2018 北京市通州区高三（上）期末

数　　学（文）

2018 年 1 月

第 I 卷　（选择题　共 40 分）

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

1．已知集合 $A=\{x\in\mathbf{Z}\mid x^2-2x\le 0\}$，集合 $B=\{-1,0,1\}$，那么 $A\cup B$ 等于

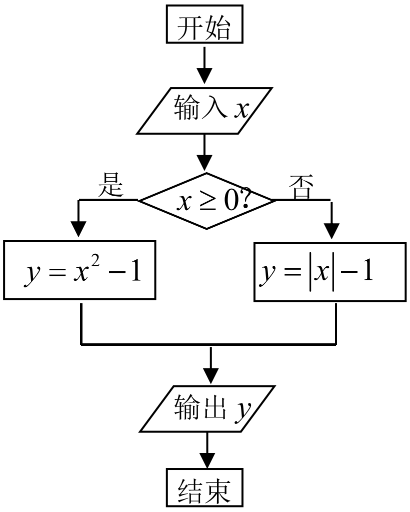
A．$\{-1\}$　　B．$\{0,1\}$　　C．$\{0,1,2\}$　　D．$\{-1,0,1,2\}$

2．下列函数在其定义域上既是奇函数又是增函数的是

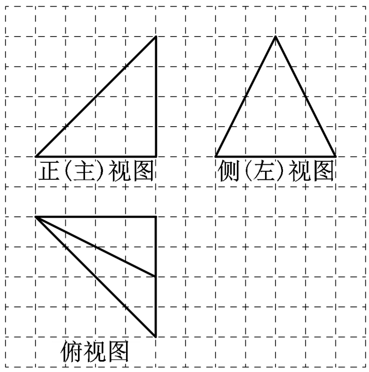
A．$y=-\dfrac{1}{x}$　　B．$y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$　　C．$y=x^3$　　D．$y=\log_2 x$

3．一个算法的程序框图如图所示，如果输出 y 的值是 1，那么输入 x 的值是

A．-2 或 2　　B．-2 或 $\sqrt{2}$　　C．$-\sqrt{2}$ 或 $\sqrt{2}$　　D．$-\sqrt{2}$ 或 2



（第 3 题）



（第 4 题）

4．在正方形网格中，某四面体的三视图如图所示．如果小正方形网格的边长为 1，那么该四面体的体积是

A．$\dfrac{32}{3}$　　B．16　　C．$\dfrac{64}{3}$　　D．32

5．已知 $a\in\mathbf{R}$，那么“直线 $y=ax-1$ 与 $y=-4ax+2$ 垂直”是“$a=\dfrac{1}{2}$”的

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件
C．充分必要条件　　D．既不充分也不必要条件

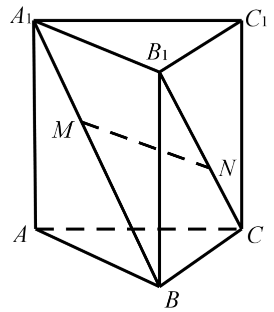
6．已知 a，$b\in\mathbf{R}$，$a>b>0$，则下列不等式一定成立的是

A．$\dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{b}$　　B．$\tan a>\tan b$　　C．$|\log_2 a|>|\log_2 b|$　D．$a\cdot 2^{-b}>b\cdot 2^{-a}$

7．已知点 $A(2,-1)$，点 $P(x,y)$ 满足线性约束条件 $\begin{cases}x+2\ge 0,\\ y-1\le 0,\\ x-2y\ge 4,\end{cases}$ O 为坐标原点，那么 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}$ 的最小值是

A. 11　　　B. 0　　　C. -1　　　D. -5

8．如图，各棱长均为1的正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$，M，N 分别为线段 A_1B，B_1C 上的动点，且 MN // 平面 ACC_1A_1，则这样的 MN 有



A. 1条　　　B. 2条

C. 3条　　　D. 无数条

第II卷　（非选择题　共110分）

二、填空题：本大题共6小题，每小题5分，共30分. 把答案填在答题卡上.

