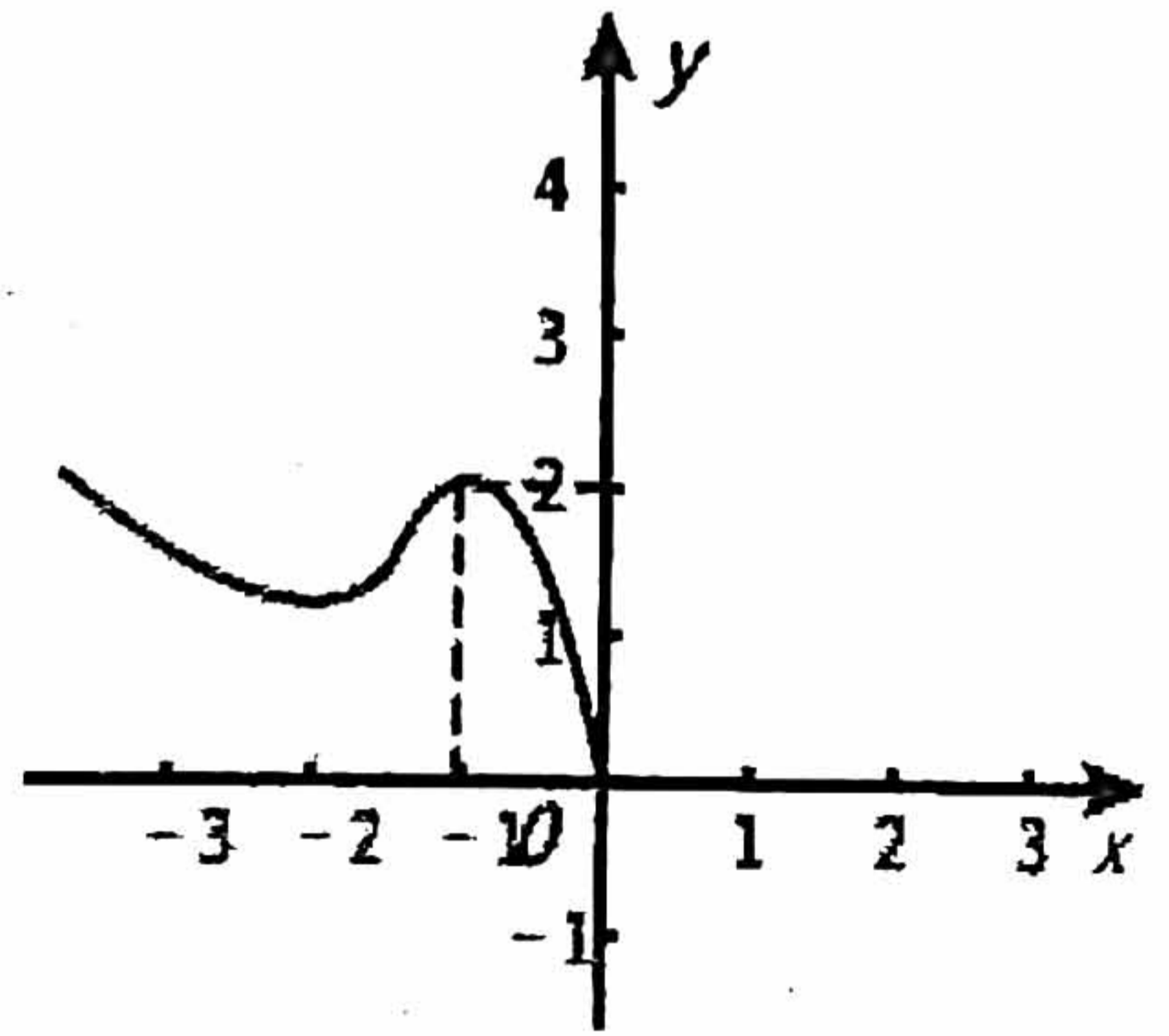


# 数学

(清华附中高 19 级) 2021,4

## 一、选择题 (共 10 小题; 共 40 分)

- 已知集合  $A = \{x | -1 < x < 3\}$ ,  $B = \{x | 0 < x \leq 4\}$ , 则  $A \cap B = ( \quad )$   
 A. (0,3)                      B. (-1,4)                      C. (0,4]                      D. (-1,4]
- 已知等比数列  $\{a_n\}$  的各项均为正数, 且  $a_3 = 3$ , 则  $\log_3 a_1 + \log_3 a_2 + \log_3 a_3 + \log_3 a_4 + \log_3 a_5 = ( \quad )$   
 A.  $\frac{5}{2}$                       B. 5  
 C. 10                      D. 15
- 已知  $f(x)$  为偶函数, 其局部图象如图所示, 那么  
 (      )  
 A.  $f(2) = 2$                       B.  $f(2) = -2$   
 C.  $f(2) > 2$                       D.  $f(2) < 2$
- 已知等差数列  $\{a_n\}$ , 则“ $a_2 > a_1$ ”是“数列  $\{a_n\}$  为单调递增数列”的 (      )  
 A. 充分而不必要条件                      B. 必要而不充分条件  
 C. 充分必要条件                      D. 既不充分也不必要条件
- 从 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 中不放回地依次取 2 个数, 事件  $A =$ “第一次取到的是奇数”,  $B =$ “第二次取到的是奇数”, 则  $P(B | A) = ( \quad )$   
 A.  $\frac{1}{2}$                       B.  $\frac{2}{5}$                       C.  $\frac{3}{7}$                       D.  $\frac{1}{5}$
- 设变量  $x$  与  $y$  有如下五组数据: 由散点图可知,  $y$  与  $x$  之间有很好的线性相关关系, 已知其线性回归方程是  $y = -0.5x + a$ , 则  $a = ( \quad )$



