北京市东城区2020—2021学年度第二学期高三综合练习(一)

数学参考答案及评分标准

2021.4

一、选择题(共10小题,每小题4分,共40分)

(1)C (2)B (3)A (4)B (5)D

(6)C (7)B (8)C (9)A (10)D

二、填空题(共5小题,每小题5分,共25分)

(11)5

(12)4 $y=\pm 2x$

(13)$\frac{1}{2}$ 31

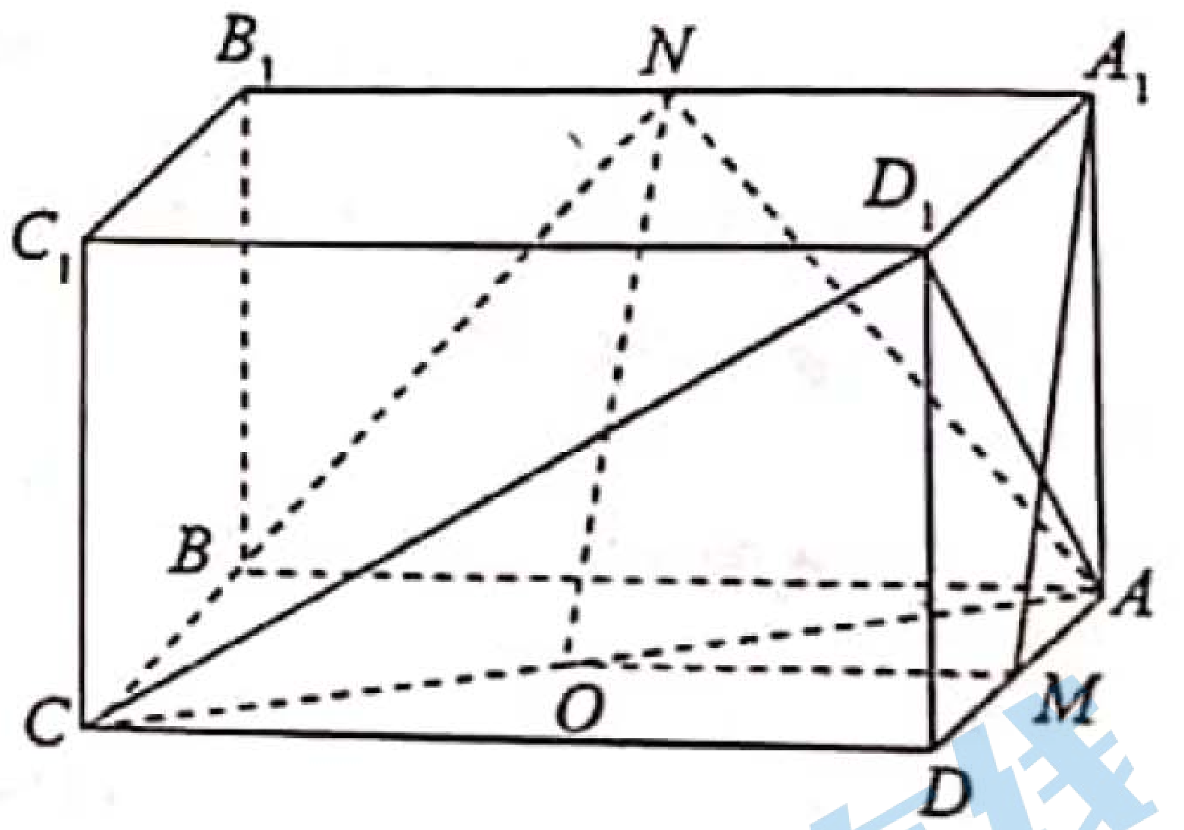
(14)4

(15)①②④

三、解答题(共6小题,共85分)

(16)(本小题13分)

解:(Ⅰ)取 AC 中点 O,连接 OM,ON.



因为 M 是 AD 中点,

所以 $OM/\!/CD$,$OM=\frac{1}{2}CD$.

在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,

因为 N 是 A_1B_1 的中点,

所以 $NA_1/\!/CD$,$NA_1=\frac{1}{2}CD$.

所以 $NA_1/\!/OM$,且 $NA_1=OM$.

所以四边形 $NOMA_1$ 是平行四边形.

所以 $MA_1/\!/ON$.