9．已知复数 $\dfrac{2\mathrm{i}-a}{\mathrm{i}}$ 的实部与虚部相等，那么实数 $a=$_______.

10．已知点 $P\left(2,2\sqrt{2}\right)$ 为抛物线 $y^2=2px$ 上一点，那么点 P 到抛物线准线的距离是_______.

11．在△ABC 中，已知 $AB=4$，$AC=6$，$A=60°$，那么 $BC=$ _______.

12．已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，若 $|\boldsymbol{a}|=3$，$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{13}$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=6$，则 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 夹角的度数为_______.

13．已知圆 C 的圆心在 x 轴上，半径长是 $\sqrt{5}$，且与直线 $x-2y=0$ 相切，那么圆 C 的方程是_______.

14．已知函数 $f(x)=\begin{cases}2^x+a, & x<2,\\ a-x, & x\geq 2.\end{cases}$

（1）若 $a=-\sqrt{2}$，则 $f(x)$ 的零点是_______.

（2）若 $f(x)$ 无零点，则实数 a 的取值范围是_______.

三、解答题：本大题共6小题，共80分. 解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

15．（本题满分13分）

已知函数 $f(x)=2\sin x\cos x+\cos 2x$.

（I）求 $f(x)$ 的最小正周期及单调递增区间；

（II）求 $f(x)$ 在区间 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值和最小值.

16．（本题满分 13 分）

某市准备引进优秀企业进行城市建设．城市的甲地、乙地分别对 5 个企业（共 10 个企业）进行综合评估，得分情况如茎叶图所示．

（Ⅰ）根据茎叶图，求乙地对企业评估得分的平均值和方差；

（Ⅱ）规定得分在 85 分以上为优秀企业．若从甲、乙两地准备引进的优秀企业中各随机选取 1 个，求这两个企业得分的差的绝对值不超过 5 分的概率．

甲地企业		乙地企业
6　3	9	4　7
9　6	8	3　8
9	7	8

注：方差 $s^2=\frac{1}{n}\left[\left(x_1-\overline{x}\right)^2+\left(x_2-\overline{x}\right)^2+\cdots+\left(x_n-\overline{x}\right)^2\right]$

17．（本题满分 13 分）

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，$a_1=\frac{1}{2}$，$2a_{n+1}=S_n+1$．

（Ⅰ）求 a_2，a_3 的值；

（Ⅱ）设 $b_n=2a_n-2n-1$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n．

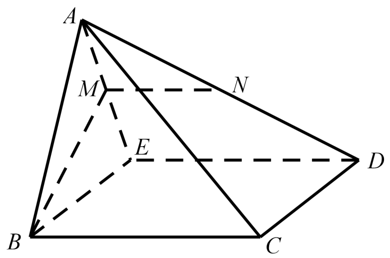
18.（本题满分 14 分）

如图，在四棱锥 $A-BCDE$ 中，底面 $BCDE$ 为正方形，平面 $ABE\perp$ 底面 $BCDE$， $AB=AE=BE$，点 M，N 分别是 AE， AD 的中点.

（Ⅰ）求证： $MN//$ 平面 ABC；

（Ⅱ）求证： $BM\perp$ 平面 ADE；

（Ⅲ）在棱 DE 上求作一点 P，使得 $CP\perp AD$，并说明理由.



19.（本题满分 13 分）

已知椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$ 过点 $\left(0,-1\right)$，离心率 $e=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

（Ⅰ）求椭圆的方程；

（Ⅱ）已知点 $P\left(m,0\right)$，过点 $\left(1,0\right)$ 作斜率为 $k\left(k\neq 0\right)$ 直线 l，与椭圆交于 M，N 两点，若 x 轴平分 $\angle MPN$，求 m 的值.

20.（本题满分 14 分）

已知函数 $f\left(x\right)=x+a\ln x$， $a\in\mathbf{R}$.

（Ⅰ）当 $a=1$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程；

（Ⅱ）求函数 $f\left(x\right)$ 在 $\left[1,e\right]$ 上的最小值；

（Ⅲ）若函数 $F\left(x\right)=\dfrac{1}{x^2}f\left(x\right)$，当 $a=2$ 时，$F\left(x\right)$ 的最大值为 M ，求证：$M<\dfrac{3}{2}$.

