选 A.

6. A 【解析】设 $P(x_0,y_0)$，$x_0>0$，$y_0>0$，所以 $R\left(\frac{x_0-2}{2},\frac{y_0}{2}\right)$，$x_0^2-y_0^2=4$，因为直线 OR 的斜率为 $\sqrt{5}$，所以 $\frac{y_0}{x_0-2}=\sqrt{5}$，化简得，$y_0=\sqrt{5}(x_0-2)$，与 $x_0^2-y_0^2=4$ 联立解得 $x_0=2$ 或 3，其中 $x_0=2$ 舍去，所以 P 点的坐标为 $(3,\sqrt{5})$，又 $F(2\sqrt{2},0)$，所以 $\triangle PAF$ 的面积为 $\frac{2\sqrt{2}-(-2)}{2}\times\sqrt{5}=\sqrt{10}+\sqrt{5}$. 故选 A.

7. C 【解析】记事件 E：在某次通电后 C、D 有且只有一个需要更换，事件 F：C 需要更换，则 $P(E)=0.2\times(1-0.1)+(1-0.2)\times0.1=0.26$，$P(EF)=0.2\times(1-0.1)=0.18$，由条件概率公式可得 $P(F|E)=\frac{P(EF)}{P(E)}=\frac{0.18}{0.26}=\frac{9}{13}$. 故选 C.

8. B 【解析】把正四棱锥 $V-ABCD$ 放入正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，则 V 是上底面的中心，取 A_1B_1 的中点 E，C_1D_1 的中点 F，连接 EF，BE，CF，由图可知，过 A 作 $AG\perp BE$，垂足为 G，在正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$BC\perp$平面 ABB_1A_1，$AG\subset$平面 ABB_1A_1，所以 $BC\perp AG$，$BC\cap BE=B$，BC，$BE\subset$平面 $EFCB$，所以 $AG\perp$平面 $EFCB$，所以侧棱 VA 在平面 VBC 上的射影为 VG，由已知得，$AA_1=\sqrt{2}$，$EB=\sqrt{AA_1^2+\left(\frac{AB}{2}\right)^2}=\sqrt{3}$，所以 $\frac{1}{2}\times2\times\sqrt{2}=\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\cdot AG$，所以 $AG=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$，所以 $VG=\sqrt{VA^2-AG^2}=\sqrt{2^2-\left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$. 故选 B.



二、选择题

9. AB 【解析】设 $z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$，因为 $z+\bar{z}=6$，所以 $2a=6$，所以 $a=3$. $|z|=|z-2i|\Rightarrow\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{a^2+(b-2)^2}$，解得 $b=1$，所以 $z=3+i$，所以 A，B 正确；$\frac{z}{3-i}=\frac{3+i}{3-i}=\frac{(3+i)^2}{(3-i)(3+i)}=\frac{8+6i}{10}=\frac{4+3i}{5}$，所以 C 错误；因为 z 对应的向量坐标为 $(3,1)$，所以 z 对应的向量与实轴正方向夹角的正切值为 $\frac{1}{3}$，所以 D 错误. 故选 AB.

10. ACD 【解析】A：当 $x=0$ 时，$\boldsymbol{b}=(1,-1)$，$\boldsymbol{c}=(0,2)$ 不共线，所以 $\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 可以作为一组基向量，由平面向量基本定理得，存在唯一的实数 p,q 使得 $\boldsymbol{a}=p\boldsymbol{b}+q\boldsymbol{c}$，所以 A 正确；B：若 $x=1$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=(2,1)\cdot(1,2)=4\neq0$，所以 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{c}$ 不成立，所以 B 错误；C：若 $x=4$，$\boldsymbol{a}=(2,1)$，$\boldsymbol{c}=(4,2)$，则 $\boldsymbol{a}=\frac{1}{2}\boldsymbol{c}$，所以 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{c}$，所以 C 正确；D：若 $x=1$，则 $\boldsymbol{c}=(1,2)$，所以 $\boldsymbol{c}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量为 $\frac{\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|^2}\cdot\boldsymbol{b}=\frac{-1}{2}\cdot(1,-1)=\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$，所以 D 正确. 故选 ACD.