又因为 $MA_1\not\subset$平面 ANC,$ON\subset$平面 ANC,

所以 $MA_1/\!/$平面 ANC. ………………………………………………………… 5分

(Ⅱ)在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,

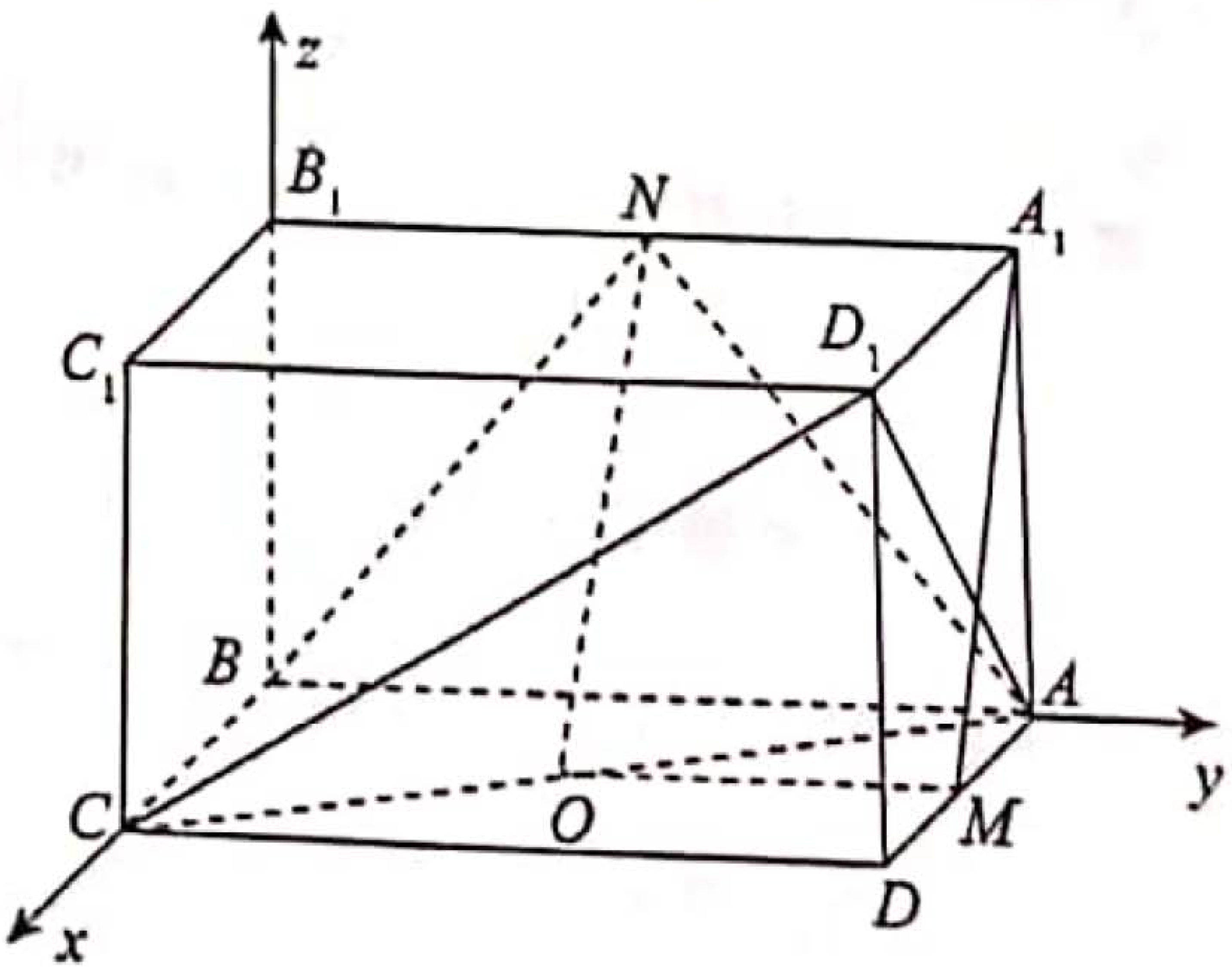
如图建立空间坐标系 $B-xyz$. 则 $C(1,0,0)$,

$A(0,2,0)$,$D_1(1,2,1)$,$N(0,1,1)$,

所以 $\overrightarrow{CN}=(-1,1,1)$,$\overrightarrow{CA}=(-1,2,0)$,

$\overrightarrow{CD_1}=(0,2,1)$.

