# 2020 北京四中高三（上）期中

## 数　　学

（试卷满分为 150 分，考试时间为 120 分钟）

一、选择题（本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分）

1.已知全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $A=\left\{x\middle|2^x<1\right\}$，$B=\left\{x\middle|x-2<0\right\}$，则 $(\complement_U A)\cap B=$

A．$\{x\,|\,x>2\}$　　　　B．$\left\{x\middle|0\le x<2\right\}$

C．$\{x\,|\,0<x\le 2\}$　　　　D．$\{x\,|\,x\le 2\}$

2.下列命题中的假命题是

A. $\exists x\in\mathbf{R},\ \sin x=\sqrt{2}$　　　　B. $\exists x\in\mathbf{R},\ \ln x=\sqrt{2}$

C. $\forall x\in\mathbf{R},\ x^2\ge 0$　　　　D. $\forall x\in\mathbf{R},\ 2^x>0$

3.已知向量 $\boldsymbol{a}=(5,m)$，$\boldsymbol{b}=(2,-2)$，若 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线，则实数 $m=$

A. $-1$　　　　B. 1　　　　C. 2　　　　D. $-5$

4.已知 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，当 $x>0$ 时，$f(x)=\log_{\frac{1}{2}}x$，则 $f(x)>0$ 的解集是

A．$(-1,0)$　　　　B．$(0,1)$　　　　C．$(-\infty,-1)\cup(0,1)$　　　　D．$(-1,0)\cup(0,1)$

5.将函数 $f(x)=\sin(2x-\frac{\pi}{6})$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度，得到函数 $g(x)$ 的图象，则 $g(x)=$

A．$\sin(2x+\frac{\pi}{6})$　　　　B．$\sin(2x+\frac{2\pi}{3})$

C．$\cos 2x$　　　　D．$-\cos 2x$

6.若 $a,b\in\mathbf{R}$，且 $ab>0$，则下列不等式中，恒成立的是

A．$a^2+b^2>2ab$　　　　B．$a+b\ge 2\sqrt{ab}$　　　　C．$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}>\frac{2}{\sqrt{ab}}$　　　　D．$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\ge 2$

7.已知三角形 $ABC$，那么“$\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|>\left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right|$”是“三角形 $ABC$ 为锐角三角形”的

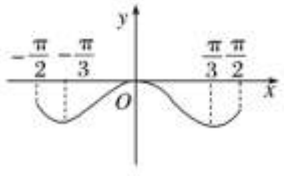
A．充分而不必要条件　　　　B．必要而不充分条件

C．充分必要条件　　　　D．既不充分也不必要条件

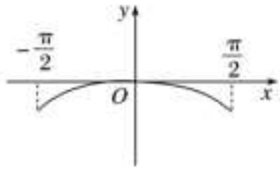
8.声音的等级 $f(x)$（单位：$dB$）与声音强度 $x$（单位：$W/m^2$）满足 $f(x)=10\times\lg\frac{x}{1\times 10^{-12}}$．喷气式飞机起飞时，声音的等级约为 $140dB$；一般说话时，声音的等级约为 $60dB$，那么喷气式飞机起飞时声音强度约为一般说话时声音强度的

A．$10^5$ 倍　　　　B．$10^8$ 倍　　　　C. $10^{10}$ 倍　　　　D．$10^{12}$ 倍

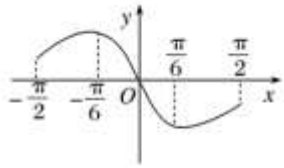
9.函数 $y=x-2\sin x$，$x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 的大致图象是



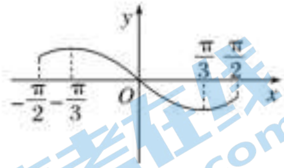
A.



B.



C.



D.

10.已知函数 $f(x)=\begin{cases} ax+1, & x\le 0, \\ |\ln x|, & x>0. \end{cases}$ 给出下列三个结论：

① 当 $a=-2$ 时，函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(-\infty,1)$；

② 若函数 $f(x)$ 无最小值，则 $a$ 的取值范围为 $(0,+\infty)$；

③ 若 $a<1$ 且 $a\ne 0$，则 $\exists b\in \mathbf{R}$，使得函数 $y=f(x)-b$ 恰有 3 个零点 $x_1,x_2,x_3$，且 $x_1x_2x_3=-1$.

