

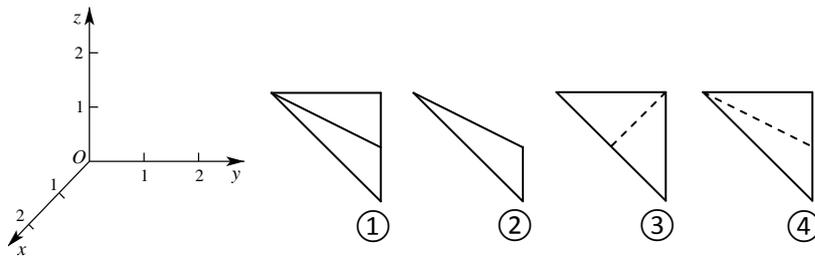
2018 北京清华附中高二（下）期末

数 学（理）

（清华附中高 16 级）2018.7

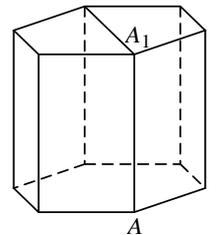
一、选择题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 设双曲线的两条渐近线互相垂直，则该双曲线的离心率为（ ）
 (A) 1 (B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (C) $\sqrt{2}$ (D) 2
2. “ $a < b$ ”是“ $a^2 < b^2$ ”的（ ）
 (A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件
 (C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件
3. 已知命题 $p: \exists x_0 \in \mathbf{R}, x_0^2 + 1 < 2x_0$; 命题 $q: mx^2 - mx - 1 < 0$ 若恒成立，则 $-4 < m \leq 0$. 那么（ ）
 (A) p 是真命题 (B) $\neg q$ 是真命题
 (C) $p \wedge q$ 是真命题 (D) $p \vee q$ 是真命题
4. 从 1, 2, 3, 4, 5 这 5 个数中任取两个数，则所取两个数之积为奇数的概率是（ ）
 (A) $\frac{2}{5}$ (B) $\frac{3}{10}$ (C) $\frac{3}{5}$ (D) $\frac{4}{5}$
5. 在极坐标系中，方程 $(\rho \cos \theta - 2)(\rho - 2 \sin \theta) = 0$ 表示的曲线是（ ）
 (A) 两个圆 (B) 一个圆和一条直线
 (C) 两条直线 (D) 两条射线
6. 在如图所示的空间直角坐标系 $O-xyz$ 中，一个四面体的顶点坐标分别是 $(0, 0, 2)$, $(2, 2, 0)$, $(1, 2, 1)$, $(2, 2, 2)$. 给出编号为①②③④的四个图，则该四面体的正视图和俯视图分别为（ ）



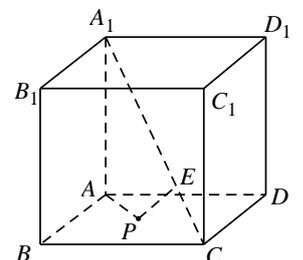
- (A) ①和② (B) ③和① (C) ④和③ (D) ④和②

7. 《九章算术》中，称底面为矩形而有一个侧棱垂直于底面的四棱锥为阳马. 设 AA_1 是正六柱的一条侧棱，如图，若阳马以该正六棱柱的顶点为顶点、以 AA_1 为底面矩形的一个边，则这样的阳马的个数是（ ）



- (A) 4 (B) 8
 (C) 12 (D) 16

8. 如图，正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，底面 $ABCD$ 上一动点 P 满足：点 P 到棱 AA_1 的距离与到正方体对角线 A_1C 的距离相等. 则动点 P 的轨迹是（ ）



- (A) 两个点 (B) 一条线段

(C) 圆的一部分 (D) 抛物线的一部分

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。

9. 若复数 $(a-i)(1+i)$ 为纯虚数，则实数 $a =$ _____.

10. 二项式 $(\sqrt{x} - \frac{1}{2x})^6$ 的展开式中常数项为_____.