11. ABD 【解析】设切点 $(x_0,x_0^2\ln x_0)$，则 $f'(x_0)=2x_0\ln x_0+x_0$，切线为 $y-x_0^2\ln x_0=(2x_0\ln x_0+x_0)(x-x_0)$，代入 (a,b) 整理得 $(2x_0\ln x_0+x_0)a-x_0^2\ln x_0-x_0^2-b=0$，令 $g(x)=(2x\ln x+x)a-x^2\ln x-x^2-b$，$g'(x)=(2\ln x+3)a-2x\ln x-3x=(2\ln x+3)\cdot(a-x)$，令 $g'(x)=0$ 得 $x_1=a$，$x_2=e^{-\frac{3}{2}}$. 当 $a\leqslant0$ 时，$g(x)$ 在 $(0,e^{-\frac{3}{2}})$ 上单调递增，在 $(e^{-\frac{3}{2}},+\infty)$ 上单调递减，$g(e^{-\frac{3}{2}})=-2a\cdot e^{-\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}\cdot e^{-3}-b$，$g(x)$ 至多有 2 个零点，故 A 正确；当 $a\in(0,e^{-\frac{3}{2}})$ 时，$g(x)$ 在 $(0,a)$，$(e^{-\frac{3}{2}},+\infty)$ 上单调递减，在 $(a,e^{-\frac{3}{2}})$ 上单调递增，$g(a)=a^2\ln a-b$，$g(e^{-\frac{3}{2}})=-2ae^{-\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}\cdot e^{-3}-b$，当 $b=a^2\ln a$ 时，$g(a)=0$，且 $x\to+\infty$ 时，$g(x)\to-\infty$，所以 $n=2$，B 正确；若 $n=3$，则 $g(a)<0<g(e^{-\frac{3}{2}})$，即 $a^2\ln a<b<-2ae^{-\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}e^{-3}$，同理当 $a>e^{-\frac{3}{2}}$ 时，$g(e^{-\frac{3}{2}})<0<g(a)$，即 $-2ae^{-\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}e^{-3}<b<a^2\ln a$，C 错误；②$a=e^{-\frac{3}{2}}$ 时，$g'(x)\leqslant0$，$g(x)$ 单调递减；又 $x\to0$ 时，$g(x)\to-b$，$x\to+\infty$ 时，$g(x)\to-\infty$，则当 $-b>0$ 时，$g(x)$ 有 1 个零点，即 $b<0$，D 正确. 故选 ABD.

三、填空题

12. $32\sqrt{3}$ 【解析】设该正四棱台的高、斜高分别为 h，h'，由已知得，$\frac{h}{3}(2^2+6^2+2\times6)=\frac{104\sqrt{2}}{3}$，所以 $h=2\sqrt{2}$，$h'=\sqrt{h^2+\left(\frac{6-2}{2}\right)^2}=\sqrt{(2\sqrt{2})^2+\left(\frac{6-2}{2}\right)^2}=2\sqrt{3}$，所以正四棱台侧面积为 $S=4\times\frac{(2+6)\times2\sqrt{3}}{2}=32\sqrt{3}$. 故答案为 $32\sqrt{3}$.

13. $a_n=3^n-2(n-1)$ 【解析】因为 $a_{n+1}=3a_n+4n-6(n\in\mathbf{N}^*)$，$a_{n+1}+2n=3a_n+4n-6+2n=3[a_n+2(n-1)]$，因为 $a_1=3$，所以 $a_1+2\times(1-1)=3$，所以 $a_n+2(n-1)=3\cdot3^{n-1}=3^n$，所以 $a_n=3^n-2(n-1)$. 故答案为 $a_n=3^n-2(n-1)$.

14. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 【解析】抛物线 $\Gamma:y=\frac{x^2}{6}$ 的焦点为 $A\left(0,\frac{3}{2}\right)$，准线 l 为 $y=-\frac{3}{2}$，依题意不妨令 C 在第一象限，$C\left(a,\frac{3}{2}\right)$，则圆 C 的半径 $r=a$，设 $B\left(x_0,\frac{1}{6}x_0^2\right)(x_0>0)$，则圆 C 的方程为 $(x-a)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=a^2$，由 $y=\frac{1}{6}x^2$，则 $y'=\frac{1}{3}x$，所以抛物线在点 B 处的切线 m 的斜率 $k=\frac{x_0}{3}$，因为圆 C 与抛物线 $\Gamma:y=\frac{x^2}{6}$ 在公