其中，所有正确结论的个数是

A．0　　B．1　　C．2　　D．3

## 二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）

11.函数 $y=\sqrt{x-2}$ 的定义域是________.

12.已知 $\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$，且 $\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$. 则 $\cos\alpha=$________，$\tan\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)=$________.

13.已知非零向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$，则 $\boldsymbol{a}-\dfrac{1}{2}\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角等于________.

14.圆 $x^2+y^2-ax+2=0$ 与直线 $l$ 相切于点 $A(3,1)$，则圆的半径为________，直线 $l$ 的方程为________.

15.关于 $x$ 的方程 $g(x)=t(t\in\mathbf{R})$ 的实根个数记为 $f(t)$. 若 $g(x)=\ln x$，则 $f(t)=$________；

若 $g(x)=\begin{cases} x, x\le 0, \\ -x^2+2ax+a, x>0, \end{cases}$ $(a\in\mathbf{R})$，存在 $t$ 使得 $f(t+2)>f(t)$ 成立，则 $a$ 的取值范围是________.

## 三、解答题（本大题共 6 小题，共 85 分）

16. （本小题满分 14 分）

在 $\triangle ABC$ 中，$a=3$，$b-c=2$，$\cos B=-\dfrac{1}{2}$.

（I）求 $b,c$ 的值；

（II）求 $\sin(B-C)$ 的值.

17. （本小题满分 14 分）

已知函数 $f(x)=x^3-x, g(x)=2x-3$.

（I）求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程；

（II）求函数 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上的最大值；

（III）求证：存在唯一的 $x_0$，使得 $f(x_0)=g(x_0)$.

18. （本小题满分 14 分）

已知函数 $f(x)=2\cos^2\omega_1 x+\sin\omega_2 x$.

（I）求 $f(0)$ 的值；

（II）从① $\omega_1=1$，$\omega_2=2$；② $\omega_1=1$，$\omega_2=1$ 这两个条件中任选一个，作为题目的已知条件，求函数 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{6}\right]$ 上的最小值，并直接写出函数 $f(x)$ 的一个周期.

19. （本小题满分 14 分）

已知：函数 $f(x)=\sin x-x\cos x$.

（I）求 $f'(\pi)$；

（II）求证：当 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ 时，$f(x)<\frac{1}{3}x^3$；

（III）若 $f(x)>kx-x\cos x$ 对 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ 恒成立，求实数 $k$ 的最大值.

20. （本小题满分 14 分）

已知 $O$ 为平面直角坐标系的原点，过点 $M(-2,0)$ 的直线 $l$ 与圆 $x^2+y^2=1$ 交于 $P$，$Q$ 两点.

（I）若 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=-\frac{1}{2}$，求直线 $l$ 的方程；

（II）若 $\Delta OMP$ 与 $\Delta OPQ$ 的面积相等，求直线 $l$ 的斜率.

21．（本小题满分 15 分）

对于集合 $M$ ，定义函数 $f_M(x)=\begin{cases}-1, x\in M,\\ 1, x\notin M.\end{cases}$ 对于两个集合 $M$ ， $N$ ，定义集合 $M\Delta N=\{x\,|\,f_M(x)\cdot f_N(x)=-1\}$. 已知 $A=\{2,4,6,8,10\}$， $B=\{1,2,4,8,16\}$.

（I）写出 $f_A(1)$ 和 $f_B(1)$ 的值，并用列举法写出集合 $A\Delta B$ ；

（II）用 $Card(M)$ 表示有限集合 $M$ 所含元素的个数，求 $Card(X\Delta A)+Card(X\Delta B)$ 的最小值；

（III）有多少个集合对 $(P,Q)$，满足 $P,Q\subseteq A\cup B$，且 $(P\Delta A)\Delta(Q\Delta B)=A\Delta B$ ？

# 2020 北京四中高三（上）期中数学

## 参考答案

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分，请将答案填涂在答题卡上

| 题号 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 答案 | B | A | D | C | C | D | B | B | D | C |