设平面 D_1AC 的法向量 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,



由$\begin{cases} n\cdot\overrightarrow{CA}=0, \\ n\cdot\overrightarrow{CD_1}=0, \end{cases}$知$\begin{cases} -x+2y=0, \\ 2y+z=0. \end{cases}$

令 $y=1$，则 $x=2$，$z=-2$，则平面 D_1AC 的法向量 $n=(2,1,-2)$.

设直线 CN 与平面 D_1AC 所成角为 θ，

则 $\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{CN},n\rangle|=\dfrac{|\overrightarrow{CN}\cdot n|}{|\overrightarrow{CN}||n|}=\dfrac{3}{\sqrt{3}\times 3}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

所以直线 CN 与平面 D_1AC 所成角的正弦值为$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. ………………………… 13 分

(17)(本小题 13 分)

解：选择条件①.

(Ⅰ)因为 $c=8$，$a=7$，

由余弦定理 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$，得 $b^2-2b-15=0$.

解得 $b=5$ 或 $b=-3$(舍).

所以 $b=5$. ………………………………………………………………………… 6 分

(Ⅱ)因为 $\cos C=\dfrac{1}{7}$，$0<C<\pi$，

所以 $\sin C=\sqrt{1-\cos^2 C}=\sqrt{1-(\dfrac{1}{7})^2}=\dfrac{4\sqrt{3}}{7}$.

由正弦定理$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}$，得$\dfrac{7}{\sin A}=\dfrac{8}{\frac{4\sqrt{3}}{7}}$，

所以 $\sin A=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

因为 $c>a$，所以 $C>A$.

所以 $A=\dfrac{\pi}{3}$.

所以 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}\times 7\times 5\times\dfrac{4\sqrt{3}}{7}=10\sqrt{3}$. ………………………… 13 分

选择条件②.

(Ⅰ)因为 $\cos B=\dfrac{11}{14}$，$0<B<\pi$，

所以 $\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\sqrt{1-(\dfrac{11}{14})^2}=\dfrac{5\sqrt{3}}{14}$.

因为 $\cos C=\dfrac{1}{7}$，$0<C<\pi$，

所以 $\sin C=\sqrt{1-\cos^2 C}=\sqrt{1-(\dfrac{1}{7})^2}=\dfrac{4\sqrt{3}}{7}$.

由正弦定理$\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$，得$\dfrac{b}{\frac{5\sqrt{3}}{14}}=\dfrac{8}{\frac{4\sqrt{3}}{7}}$， ······························ 6 分

解得 $b=5$.

（Ⅱ）由（Ⅰ）知 $\sin B=\dfrac{5\sqrt{3}}{14}$，$\sin C=\dfrac{4\sqrt{3}}{7}$，

又因为 $\cos B=\dfrac{11}{14}$，$\cos C=\dfrac{1}{7}$，

在$\triangle ABC$中，$A=\pi-(B+C)$，

所以
$$\begin{aligned}\cos A&=-\cos(B+C)\\&=-\cos B\cos C+\sin B\sin C\\&=-\frac{11}{14}\times\frac{1}{7}+\frac{5\sqrt{3}}{14}\times\frac{4\sqrt{3}}{7}\\&=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

所以 $A=\dfrac{\pi}{3}$.

所以 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}\times5\times8\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=10\sqrt{3}$. ······························ 13 分

18)（本小题 14 分）

解：（Ⅰ）设事件 A 为“从小明同学第一次测试各科中随机选取 1 科，该科成绩大于 90 分”.

根据表中数据，在小明同学第一次测试的 6 科中，有 4 科的成绩大于 90 分，分别是数学，英语，物理，生物.

所以 $P(A)=\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3}$. ······························ 4 分

（Ⅱ）X 的所有可能取值为 0，1，2.

因为小明同学第一次测试的 6 科中，有 4 科的成绩大于 90 分，第二次测试的 6 科中，有 3 科的成绩大于 90 分，

所以 $P(X=0)=\dfrac{C_2^1C_3^1}{C_6^1C_6^1}=\dfrac{1}{6}$，

$P(X=1)=\dfrac{C_4^1C_3^1+C_2^1C_3^1}{C_6^1C_6^1}=\dfrac{1}{2}$，

$P(X=2)=\dfrac{C_4^1C_3^1}{C_6^1C_6^1}=\dfrac{1}{3}$.