共点 B 处有相同的切线，所以直线 CB 与 m 垂直，所以 $\frac{\frac{1}{6}x_0^2-\frac{3}{2}}{x_0-a}\cdot\frac{x_0}{3}=-1$，则 $a=\frac{1}{2}x_0+\frac{1}{18}x_0^3$ ①，

又点 B 在圆 C 上，所以 $(x_0-a)^2+\left(\frac{1}{6}x_0^2-\frac{3}{2}\right)^2=a^2$，则 $x_0^2-2ax_0+\left(\frac{1}{6}x_0^2-\frac{3}{2}\right)^2=0$ ②，所以 $x_0^2-2\left(\frac{1}{2}x_0+\frac{1}{18}x_0^3\right)x_0+\left(\frac{1}{6}x_0^2-\frac{3}{2}\right)^2=0$，整理可得 $x_0^4+6x_0^2-27=0$，解得，$x_0^2=3$ 或 $x_0^2=-9$（舍去），所以 $r=a=\frac{1}{2}x_0+\frac{1}{18}x_0^3=\frac{2}{\sqrt{3}}$，$y_B=\frac{1}{6}x_0^2=\frac{1}{2}$，

所以 $|AB|=2$，所以 $\sin\frac{\angle ACB}{2}=\frac{\frac{|AB|}{2}}{|AC|}=\frac{1}{\frac{2}{\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. 故答案为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

四、解答题

15. **解**：(1)因为 $X\sim N(45,225)$，所以 $\sigma=15$.　　(1分)

则 $P(X\geqslant 60)=P(X\geqslant\mu+\sigma)=\frac{1-0.6827}{2}=0.15865$，　　(4分)

所以现场年龄不低于 60 岁的人数大约为 $1000\times 0.15865\approx 159$(人).　　(6分)

(2)依题意可得，$P(n)=C_{20}^{n}0.4^{n}\times 0.6^{20-n}$，　　(7分)

设 $\begin{cases}P(n)\geqslant P(n+1)\\P(n)\geqslant P(n-1)\end{cases}$

所以 $\begin{cases}C_{20}^{n}0.4^{n}\times 0.6^{20-n}\geqslant C_{20}^{n+1}0.4^{n+1}\times 0.6^{19-n}\\C_{20}^{n}0.4^{n}\times 0.6^{20-n}\geqslant C_{20}^{n-1}0.4^{n-1}\times 0.6^{21-n}\end{cases}$　　(9分)

所以 $\begin{cases}\frac{20-n}{n+1}\cdot\frac{0.4}{0.6}\leqslant 1,\\\frac{21-n}{n}\cdot\frac{0.4}{0.6}\geqslant 1,\end{cases}$　　(11分)

所以 $\frac{37}{5}\leqslant n\leqslant\frac{42}{5}$，　　(12分)

n 为整数，所以 $n=8$，

所以当 $P(n)$ 取得最大值时 n 的值为 8.　　(13分)

16. **解**：(1)因为 $\angle COF=\angle EFO$，所以 $EF/\!/CO$.　(1分)

因为 $EF\not\subset$ 平面 SCO，$CO\subset$ 平面 SCO，

所以 $EF/\!/$ 平面 SCO，　　(2分)

因为 DE 垂直底面于 E，SO 垂直底面于 O，所以 $DE/\!/SO$，

同理 $DE/\!/$ 平面 SCO，　　(3分)

因为 $DE\cap EF=E$，且 $EF/\!/$ 平面 SCO，$DE/\!/$ 平面 SCO，所以平面 $SCO/\!/$ 平面 DEF.　　(5分)

(2)设圆锥的底面半径为 2，

因为轴截面 SAB 是正三角形，所以 $SO=2\sqrt{3}$，　　(6分)