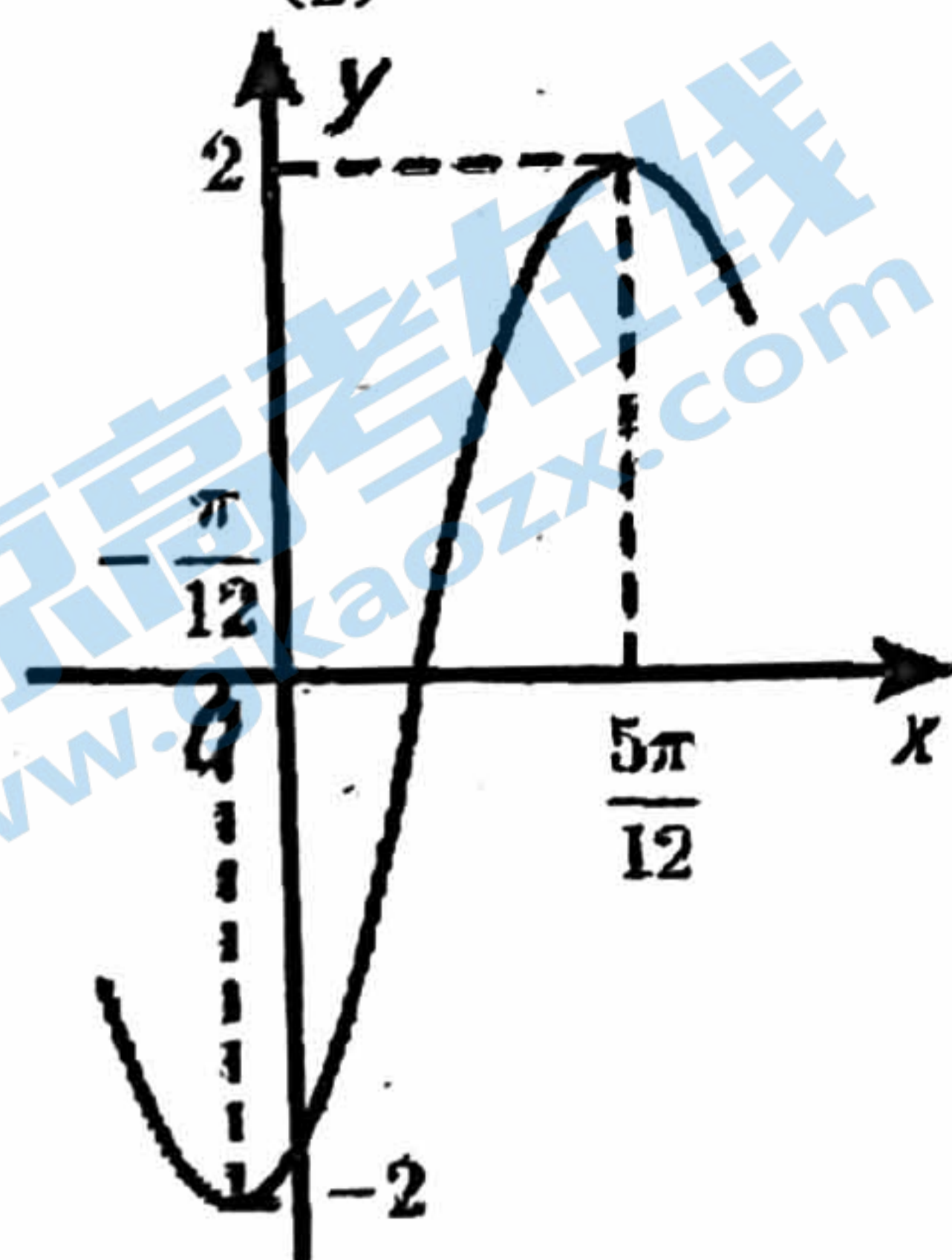
$x$	1	2	3	4	5
$y$	4.5	4	2	3	2.5

- A. 4.4                      B. 4.5                      C. 4.6                      D. 4.7
- 设抛物线  $C: y^2 = 4x$  的焦点为  $F$ ,  $O$  为坐标原点,  $P$  是  $C$  上一点. 若  $|PF| = 4$ , 则  $|OP| = ( \quad )$   
 A.  $\sqrt{21}$                       B. 5                      C.  $2\sqrt{7}$                       D.  $4\sqrt{2}$