数学试题答案

一、选择题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	D	C	B	A	B	D	C	D

二、填空题

9. 2 10. 3 11. $2\sqrt{7}$

12. $\dfrac{\pi}{3}$ 13. $(x-5)^2+y^2=5$，$(x+5)^2+y^2=5$ 14. $\dfrac{1}{2}$，$(-\infty,-4]\cup[0,2)$

三、解答题

15. **解**：（Ⅰ）因为 $f(x)=\sin 2x+\cos 2x=\sqrt{2}\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)$．……………………4 分

所以 $f(x)$ 的最小正周期 $T=\dfrac{2\pi}{2}=\pi$．……………………5 分

由 $-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi<2x+\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$，得 $-\dfrac{3\pi}{8}+k\pi<x<\dfrac{\pi}{8}+k\pi$.

所以 $f(x)$ 的单调递增区间是 $\left(-\dfrac{3\pi}{8}+k\pi,\dfrac{\pi}{8}+k\pi\right),k\in Z$.……………………7 分

（Ⅱ）因为 $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$，所以 $2x+\dfrac{\pi}{4}\in\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{5\pi}{4}\right]$.

所以当 $2x+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}$，即 $x=\dfrac{\pi}{8}$ 时，函数　　取得最大值是 $\sqrt{2}$．

当 $2x+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{5\pi}{4}$，即 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 时，函数　　取得最小值 $\sqrt{2}\sin\dfrac{5\pi}{4}=-1$..

所以 $f(x)$ 在区间 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值和最小值分别为 $\sqrt{2}$ 和 -1．……………………13 分

16. **解**：（Ⅰ）乙地对企业评估得分的平均值是 $\dfrac{1}{5}\times(97+94+88+83+78)=88$，

方差是 $\dfrac{1}{5}\times\left[(97-88)^2+(94-88)^2+(88-88)^2+(83-88)^2+(78-88)^2\right]=48.4$．

……………………4 分

（Ⅱ）从甲、乙两地准备引进的优秀企业中各随机选取 1 个，有 $(96,97)$，$(96,94)$，$(96,88)$，$(93,97)$，$(93,94)$，$(93,88)$，$(89,97)$，$(89,94)$，$(89,88)$，$(86,97)$，$(86,94)$，$(86,88)$ 共 12 组，

……………………8 分

设“得分的差的绝对值不超过 5 分”为事件 A，

则事件 A 包含有 $(96,97)$，$(96,94)$，$(93,97)$，$(93,94)$，$(93,88)$，$(89,94)$，$(89,88)$，$(86,88)$ 共 8 组.

……………………11 分

所以 $P(A)=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$.

所以得分的差的绝对值不超过 5 分的概率是 $\frac{2}{3}$. ……………………13 分

17. （Ⅰ）因为 $a_1=\frac{1}{2}$，$2a_{n+1}=S_n+1$，所以 $2a_2=S_1+1=a_1+1=\frac{3}{2}$.

所以 $a_2=\frac{3}{4}$. ……………………2 分

所以 $2a_3=S_2+1=a_1+a_2+1=\frac{9}{4}$.

所以 $a_3=\frac{9}{8}$. ……………………4 分

（Ⅱ）因为 $2a_{n+1}=S_n+1$，所以 $2a_n=S_{n-1}+1$，$(n\geq 2)$

所以 $2a_{n+1}-2a_n=S_n-S_{n-1}=a_n$. 所以 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{3}{2}$. ……………………7 分

因为 $\frac{a_2}{a_1}=\frac{3}{2}$. ……………………8 分

所以数列 $\{a_n\}$ 是首项 $a_1=\frac{1}{2}$，公比是 $\frac{3}{2}$ 的等比数列.

所以 $a_n=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$.