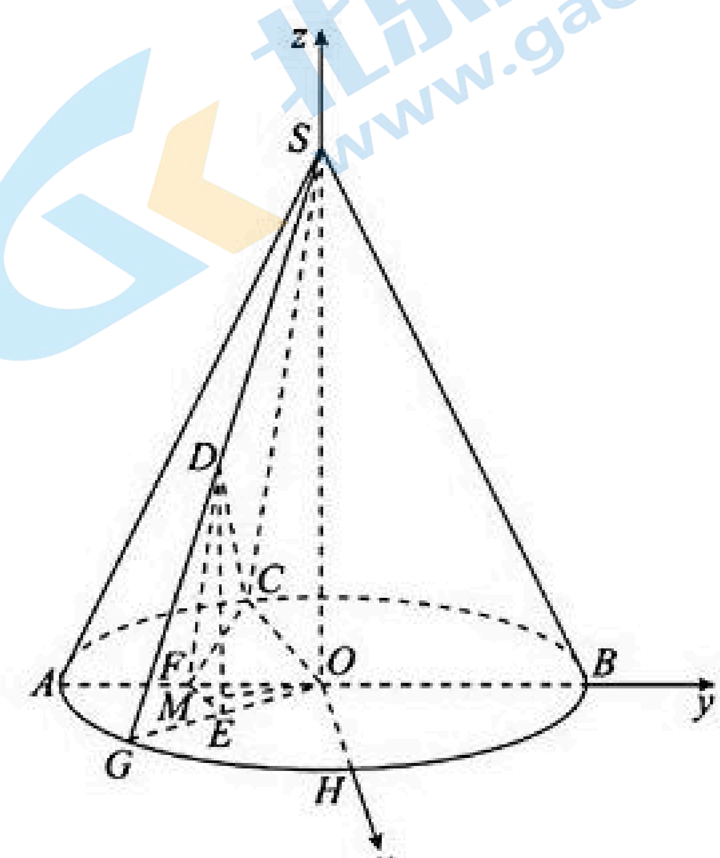
如图，设平面 $SDEO$ 与底面圆周交于 G，

因为 $\triangle EFO$ 为正三角形，且 F 为 AO 的中点，

所以 $OF=FE=EO=1$，所以 E 为 OG 的中点，

所以 DE 为 $\triangle SOG$ 的中位线，所以 $DE=\frac{1}{2}SO=\sqrt{3}$，　　(7分)

如图，在底面圆周上取一点 H，使得 $OH\perp OB$，以直线 OH，OB，OS 为 x，y，z 轴建立空间坐标系，(8分)



由已知得，$C(-\sqrt{3},-1,0)$，$D\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2},\sqrt{3}\right)$，

$E\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2},0\right)$，$F(0,-1,0)$，　　(9分)

设 EF 的中点为 M，则平面 DEF 的法向量为 $\boldsymbol{n}_1=\overrightarrow{OM}=\left(\frac{\sqrt{3}}{4},-\frac{3}{4},0\right)$，（11 分）

所以 $\overrightarrow{CF}=(\sqrt{3},0,0)$，$\overrightarrow{CD}=\left(\frac{3\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},\sqrt{3}\right)$，

设平面 CDF 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(x,y,z)$，

所以$\begin{cases}\sqrt{3}x=0,\\ \frac{3\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}y+\sqrt{3}z=0\end{cases}$

$x=0$，令 $y=2$，则 $z=-\frac{\sqrt{3}}{3}$，

则 $\boldsymbol{n}_2=\left(0,2,-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$，（13 分）

所以平面 CDF 与平面 DEF 夹角的余弦值为

$\frac{|\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}=\frac{\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{3}}}=\frac{3\sqrt{13}}{13}$.（15 分）

17. **解**：(1) $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，$f'(x)=\frac{1}{x}+(2x-3)=\frac{2x^2-3x+1}{x}$，（2 分）

令 $f'(x)=0$，得 $x=\frac{1}{2}$ 或 $x=1$，（3 分）

$x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)\cup(1,+\infty)$，$f'(x)>0$；$x\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，$f'(x)<0$，

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$，$(1,+\infty)$，

单调递减区间为 $\left(\frac{1}{2},1\right)$.（5 分）

(2) $f'(x)=\frac{2ax^2-3ax+1}{x}$，

由 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有两个不同的极值点 x_1,x_2 得，$2ax^2-3ax+1=0$ 有两个不同的正根，

则$\begin{cases}2a\neq0\\ x_1+x_2=\frac{3}{2}>0\\ x_1x_2=\frac{1}{2a}>0\\ \Delta=9a^2-8a>0\end{cases}$，解得 $a>\frac{8}{9}$，（7 分）