8. 函数  $f(x) = 2\sin(\omega x + \varphi)$  ( $\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$ ) 的部分图象如图所示, 则  $f(\frac{\pi}{2}) =$  ( )

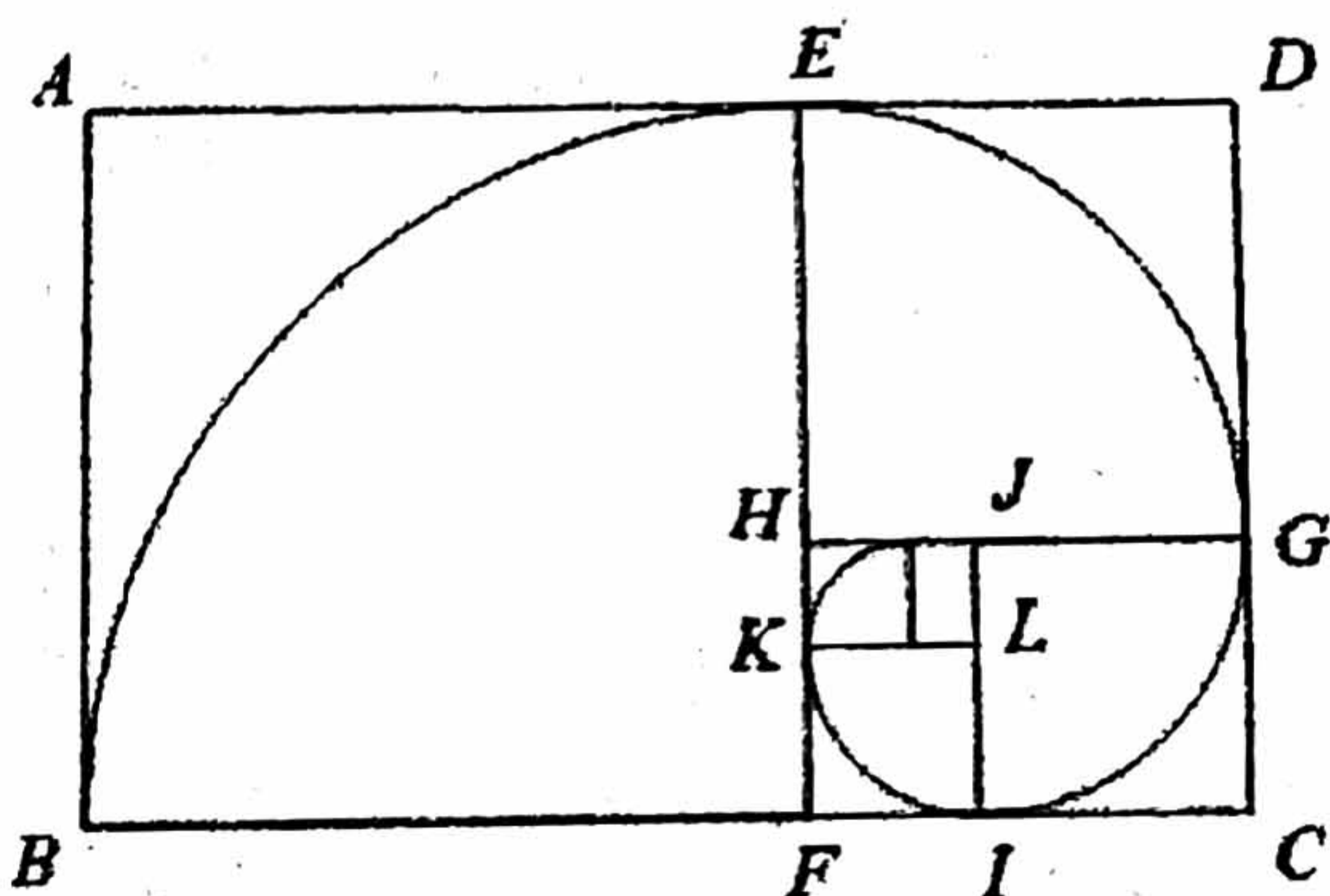
- A.  $-\sqrt{3}$                       B.  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$   
 C.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$                           D.  $\sqrt{3}$