因为 $b_n=2a_n-2n-1$，所以 $b_n=\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}-2n-1$. ……………………9 分

所以 $T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$

$$=\left(\frac{3}{2}\right)^0-3+\left(\frac{3}{2}\right)^1-5+\cdots+\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}-2n-1=\left(\left(\frac{3}{2}\right)^0+\left(\frac{3}{2}\right)^1+\cdots+\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\right)-(3+5+\cdots+(2n+1))$$

$$=\left(\left(\frac{3}{2}\right)^0+\left(\frac{3}{2}\right)^1+\cdots+\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\right)-(3+5+\cdots+(2n+1))$$

$$=\frac{1-\left(\frac{3}{2}\right)^n}{1-\frac{3}{2}}-\frac{n(2n+4)}{2}=2\left(\frac{3}{2}\right)^n-n^2-2n-2.$$

所以数列$\{b_n\}$的前n项和$T_n=2\left(\frac{3}{2}\right)^n-n^2-2n-2$.……………………13 分

18. 解：（Ⅰ）因为点M，N分别是AE，AD的中点，所以$MN//DE$.

因为四边形　　　为正方形，所以$BC//DE$.

所以$MN//BC$.

因为$MN\not\subset$平面ABC，$BC\subset$平面ABC，

所以$MN//$平面ABC.……………………4 分

（Ⅱ）因为平面$ABE\perp$底面$BCDE$，$DE\perp BE$，

所以$DE\perp$平面ABE.

因为$BM\subset$平面ABE，所以$DE\perp BM$.

因为$AB=AE=BE$，点M是AE的中点，所以$BM\perp AE$.

因为$DE\cap AE=E$，$DE\subset$平面ADE，$AE\subset$平面ADE，

所以$BM\perp$平面ADE.……………………9 分

（Ⅲ）取BE中点F，连接AF，DF，过C点作$CP\perp DF$，交DE于点P.　则点P即为所求作的点.

……………………11 分

理由：因为$AB=AE=BE$，点F是BE的中点，所以$AF\perp BE$.

因为平面$ABE\perp$底面$BCDE$，所以$AF\perp$平面$BCDE$.

所以$AF\perp CP$.

因为$CP\perp DF$，$AF\cap DF=F$，所以$CP\perp$平面ADF.

因为$AD\subset$平面ADF，所以$CP\perp AD$.……………………14 分

19. 解：（Ⅰ）因为椭圆的焦点在x轴上，过点$(0,-1)$，离心率$e=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

所以$b=1$，$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.……………………2 分

所以由$a^2=b^2+c^2$，得$a^2=2$.……………………3 分

所以椭圆C的标准方程是$\frac{x^2}{2}+y^2=1$.……………………4 分

（Ⅱ）因为过椭圆的右焦点F作斜率为k直线l，所以直线l的方程是$y=k(x-1)$.

联立方程组$\begin{cases} y=k(x-1), \\ \frac{x^2}{2}+y^2=1, \end{cases}$ 消去y，得$(1+2k^2)x^2-4k^2x+2k^2-2=0$.

显然$\Delta>0$. 设点$P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，

所以 $x_1+x_2=\dfrac{4k^2}{1+2k^2}$， $x_1\cdot x_2=\dfrac{2k^2-2}{1+2k^2}$.………………………7 分

因为 x 轴平分 $\angle MPN$，所以 $\angle MPO=\angle NPO$.

所以 $k_{MP}+k_{NP}=0$.………………………9 分

所以 $\dfrac{y_1}{x_1-m}+\dfrac{y_2}{x_2-m}=0$. 所以 $y_1(x_2-m)+y_2(x_1-m)=0$.

所以 $k(x_1-1)(x_2-m)+k(x_2-1)(x_1-m)=0$.

所以 $2k\cdot x_1x_2-(k+km)(x_1+x_2)+2km=0$.

所以 $2k\cdot\dfrac{2k^2-2}{1+2k^2}-(k+km)\dfrac{4k^2}{1+2k^2}+2km=0$.

所以 $\dfrac{-4k+2km}{1+2k^2}=0$.