因为 $f(x_1)+f(x_2)=\ln(x_1x_2)+a(x_1^2+x_2^2)-3a(x_1+x_2)+4a=\ln(x_1x_2)+a[(x_1+x_2)^2-2x_1x_2]-3a(x_1+x_2)+4a=-\ln(2a)+\frac{7}{4}a-1$，

（9 分）

设 $g(a)=-\ln(2a)+\frac{7}{4}a-1$，$a>\frac{8}{9}$，

则 $g'(a)=\frac{7}{4}-\frac{1}{a}=\frac{7a-4}{4a}>0$，

故 $g(a)$ 在 $\left(\frac{8}{9},+\infty\right)$ 上单调递增，（12 分）

又 $g(a)>g\left(\frac{8}{9}\right)=-\ln\frac{16}{9}+\frac{5}{9}=\frac{5}{9}+\ln\frac{9}{16}$，

故 $f(x_1)+f(x_2)>\frac{5}{9}+\ln\frac{9}{16}$.（15 分）

18. **解**：(1) 因为 $C_1(-1,0)$，$C_2(1,0)$，$P(x,y)$，$4\overrightarrow{C_1P}\cdot\overrightarrow{C_2P}=3x^2$，

所以 $4(x+1,y)\cdot(x-1,y)=3x^2$，（1 分）

所以 $4(x^2-1+y^2)=3x^2$，化简得 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$，

所以 P 的轨迹 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$.（3 分）

(2) ①因为直线 l 不过坐标原点且不垂直于坐标轴，

所以 $x_0y_0\neq0$.

设点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

所以 $x_0=\frac{x_1+x_2}{2}$，$y_0=\frac{y_1+y_2}{2}$，

由题意得，$\begin{cases}\frac{x_1^2}{4}+y_1^2=1\\ \frac{x_2^2}{4}+y_2^2=1\end{cases}$

相减得 $\frac{x_1^2-x_2^2}{4}+y_1^2-y_2^2=0$，（4 分）

所以 $\frac{(x_1+x_2)(x_1-x_2)}{4}+(y_1+y_2)(y_1-y_2)=0$，

所以 $\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\cdot\frac{y_1+y_2}{x_1+x_2}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\cdot\frac{2y_0}{2x_0}=-\frac{1}{4}$，

所以 $k_{AB}\cdot k_{OM}=-\frac{1}{4}$，

所以 $k_l=k_{AB}=-\frac{1}{4k_{OM}}=-\frac{x_0}{4y_0}$，（5 分）

同理得，$k_{ON}\cdot k_{DE}=-\frac{1}{4}$，又 $k_{AB}\cdot k_{OM}=-\frac{1}{4}$，

相乘得，$k_{ON}\cdot k_{DE}\cdot k_{AB}\cdot k_{OM}=\left(-\frac{1}{4}\right)^2$， (6 分)

因为 $k_{DE}\cdot k_{AB}=-1$，$k_{OM}=\frac{y_0}{x_0}$，所以 $k_{ON}=-\frac{x_0}{16y_0}$，

(7 分)

因为 $x_0\neq 0$，所以 $-\frac{x_0}{4y_0}\neq-\frac{x_0}{16y_0}$，所以 $k_l\neq k_{ON}$，

(8 分)

所以 l 与 ON 相交. (9 分)

②l 的方程为 $y-y_0=-\frac{x_0}{4y_0}(x-x_0)$，直线 DE 的方程为 $y-y_0=\frac{4y_0}{x_0}(x-x_0)$，

直线 ON 的方程为 $y=-\frac{x_0}{16y_0}x$，

联立得，$y_T=-\frac{x_0^2+4y_0^2}{12y_0}$，$y_N=\frac{-3x_0^2y_0}{x_0^2+64y_0^2}$， (11 分)

故 $|\lambda|=\frac{|ON|}{|NT|}=\frac{|ON|}{|OT|-|ON|}=\frac{1}{\frac{|OT|}{|ON|}-1}$，

(12 分)

又 $\frac{|OT|}{|ON|}=\left|\frac{y_T}{y_N}\right|=\left|\frac{-\frac{x_0^2+4y_0^2}{12y_0}}{\frac{-3x_0^2y_0}{x_0^2+64y_0^2}}\right|$