9. 某班上午有 5 节课, 分别安排语文、数学、英语、物理、化学各 1 节课, 要求语文与化学相邻, 且数学不排在第一节课, 则不同的排课法的种数是 ( )

- A. 36                              B. 24  
 C. 18                              D. 12

10. 斐波那契螺线又叫黄金螺线, 广泛应用于绘画、建筑等, 这种螺线可以按下列方法画出: 如图, 在黄金矩形  $ABCD$  ( $\frac{AB}{BC} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ) 中作边长为 1 的正方形  $ABFE$ , 以  $F$  为圆心,  $AB$  长为半径作圆弧  $\widehat{BE}$ ; 然后在矩形  $CDEF$  中作正方形  $DEHG$ , 以  $H$  为圆心,  $DE$  长为半径作圆弧  $\widehat{EG}$ ; ...; 如此继续下去, 这些圆弧就连成了斐波那契螺线. 记圆弧  $\widehat{BE}$ ,  $\widehat{EG}$ ,  $\widehat{GI}$  的长度分别为  $l$ ,  $m$ ,  $n$ , 则  $l+m+n =$  ( )



- A.  $\frac{3\pi}{4}$                       B.  $\frac{5\pi}{6}$                       C.  $\pi$                       D.  $\frac{5\pi}{4}$

**二、填空题 (共 5 小题; 共 25 分)**

11. 已知复数  $z$  满足  $zi = 2 - i$  ( $i$  为虚数单位), 则  $z =$  \_\_\_\_\_.

12.  $(x - \frac{1}{x})^6$  的展开式的常数项为 \_\_\_\_\_.

13. 某学生为了研究高二年级同学的体质健康成绩与学习成绩的关系, 从高二年级同学中随机抽取 30 人, 统计其体质健康成绩和学习成绩, 得到  $2 \times 2$  列联表如下:

	体质健康成绩高	体质健康成绩低	总计
学习成绩高	17	2	19
学习成绩低	3	8	11
总计	20	10	30

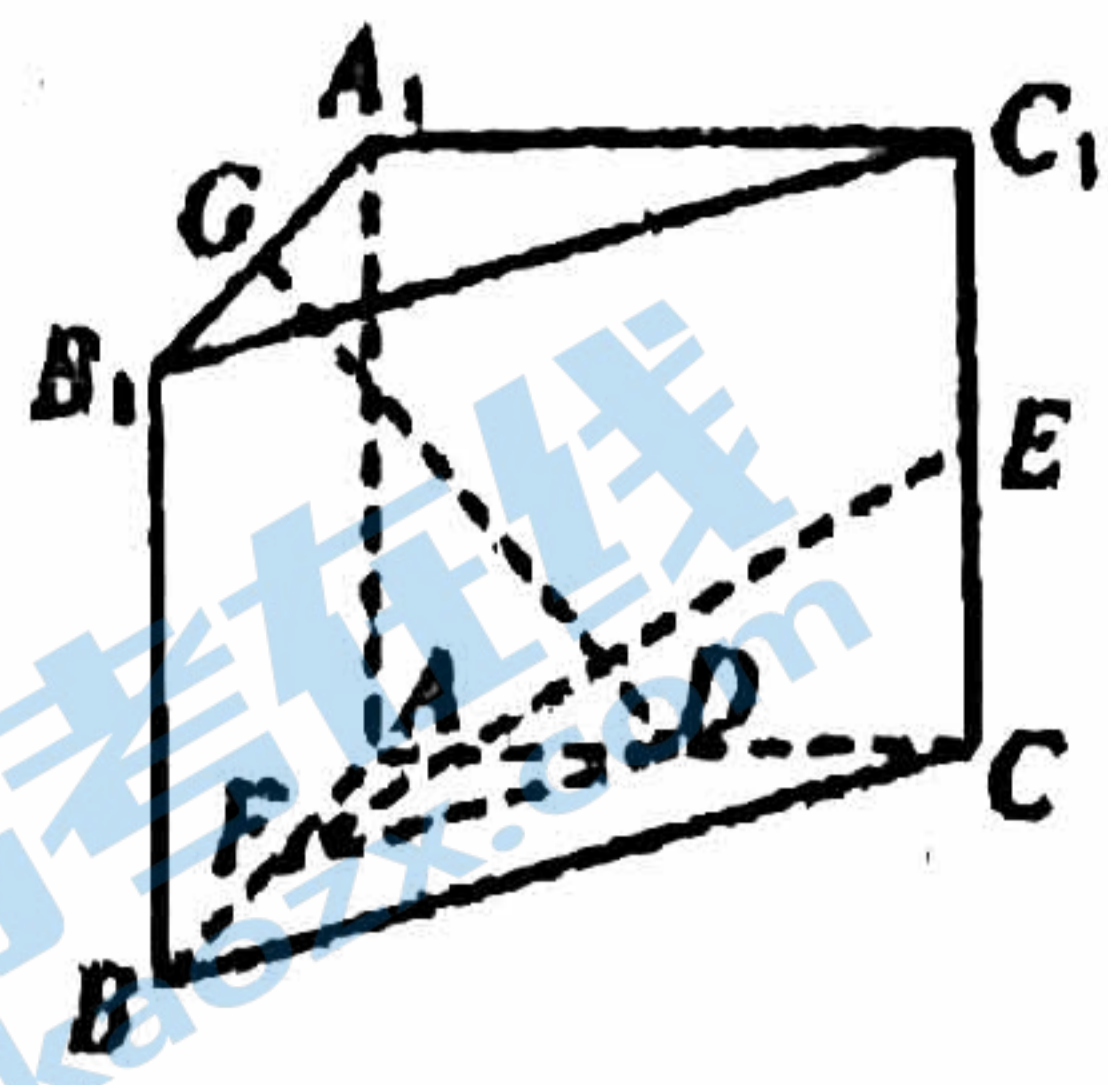
有 \_\_\_\_\_ 的把握认为学生的体质健康成绩高低与学习成绩高低有关.

附:  $\chi^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$ ,

$P(\chi^2 \geq k)$	0.100	0.050	0.010	0.001
$k$	2.706	3.841	6.635	10.828



14. 如图, 在直三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$  中,  $\angle BAC = 90^\circ$ ,  $AB = AC = AA_1 = 2$ , 点  $G$ 、 $E$ 、 $F$  分别是  $A_1B_1$ 、 $CC_1$ 、 $AB$  的中点, 点  $D$  是  $AC$  上的动点. 若  $GD \perp EF$ , 则线段  $DF$  长度为\_\_\_\_\_.