11. 有 7 名学生，其中 3 名会唱歌，3 名会跳舞，1 名既会唱歌也会跳舞，现从中选出 2 名会唱歌的、1 名会跳舞的学生去参加文艺演出，则不同的选法共有_____种. (用数字作答)

12. 随机变量 ξ 的分布列如下：

ξ	-1	0	1
P	a	b	c

其中 $a = \frac{1}{3}$ ，若 $E(\xi) = \frac{1}{6}$ ，则 $c =$ _____.

13. 观察如图的三角形数阵，依次规律，则第 61 行的第 2 个数是_____.

1
3 3
5 6 5
7 11 11 7
9 18 22 18 9
11 27 40 40 27 11

14. 设函数 $f(x) = \begin{cases} x^3 - 3ax, & x \leq 1, \\ -2x + 4a, & x > 1. \end{cases}$

① 若 $a = 0$ 时，则 $f(x)$ 的最大值为_____；

② 若 $f(x)$ 有最大值，则实数 a 的取值范围是_____.

三、解答题共 6 小题，共 80 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

15. (本小题 13 分)

在 $\triangle ABC$ 中， a, b, c 分别为角 A, B, C 所对的边， $a = \sqrt{3}$ ， $1 + 2\cos(B+C) = 0$.

(I) 求 $\angle A$ ；

(II) 求 BC 边上的高.

16. (本小题 13 分)

已知函数 $f(x) = x^2 - x - 1 - \ln x$.

(I) 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(II) 求函数 $f(x)$ 的零点的个数和极值点的个数.

17. (本小题 14 分)

已知 A, F 分别是椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左顶点、右焦点, 点 P 为椭圆上的一个动点, 当 $PF \perp x$ 轴时, $AF = 2PF$.

(I) 求椭圆 C 的离心率;

(II) 若椭圆 C 上存在点 Q , 使得四边形 $AOPQ$ 是平行四边形 (点 P 在第一象限), 求直线 AP 和 OQ 的斜率之积.

18. (本小题 13 分)

已知函数 $f(x) = (x^2 + ax + 1) \cdot e^x$.

(I) 若曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线的斜率为 2, 求 a 的值;

(II) 若函数 $f(x)$ 在 $x = -1$ 取得极大值, 求 a 的取值范围.

19. (本小题 14 分)

设 $A(1, -1)$, $B(a, 2)$ 为抛物线 $C: y^2 = 2px$ 上相异两点, 分别以 A, B 为切点作抛物线 C 的切线 l_1, l_2 , 设 l_1, l_2 相交于点 P .

(I) 求抛物线 C 的方程与点 P 的坐标;

(II) 若 $M(x_0, y_0) (-1 \leq y_0 \leq 2)$ 为抛物线 C 上的任意一点, 且 $\overrightarrow{PM} = \lambda \overrightarrow{PA} + \mu \overrightarrow{PB}$, 试判断 $\sqrt{\lambda} + \sqrt{\mu}$ 是否为定值? 若为定值, 求出该定值; 若不为定值, 请说明理由.

20. (本小题 13 分)

对于给定的非空集合 A , 定义集合 $A^+ = \{|x + y| \mid x \in A, y \in A\}$, $A^- = \{|x - y| \mid x \in A, y \in A\}$, 若 $A^+ \cap A^- = \emptyset$, 则称集合 A 满足性质 P .

(I) 判断下列集合是否满足性质 P , 并说明理由;

① $S = \{3, 4\}$, ② $T = \{0, 1, 7\}$;

(II) 集合 $A = \{1, 2, a\} \subseteq \mathbf{N}$, 满足性质 P , 求 a 的最小值;

(III) 若非空集合 $A \subseteq \{x \mid x \in \mathbf{N}, 0 \leq x \leq 100\}$, 且集合 A 满足性质 P , 求集合 A 中的元素个数的最大值.