2018 北京市十一学校高二（上）期末

数　　学（文）

2018.1

本试卷共 7 页，100 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第一部分　　（选择题　共 30 分）

一、选择题(共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分，在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项)

1.　函数 $y=x^2\sin x$ 导数为

（A） $y'=2x+\cos x$　　（B） $y'=x^2\cos x$

（C） $y'=2x\cos x$　　（D） $y'=2x\sin x+x^2\cos x$

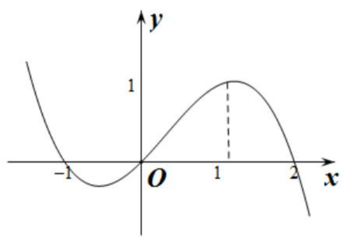
2.　函数 $y=\ln x$ 在 $x=2$ 处的切线的斜率等于

（A） $\frac{1}{2}$　　（B） $-\frac{1}{4}$　　（C） $\frac{1}{4}$　　（D） $-\frac{1}{2}$

3.　函数 $f(x)=x^3-x^2-x$ 的单调递增区间是

（A） $(-\infty,-\frac{1}{3})$　　（B） $(1,+\infty)$　　（C） $(-\infty,-\frac{1}{3}),(1,+\infty)$　　（D） $(-\frac{1}{3},1)$

4.　$f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 的图象如图所示, 那么



（A） -1 是函数 $f(x)$ 的极小值点

（B） 1 是函数 $f(x)$ 的极大值点

（C） 2 是函数 $f(x)$ 的极大值点

（D）函数 $f(x)$ 有两个极值点

5.　若动点 $P(x,y)$ 与两定点 $M(-a,0),N(a,0)$ 连线的斜率之积为常数 $k(ka\neq 0)$，则 P 点的轨迹一定不可能是

（A）除 M,N 两点外的圆　　（B）除 M,N 两点外的椭圆

（C）除 M,N 两点外的双曲线　　（D）除 M,N 两点外的抛物线

6. 已知椭圆 $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{m}=1$ 的焦点在 y 轴上，离心率为 $\frac{1}{2}$，则 m 的值为

（A）$\frac{3}{2}$　　（B）$\frac{8}{3}$　　（C）$\frac{2\sqrt{2}}{3}$　　（D）$\frac{3}{2}$ 或 $\frac{8}{3}$

7. 函数 $f(x)=ax^3+x+1$ 有极值的充要条件是

（A）$a<0$　　（B）$a>0$　　（C）$a<-1$　　（D）$a<1$

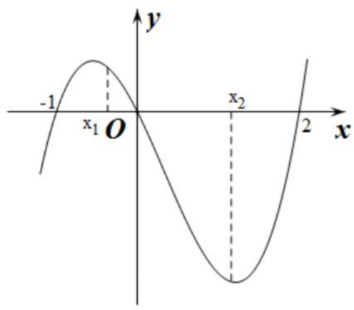
8. 椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的两焦点分别为 F_1,F_2，以 F_1F_2 为边作正三角形，若正三角形的第三个顶点恰好是椭圆短轴的一个端点，则椭圆的离心率为

（A）$\frac{1}{2}$　　（B）$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　（C）$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　（D）$\frac{\sqrt{3}}{3}$

9. 过双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{5-a^2}=1(a>0)$ 的右焦点 F 做一条直线，当直线斜率为 2 时，直线与双曲线左、右两支各有一个交点；当直线斜率为 3 时，直线与双曲线右支有两个不同交点，则双曲线离心率的取值范围是

（A）$(\sqrt{2},5)$　　（B）$(\sqrt{5},\sqrt{10})$　　（C）$(1,\sqrt{2})$　　（D）$(5,5\sqrt{2})$

10. 如图所示的曲线是函数 $f(x)=x^3+bx^2+cx+d$ 的大致图象，则 $x_1^2+x_2^2$ 等于



（A）$\frac{8}{9}$　　（B）$\frac{10}{9}$

（C）$\frac{16}{9}$　　（D）$\frac{5}{4}$

第二部分　　（非选择题　共 70 分）

二、填空题(共 6 小题，每小题 4 分，共 24 分)

11. 双曲线 $C:\frac{x^2}{4}-y^2=1$ 的离心率是______；渐近线方程是______.

12. 函数 $f(x)=x^3-3x^2+1$ 的极小值点是______.

13. 抛物线 $x^2=(2a-1)y$ 的准线方程是 $y=1$，则实数 $a=$ ______ .

14. 函数 $f(x)=x^2-2\ln x$ 的最小值为 ______ .

15. 已知函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{2}$ 对称，且当 $x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 时，$f(x)=x+\sin x$，则 $f(1),f(2),f(3)$ 的大小关系为 ______ .