15. 从 4G 到 5G 通信, 网络速度提升了 40 倍. 其中, 香农公式  $C = W \log_2 \left( 1 + \frac{S}{N} \right)$  是被广泛公认的通信理论基础和研究依据, 它表示: 在受噪声干扰的信道中, 最大信息传递率  $C$  取决于信道带宽  $W$ 、信道内信号的平均功率  $S$ 、信道内部的高斯噪声功率  $N$  的大小, 其中  $\frac{S}{N}$  叫做信噪比. 根据香农公式, 以下说法正确的是\_\_\_\_\_.

- ①若不改变信噪比  $\frac{S}{N}$ , 而将信道带宽  $W$  增加  $k$  倍, 则  $C$  增加  $k$  倍.  
 ②若不改变信道带宽  $W$  和信道内信号的平均功率  $S$ , 而将高斯噪声功率  $N$  降低为原来的一半, 则  $C$  增加一倍.  
 ③若不改变带宽  $W$ , 而将信噪比  $\frac{S}{N}$  从 15 提升至 127,  $C$  增加了 50%.  
 ④若不改变带宽  $W$ , 要使得  $C$  增加一倍, 则需要将信噪比  $\frac{S}{N}$  从 63 提升至 1023.

### 三、解答题 (共 6 小题; 共 85 分)

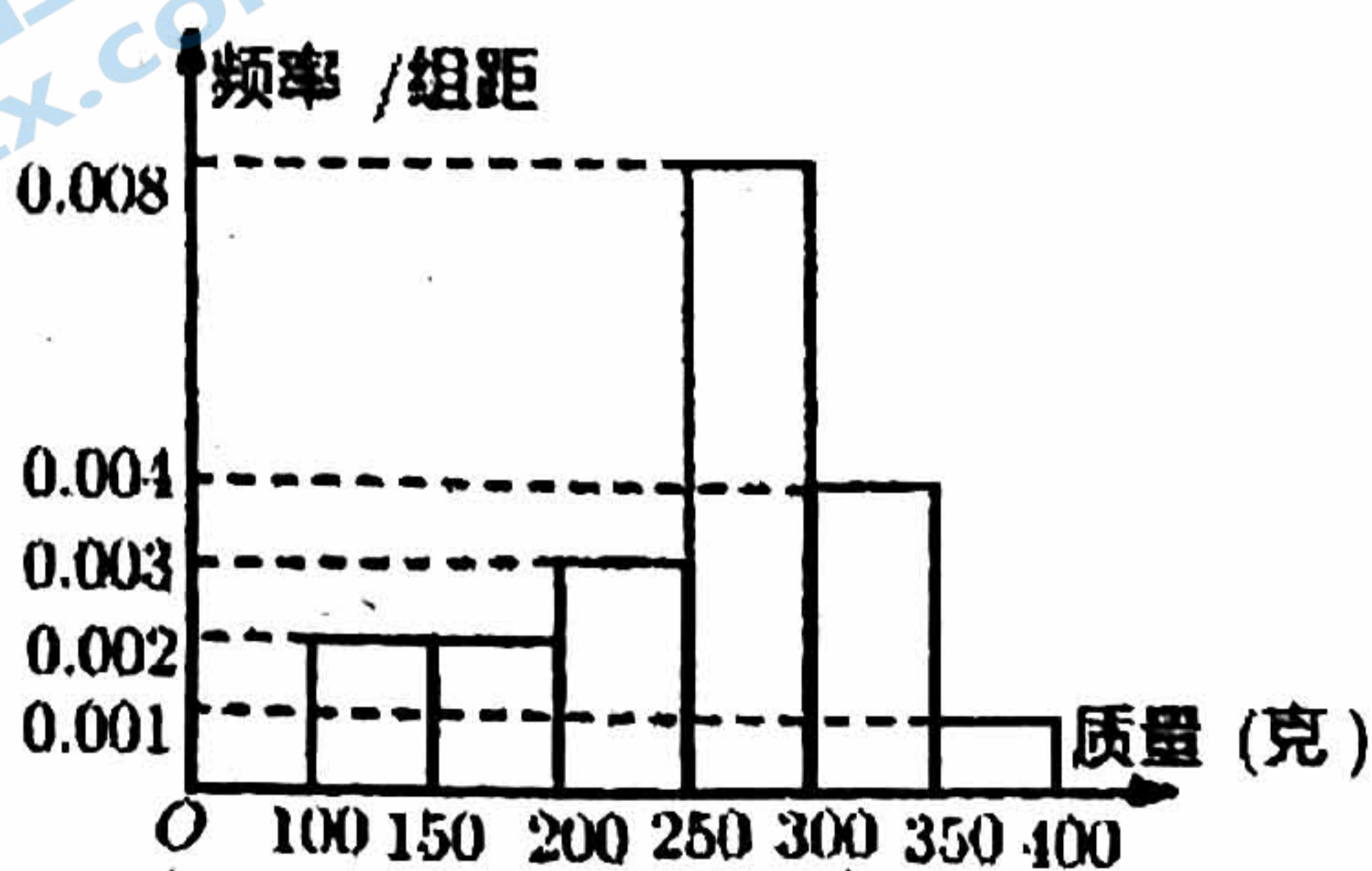
16. 在  $\triangle ABC$  中,  $\cos A = \frac{7}{8}$ ,  $c = 6$ , 且  $b \neq c$ , 再从条件①、条件②中选择一个作为已知,