所以 X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

故 X 的数学期望 $E(X)=0\times\frac{1}{6}+1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{3}=\frac{7}{6}$. ………………………… 10 分

（Ⅲ）不正确. …………………………………………………………………………………… 14 分

(19)(本小题 15 分)

解:(Ⅰ)当 $a=1$ 时，$f(x)=x^3-x^2-x+1$，

$f'(x)=3x^2-2x-1=(3x+1)(x-1)$，

当 $x<-\frac{1}{3}$ 或 $x>1$ 时，$f'(x)>0$；当 $-\frac{1}{3}<x<1$ 时，$f'(x)<0$，

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty,-\frac{1}{3})$ 和 $(1,+\infty)$，

单调递减区间为 $(-\frac{1}{3},1)$. …………………………………………………………… 5 分

(Ⅱ) $f(x)=x^3-ax^2-a^2x+1$，$f'(x)=3x^2-2ax-a^2$.

$f(-a)=-a^3-a^3+a^3+1=1-a^3$，

$f'(-a)=3a^2+2a^2-a^2=4a^2$，

曲线 $y=f(x)$ 在点 $(-a,f(-a))$ 处的切线方程为 $y-1+a^3=4a^2(x+a)$，

即 $y=4a^2x+1+3a^3$.

令 $x=0$，得 $m=1+3a^3$，

此时 $m+\frac{1}{a}=1+3a^3+\frac{1}{a}$，令 $g(a)=3a^3+\frac{1}{a}+1$，$g'(a)=9a^2-\frac{1}{a^2}=0$，得 $a=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

当 $0<a<\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时，$g'(a)<0$；当 $a>\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时，$g'(a)>0$，

$g(a)$ 在区间 $(0,\frac{\sqrt{3}}{3})$ 上单调递减，在区间 $(\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty)$ 上单调递增，

故 $g(a)=m+\frac{1}{a}$ 的最小值为 $g(\frac{\sqrt{3}}{3})=3\times(\frac{\sqrt{3}}{3})^3+\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{3}}+1=1+\frac{4\sqrt{3}}{3}$. …… 15 分

(20)(本小题 15 分)

解:(Ⅰ)由题意得 $\begin{cases}2c=2\sqrt{3},\\ a=2,\\ a^2=b^2+c^2.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a^2=4,\\ b^2=1.\end{cases}$

故椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$. ……………………………………………………… 4 分

(Ⅱ)设 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，因为点 T 与点 Q 关于 x 轴对称，所以 $T(x_2,-y_2)$.

所以直线 PT 的斜率为 $k_1=\frac{y_1+y_2}{x_1-x_2}$，直线 PT 的方程：$y-y_1=\frac{y_1+y_2}{x_1-x_2}(x-x_1)$.

令 $y=0$，解得 $x_H=\frac{x_2y_1+x_1y_2}{y_1+y_2}$.

所以 $|DH|=\frac{x_2y_1+x_1y_2}{y_1+y_2}+2$.

因为 $|AD|=2$，

"存在常数 λ，使得 $|AD|\cdot|DH|=\lambda(|AD|-|DH|)$成立"

等价于"存在常数 λ，使得 $2\left(\frac{x_2y_1+x_1y_2}{y_1+y_2}+2\right)=\lambda\left(2-\frac{x_2y_1+x_1y_2}{y_1+y_2}-2\right)$成立"，

即 $2\left(\frac{x_2y_1+x_1y_2}{y_1+y_2}+2\right)=\lambda\left(-\frac{x_2y_1+x_1y_2}{y_1+y_2}\right)$成立.

化简得：$2(x_2y_1+x_1y_2+2y_1+2y_2)=-\lambda(x_2y_1+x_1y_2)$.

设直线 $l:y=k(x+4)$，$k\neq0$.

即"存在常数 λ，使得 $2x_1x_2+6(x_1+x_2)+16=-\lambda[x_1x_2+2(x_1+x_2)]$成立".

由 $\begin{cases}y=k(x+4),\\x^2+4y^2=4,\end{cases}$ 得 $(4k^2+1)x^2+32k^2x+64k^2-4=0$.

$\Delta=(32k^2)^2-4(4k^2+1)(64k^2-4)>0$，解得 $k^2<\frac{1}{12}$.

$x_1+x_2=-\frac{32k^2}{4k^2+1}$，$x_1x_2=\frac{64k^2-4}{4k^2+1}$.

$2x_1x_2+6(x_1+x_2)+16=\frac{8(16k^2-1)}{4k^2+1}-\frac{6\times32k^2}{4k^2+1}+16=\frac{8}{4k^2+1}$.

$x_1x_2+2(x_1+x_2)=\frac{64k^2-4}{4k^2+1}-\frac{64k^2}{4k^2+1}=\frac{-4}{4k^2+1}$.