16. 以下是关于圆锥曲线的四个命题：

①设 A,B 为两个定点，k 为非零常数，若 $|PA|-|PB|=k$，则动点 P 的轨迹是双曲线；

②方程 $2x^2-5x+2=0$ 的两根可分别作为椭圆和双曲线的离心率；

③双曲线 $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{9}=1$ 与椭圆 $\frac{x^2}{35}+y^2=1$ 有相同的焦点；

④以过抛物线的焦点的一条弦 AB 为直径作圆，则该圆与抛物线的准线相切.

其中真命题为 ______

三、解答题(共 4 小题，共 46 分。解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程)

17. （本小题满分 10 分）

在平面直角坐标系 xOy 中，直线 l 与抛物线 $y^2=4x$ 相交于不同的 A,B 两点.

（Ⅰ）如果直线 l 的方程为 $y=x-1$，求弦 AB 的长；

（Ⅱ）如果直线 l 过抛物线的焦点，求 $\overline{OA}\cdot\overline{OB}$ 的值.

18. （本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=x^3-2x^2+1$.

（Ⅰ）求函数 $f(x)$ 在 $[-1,2]$ 上的最大值和最小值；

（Ⅱ）曲线 $y=f(x)$ 上是否存在一点 P，使得在点 P 处的切线平行于直线 $2x+y+3=0$. 若存在，求出点 P 的坐标；若不存在，说明理由.

19. （本小题满分 12 分）

已知动点 M 到定点 $F_1(-2,0)$ 和 $F_2(2,0)$ 的距离之和为 $4\sqrt{2}$.

（Ⅰ）求动点 M 轨迹 C 的方程;

（Ⅱ）设 $N(0,2)$, 过点 $P(-1,-2)$ 作直线 l, 交椭圆 C 异于 N 的 A,B 两点, 直线 NA,NB 的斜率分别为 k_1,k_2, 证明: k_1+k_2 为定值.

20. （本小题满分 12 分）

设函数 $f(x)=x^2e^{x-1}+ax^3+bx^2$, 已知 $x=-2$ 和 $x=1$ 为 $f(x)$ 的极值点.

（Ⅰ）求 a 和 b 的值;

（Ⅱ）求 $f(x)$ 的单调区间;

（Ⅲ）设 $g(x)=\dfrac{2}{3}x^3-x^2$, 试比较 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的大小.

数学试题答案

一、选择题:本大题共 10 小题,每小题 3 分,共 30 分.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	D	A	C	C	D	B	A	A	B	C

二、填空题:本大题共 6 小题,每小题 4 分,共 24 分.

11. $\frac{\sqrt{5}}{2}$; $y=\pm\frac{1}{2}x$

12. 2

13. $-\frac{3}{2}$

14. 1

15. $f(2)>f(1)>f(3)$

16. ②④

三、解答题:

17. (本小题满分 10 分)

解:设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$.

(Ⅰ)联立 $\begin{cases} y^2=4x \\ y=x-1 \end{cases}$ 得: $x^2-6x+1=0$.

由韦达定理: $x_1+x_2=6$

易知直线 l 经过抛物线的焦点 $F(1,0)$, 由准线 $x=-1$ 得:

$|AB|=|OA|+|OB|=(x_1+1)+(x_2+1)=x_1+x_2+2=8$.

(Ⅱ)设直线 $l:x=my+1$(由于有两个交点,直线 l 的斜率必存在)

联立 $\begin{cases} y^2=4x \\ x=my+1 \end{cases}$ 得: $y^2-4my-4=0$

由韦达定理: $y_1+y_2=4m, y_1y_2=-4$.

所以 $x_1x_2=(my_1+1)(my_2+1)=m^2y_1y_2+m(y_1+y_2)+1=-4m^2+4m^2+1=1$

所以 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=(x_1,y_1)\cdot(x_2,y_2)=x_1x_2+y_1y_2=-4+1=-3$.

18. （本小题满分 12 分）

解:（Ⅰ） $f(x)=x^3-2x^2+1$，$f'(x)=3x^2-4x=x(3x-4)$.

所以令 $f'(x)=0$，则 $x=0$ 或 $x=\dfrac{4}{3}$.

在 $[-1,2]$ 上，令 $f'(x)>0$，则 $-1\le x<0$ 或 $\dfrac{4}{3}<x\le 2$；

令 $f'(x)<0$，则 $0<x<\dfrac{4}{3}$.

所以 $f(x)$ 在 $[-1,0)$ 上为增函数，在 $(0,\dfrac{4}{3})$ 上为减函数，在 $(\dfrac{4}{3},2]$ 上为增函数.