条件①:  $\sin B = 2\sin A$ ; 条件②:  $a + b = 2c$ . 求:

(I)  $b$  的值.

(II)  $\triangle ABC$  的面积.

17. 为了解果园某种水果产量情况, 随机抽取 100 个水果测量质量, 样本数据分组为  $[100,150)$ ,  $[150,200)$ ,  $[200,250)$ ,  $[250,300)$ ,  $[300,350)$ ,  $[350,400]$  (单位: 克), 其频率分布直方图如图所示:



- (I) 用分层抽样的方法从样本里质量在  $[250,300)$ ,  $[300,350)$  的水果中抽取 6 个, 求质

量在  $[250,300)$  的水果数量. 关注北京高考在线官方微信: 北京高考资讯 (ID:bj-gaokao), 获取更多试题资料及排名分析信息.



(II) 从(I)中得到的6个水果中随机抽取2个,记 $X$ 为质量在 $[300,350)$ 的水果数量,求 $X$ 的分布列和数学期望.

(III) 果园现有该种水果约20000个,其等级规格及销售价格如下表所示,

质量 $m$ (单位:克)	$m < 200$	$200 \leq m < 300$	$m \geq 300$
等级规格	二等	一等	特等
价格(元/个)	5	7	9

试估计果园该种水果的销售收入.

18. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_2 + a_7 = -23$ ,  $S_{10} = -145$ .

(I) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(II) 若数列 $\{a_n + b_n\}$ 是首项为1,公比为 $a$ 的等比数列,求 $\{b_n\}$ 的前 $n$ 项和 $S_n$ .

19. 已知:函数 $f(x) = \frac{e^x}{x-a}$  ( $a \neq 0$ ).

(I) 若 $a = 1$ ,求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程;

(II) 求函数 $y = f(x)$ 的单调区间;

(III)  $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上的满足 $f(x) \geq 1$ ,求 $a$ 的取值范围.

20. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ .

(I) 求椭圆 $C$ 的离心率和长轴长.

(II) 已知直线 $y = kx - 2$ 与椭圆 $C$ 有两个不同的交点 $A, B$ ,  $P$ 为 $x$ 轴上一点.是否存在实数 $k$ ,使得 $\triangle PAB$ 是以点 $P$ 为直角顶点的等腰直角三角形?若存在,求出 $k$ 的值及点 $P$ 的坐标;若不存在,说明理由.

21. 定义数列 $\{a_n\}$ 如下:  $a_1 = 1$ , 对任意的正整数 $n$ , 有

$$a_{n+1} = \begin{cases} 2n+3, & \text{若 } a_n = 0, \\ a_n - 1, & \text{若 } 1 \leq a_n \leq 2n, \\ a_n + 1, & \text{若 } a_n > 2n. \end{cases}$$

(I) 写出 $a_2, a_3, a_4, a_5$ 的值;

(II) 证明: 对任意的正整数 $n$ , 都有 $0 \leq a_n \leq 2n + 1$ ;

(III) 是否每一个非负整数都在数列 $\{a_n\}$ 中出现? 证明你的结论.