所以 $-4k+2km=0$.………………………12 分

因为 $k\neq 0$，

所以 $m=2$.………………………13 分

20. **解：**（Ⅰ）因为函数 $f(x)=x+a\ln x$，且 $a=1$，

所以 $f(x)=x+\ln x$， $x\in(0,+\infty)$.

所以 $f'(x)=1+\dfrac{1}{x}$.

所以 $f(1)=1$， $f'(1)=2$.

所以曲线 在 $x=1$ 处的切线方程是 $y-1=2(x-1)$，即 $2x-y-1=0$.

………………………3 分

（Ⅱ）因为函数 $f(x)=x+a\ln x(x>0)$，所以 $f'(x)=1+\dfrac{a}{x}=\dfrac{x+a}{x}$.

（1）当 $a\geq 0$ 时， $f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

所以函数 $f(x)$ 在 $[1,e]$ 上的最小值是 $f(1)=1$.

（2）当 $a<0$ 时，令 $f'(x)>0$，即 $x+a>0$，所以 $x>-a$.

令 $f'(x)<0$，即 $x+a<0$，所以 $x<-a$.

（i）当 $0<-a\leq 1$，即 $a\geq -1$ 时， $f(x)$ 在 $[1,e]$ 上单调递增，

所以 $f(x)$ 在 $[1,e]$ 上的最小值是 $f(1)=1$.

（ii）当$1<-a<e$，即$-e\le a\le -1$时，$f\left(x\right)$在$\left[1,-a\right]$上单调递减，在$\left(-a,e\right]$上单调递增，

所以$f\left(x\right)$在$\left[1,e\right]$上的最小值是$f\left(-a\right)=-a+a\ln\left(-a\right)$.

（iii）当$-a\ge e$，即$a\le -e$时，$f\left(x\right)$在$\left[1,e\right]$上单调递减，

所以$f\left(x\right)$在$\left[1,e\right]$上的最小值是$f\left(e\right)=e+a$.

综上所述，当$a\ge -1$时，$f\left(x\right)$在$\left[1,e\right]$上的最小值是$f\left(1\right)=1$.

当$-e\le a\le -1$时，$f\left(x\right)$在$\left[1,e\right]$上的最小值是$f\left(-a\right)=-a+a\ln\left(-a\right)$.

当$a\le -e$时，$f\left(x\right)$在$\left[1,e\right]$上的最小值是$f\left(e\right)=e+a$.……………………7 分

（Ⅲ）因为函数$F\left(x\right)=\dfrac{1}{x^2}f\left(x\right)$，所以$F\left(x\right)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{a\ln x}{x^2}$.

所以当$a=2$时，$F'\left(x\right)=\dfrac{2-x-4\ln x}{x^3}$.

令$g\left(x\right)=2-x-4\ln x$，所以$g\left(x\right)$是单调递减函数.

因为$g\left(1\right)=1>0$，$g\left(2\right)=-4\ln 2<0$，

所以在$\left(1,2\right)$上存在x_0，使得$g\left(x_0\right)=0$，即$2-x_0-4\ln x_0=0$.

所以当$x\in\left(1,x_0\right)$时，$g\left(x\right)>0$；当$x\in\left(x_0,2\right)$时，$g\left(x\right)<0$.

即当$x\in\left(1,x_0\right)$时，$F'\left(x\right)>0$；当$x\in\left(x_0,2\right)$时，$F'\left(x\right)<0$.

所以$F\left(x\right)$在$\left(1,x_0\right)$上单调递增，在$\left(x_0,2\right)$上单调递减.

所以当$x=x_0$时，$F\left(x\right)$取得最大值是$M=F\left(x_0\right)=\dfrac{x_0+2\ln x_0}{{x_0}^2}$.

因为$2-x-4\ln x=0$，所以$M=\dfrac{2+x_0}{2{x_0}^2}=\dfrac{1}{{x_0}^2}+\dfrac{1}{2x_0}=\left(\dfrac{1}{x_0}+\dfrac{1}{4}\right)^2-\dfrac{1}{16}$.

因为$x_0\in\left(1,2\right)$，所以$\dfrac{1}{x_0}\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$.

所以$M<\dfrac{3}{2}$.……………………14 分