又因为 $f(-1)=-2, f(0)=1, f(\dfrac{4}{3})=-\dfrac{5}{27}, f(2)=1$，

所以 $f(x)$ 在 $[-1,2]$ 上的最大值为 $f(0)=f(2)=1$，最小值为 $f(-1)=-2$.

（Ⅱ）不存在.

若存在点 $P(x_0,y_0)$，则由导数的几何意义可知，$f'(x_0)=-2$.

又因为 $f'(x)=3x^2-4x=3(x-\dfrac{2}{3})^2-\dfrac{4}{3}\ge-\dfrac{4}{3}>-2$

所以不存在点 $P(x_0,y_0)$，使 $f'(x_0)=-2$.

19. （本小题满分 12 分）

解:（Ⅰ）由题意:动点 M 的轨迹为椭圆，且 $c=2, a=2\sqrt{2}$，

所以 $b^2=a^2-c^2=4$.

所以 $C:\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1$.

（Ⅱ）设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$.

若直线 l 不存在斜率, 则 $l:x=-1$.

把 $x=-1$ 代入椭圆方程可得 $y^2=\frac{7}{2}$, 即 $y_1=\frac{\sqrt{14}}{2},y_2=-\frac{\sqrt{14}}{2}$.

所以 $k_1+k_2=\frac{2-\frac{\sqrt{14}}{2}}{0+1}+\frac{2+\frac{\sqrt{14}}{2}}{0+1}=4$;

若直线 l 存在斜率, 设 $l:y=k(x+1)-2$

联立 $\begin{cases}\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1\\ y=k(x+1)-2\end{cases}$ 得: $(2k^2+1)x^2+4k(k-2)x+2k(k-4)=0$.

由韦达定理: $x_1+x_2=\frac{-4k(k-2)}{2k^2+1},x_1x_2=\frac{2k(k-4)}{2k^2+1}$

所以 $k_1+k_2=\frac{y_1-2}{x_1}+\frac{y_2-2}{x_2}=\frac{[k(x_1+1)-2]x_2+[k(x_2+1)-2]x_1}{x_1x_2}$

$=\frac{2kx_1x_2+(k-4)(x_1+x_2)}{x_1x_2}=2k+\frac{(k-4)(-4k)(k-2)}{2k(k-4)}$

$=2k-2k+4=4$

综上, k_1+k_2 为定值 4.

20. （本小题满分 12 分）

解:（Ⅰ） $f(x)=x^2e^{x-1}+ax^3+bx^2$,

则 $f'(x)=2xe^{x-1}+x^2e^{x-1}+3ax^2+2bx=x(x+2)e^{x-1}+3ax^2+2bx$

因为 $x=-2$ 和 $x=1$ 为 $f(x)$ 的极值点,

则 $\begin{cases}f'(-2)=12a-4b=0\\ f'(1)=3a+2b=0\end{cases}$, 解得 $\begin{cases}a=-\frac{1}{3}\\ b=-1\end{cases}$.

（Ⅱ）由（Ⅰ）可知, $f(x)=x^2e^{x-1}-\frac{1}{3}x^3-x^2$, $f'(x)=x(x+2)e^{x-1}-x^2-2x=x(x+2)(e^{x-1}-1)$

令 $f'(x)=0$ 得：$x_1=-2,x_2=0,x_3=1$.

则 $f(x)$ 的单调性可列表如下：

x	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	极小值	↗	极大值	↘	极小值	↗

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-2,0)$，$(1,+\infty)$；

$f(x)$ 的单调递减区间为 $(-\infty,-2)$，$(0,1)$.

（III）$f(x)-g(x)=x^2e^{x-1}-x^3=x^2(e^{x-1}-x)$.

因为 $x^2\geq 0$，

所以设 $h(x)=e^{x-1}-x$，则 $h'(x)=e^{x-1}-1$.

令 $h'(x)=0$ 得 $x=1$；

令 $h'(x)>0$，则 $x>1$；

令 $h'(x)<0$，则 $x<1$.

所以 $h(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增.

所以 $h(x)\geq h(1)=0$.

所以 $f(x)-g(x)=x^2(e^{x-1}-x)\geq 0$，即 $f(x)\geq g(x)$.

用的升学讲座活动等全方位服务的升学服务平台。自 2014 年成立以来一直致力于服务北京考生，助力千万学子，圆梦高考。

目前，北京高考在线拥有旗下拥有北京高考在线网站和北京高考资讯微信公众号两大媒体矩阵，关注用户超 10 万+。

北京高考在线_2018 年北京高考门户网站

http://www.gaokzx.com/

北京高考资讯微信：bj-gaokao