欲使 $\frac{8}{4k^2+1}=-\lambda\left(\frac{-4}{4k^2+1}\right)$成立，只需 $\lambda=2$.

故存在 λ，使得 $|AD|\cdot|DH|=\lambda(|AD|-|DH|)$成立. $\lambda=2$. ………… 15 分

(21)(本小题 15 分)

解：(Ⅰ) $\beta=(0,1,2)$，$T(\alpha,\beta)=\{0\}$；$\beta=(0,2,1)$，$T(\alpha,\beta)=\{0,1\}$；$\beta=(1,0,2)$，$T(\alpha,\beta)=\{0,1\}$；

$\beta=(1,2,0)$，$T(\alpha,\beta)=\{1,2\}$；$\beta=(2,0,1)$，$T(\alpha,\beta)=\{1,2\}$；$\beta=(2,1,0)$，$T(\alpha,\beta)=\{0,2\}$. ………………………………………………………… 4 分

(Ⅱ)假设存在 $\alpha=(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6)$ 和 $\beta=(y_1,y_2,y_3,y_4,y_5,y_6)$ 均具有性质 $E(6)$，且 $T(\alpha,\beta)=\{0,1,2,3,4,5\}$，

则 $0+1+2+3+4+5=\sum_{i=1}^{6}|x_i-y_i|=15$.

因为 $|x_i-y_i|$ 与 x_i-y_i 同奇同偶，

所以 $\sum_{i=1}^{6}|x_i-y_i|$ 与 $\sum_{i=1}^{6}(x_i-y_i)$ 同奇同偶.

又因为 $\sum_{i=1}^{6}|x_i-y_i|=15$ 为奇数，$\sum_{i=1}^{6}(x_i-y_i)=0$ 为偶数，

这与$\sum_{i=1}^{6}|x_i-y_i|$与$\sum_{i=1}^{6}(x_i-y_i)$同奇同偶矛盾.

所以假设不成立.

综上,不存在均具有性质 $E(6)$ 的 α 和 β,满足 $T(\alpha,\beta)=\{0,1,2,3,4,5\}$. …………………………………………………………………… 10 分

(Ⅲ)不妨设 $\alpha=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 和 $\beta=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 构成一个数表 A:

x_1	x_2	$\cdots$	x_n
y_1	y_2	$\cdots$	y_n

交换数表中两行,可得数表 B:

y_1	y_2	$\cdots$	y_n
x_1	x_2	$\cdots$	x_n

调整数表各列的顺序,使第一行 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 变为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$,

设第二行变为 $z_1,z_2,\cdots,z_n$,

令 $\gamma=(z_1,z_2,\cdots,z_n)$,则 γ 具有性质 $E(n)$,且 $T(\alpha,\gamma)=\{0,1,\cdots,n-1\}$.

假设 $\beta=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 与 $\gamma=(z_1,z_2,\cdots,z_n)$ 相同,

则 $y_1=z_1,y_2=z_2,\cdots,y_n=z_n$.

不妨设 $x_1\neq y_1,x_1=y_k(k\neq1)$,则有 $z_1=x_k$,故 $|x_1-z_1|=|y_k-x_k|$.

因为 $T(\alpha,\beta)=\{0,1,\cdots,n-1\}$,所以 $|x_1-y_1|\neq|x_i-y_i|(i=2,3,\cdots,n)$.

因为 $y_1=z_1=x_k$,所以 $|x_1-y_1|=|x_k-y_k|(k\neq1)$.

与 $|x_1-y_1|\neq|x_i-y_i|(i=2,3,\cdots,n)$ 矛盾.

故对于具有性质 $E(n)$ 的 $\alpha=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,若 $\beta=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 具有性质 $E(n)$,

且 $T(\alpha,\beta)=\{0,1,\cdots,n-1\}$,

则存在一个具有性质 $E(n)$ 的 $\gamma=(z_1,z_2,\cdots,z_n)$,

使得 $T(\alpha,\gamma)=\{0,1,\cdots,n-1\}$,且 $\beta=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 与 $\gamma=(z_1,z_2,\cdots,z_n)$ 不同.

并且由 γ 的构造过程可以知道,当 $\alpha=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,$\beta=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 确定时,

$\gamma=(z_1,z_2,\cdots,z_n)$ 唯一确定. 由 α,γ 也仅能构造出 β.

综上,命题得证. …………………………………………………………………… 15 分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “精益求精、专业严谨” 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。