$=\frac{1}{36}\cdot\frac{(x_0^2+4y_0^2)(x_0^2+64y_0^2)}{x_0^2y_0^2}$

$=\frac{1}{36}\cdot\frac{\left(1+4\frac{y_0^2}{x_0^2}\right)\left(1+64\frac{y_0^2}{x_0^2}\right)}{\frac{y_0^2}{x_0^2}}$

$=\frac{1}{36}\left(256\frac{y_0^2}{x_0^2}+\frac{x_0^2}{y_0^2}+68\right)\geqslant\frac{25}{9}$， (14 分)

当且仅当 $x_0^2=16y_0^2$ 即 $x_0=\pm4y_0$ 时取等号，

又 $\frac{x_0^2}{4}+y_0^2<1$，即当且仅当 $\begin{cases}x_0=\pm4y_0,\\-\frac{\sqrt{5}}{5}<y_0<\frac{\sqrt{5}}{5}\end{cases}$ 时取等号，

所以 $|\lambda|=\frac{1}{\frac{|OT|}{|ON|}-1}\leqslant\frac{9}{16}$，故 $|\lambda|$ 的最大值为 $\frac{9}{16}$.

(17 分)

19. 解：(1)不是的. (1 分)

如等差数列 $\left\{-\frac{1}{2},-1,-\frac{3}{2},-2,\cdots\right\}$，$T_2=a_1a_2=\frac{1}{2}\notin\left\{-\frac{1}{2},-1,-\frac{3}{2},-2,\cdots\right\}$. (2 分)

所以不是任意一个无穷等差数列对前 n 项之积是封闭的. (3 分)

(2)$\{a_n\}$ 是等比数列，其首项 $a_1=2$，公比 q，

所以 $a_n=a_1\cdot q^{n-1}=2q^{n-1}\ (n\in\mathbf{N}^*)$，

所以 $T_n=a_1a_2\cdots a_n=2^nq^{1+2+\cdots+(n-1)}=2^nq^{\frac{n(n-1)}{2}}$，

(4 分)

由已知得，对任意正整数 n，总存在正整数 m，使得 $T_n=a_m$ 成立，

即对任意正整数 n，总存在正整数 m，

使得 $2^nq^{\frac{(n-1)n}{2}}=2q^{m-1}$ 成立，

即对任意正整数 n，总存在正整数 m，使得 $q^{\frac{(n-1)n}{2}-(m-1)}=2^{1-n}$ 成立， (5 分)

①当 $m=\frac{(n+1)n}{2}\geqslant1$ 时，得 $\frac{(n-1)n}{2}-(m-1)=1-n$，所以 $q=2$； (7 分)

②当 $m=\frac{(n-1)n}{2}+(2-n)=\frac{n^2-3n+4}{2}\geqslant1$ 时，得 $\left[\frac{(n-1)n}{2}-(m-1)\right]+(1-n)=0$，且 $q=\frac{1}{2}$，

综上，$q=2$ 或 $\frac{1}{2}$. [答案正确即可] (9 分)

(3)对任意的无穷等比数列 $\{a_n\}$，$a_n=a_1q^{n-1}=a_1^n\cdot\left(\frac{q}{a_1}\right)^{n}$ ，

令 $b_n=a_1^n$，$c_n=\left(\frac{q}{a_1}\right)^{n-1}$，则 $a_n=b_n\cdot c_n\ (n\in\mathbf{N}^*)$，

(11 分)

下面证明：$\{b_n\}$ 是对前 n 项之积是封闭的.

因为 $b_n=a_1^n$，所以 $T_n=a_1^{1+2+\cdots+n}=a_1^{\frac{n(n+1)}{2}}$，(12 分)

取正整数 $m=\frac{n(n+1)}{2}$ 得，$T_n=b_m$，(13 分)

所以 $\{b_n\}$ 对前 n 项之积是封闭的，(14 分)

同理证明：$\{c_n\}$ 也对前 n 项之积是封闭的，(16 分)

所以对任意的无穷等比数列 $\{a_n\}$，总存在两个无穷数列 $\{b_n\}$ 和 $\{c_n\}$，使得 $a_n=b_n\cdot c_n\ (n\in\mathbf{N}^*)$，其中 $\{b_n\}$ 和 $\{c_n\}$ 对前 n 项之积都是封闭的. (17 分)