二、填空题：本大题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分

| 题号 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|
| 答案 | $[2,+\infty)$ | $-\frac{4}{5},-7$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\sqrt{2},x+y-4=0$ | 1，$(1,+\infty)$ |

三、解答题（本大题共 6 小题，共 85 分）

16.解：（I）$\because a=3,b-c=2,\cos B=-\frac{1}{2}$，$\therefore$ 由余弦定理 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，

$\therefore b=7$，$\therefore c=b-2=5$；

（II）在 $\triangle ABC$ 中，$\because \cos B=-\frac{1}{2}$，$\therefore \sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}$，由正弦定理有：$\frac{c}{\sin C}=\frac{b}{\sin B}$，$\therefore \sin C=\frac{5\sqrt{3}}{14}$，

$\because b>c$，$\therefore B>C$，$\therefore C$ 为锐角，$\therefore \cos C=\frac{11}{14}$，

$\therefore \sin(B-C)=\sin B\cos C-\cos B\sin C=\frac{4\sqrt{3}}{7}$.

17.解：（I）由 $f(x)=x^3-x$，得 $f'(x)=3x^2-1$，

所以 $f'(1)=2$，又 $f(1)=0$

所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为：$y-0=2(x-1)$，

即：$2x-y-2=0$.

（II）令 $f'(x)=0$，得 $x=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$.

$f(x)$ 与 $f'(x)$ 在区间 $[0,2]$ 的情况如下：

| $x$ | $(0,\frac{\sqrt{3}}{3})$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $(\frac{\sqrt{3}}{3},2)$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | - | 0 | + |
| $f(x)$ | $\searrow$ | 极小值 | $\nearrow$ |

因为 $f(0)=0,\ f(2)=6,$

所以函数 $f(x)$ 在区间 $[0,2]$ 上的最大值为 6.

（III）证明：设 $h(x)=f(x)-g(x)=x^3-3x+3$，

则 $h'(x)=3x^2-3=3(x-1)(x+1)$，

令 $h'(x)=0$，得 $x=\pm1$.

$h(x)$ 与 $h'(x)$ 随 $x$ 的变化情况如下：

| $x$ | $(-\infty,-1)$ | $-1$ | $(-1,1)$ | $1$ | $(1,+\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $h'(x)$ | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ |
| $h(x)$ | ↗ | 极大值 | ↘ | 极小值 | ↗ |

则 $h(x)$ 的增区间为 $(-\infty,-1)$，$(1,+\infty)$，减区间为 $(-1,1)$.

又 $h(1)=1>0$，$h(-1)>h(1)>0$，所以函数 $h(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 没有零点，

又 $h(-3)=-15<0$，

所以函数 $h(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 上有唯一零点 $x_0$.

综上，在 $(-\infty,+\infty)$ 上存在唯一的 $x_0$，使得 $f(x_0)=g(x_0)$.

18.解：（I）$f(0)=2\cos^2 0+\sin 0=2$.

（II）选择条件①. $f(x)$ 的一个周期为 $\pi$.

$f(x)=2\cos^2 x+\sin 2x=(\cos 2x+1)+\sin 2x=\sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2x)+1=\sqrt{2}\sin(2x+\frac{\pi}{4})+1$.

因为 $x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{6}]$,所以 $2x+\frac{\pi}{4}\in[-\frac{3\pi}{4},\frac{7\pi}{12}]$.所以 $-1\le\sin(2x+\frac{\pi}{4})\le1$.所以 $1-\sqrt{2}\le f(x)\le 1+\sqrt{2}$.

当 $2x+\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{2}$ 时，即 $x=-\frac{3\pi}{8}$ 时，$f(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{6}]$ 取得最小值 $1-\sqrt{2}$.

选择条件②. $f(x)$ 的一个周期为 $2\pi$.

$f(x)=2\cos^2 x+\sin x=2(1-\sin^2 x)+\sin x=-2(\sin x-\frac{1}{4})^2+\frac{17}{8}$.

因为 $x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{6}]$,所以 $\sin x\in[-1,\frac{1}{2}]$.

所以当 $\sin x=-1$ 时，即 $x=-\frac{\pi}{2}$ 时，$f(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{6}]$ 取得最小值 $-1$.

19.解：$f'(x)=\cos x-(\cos x-x\sin x)=x\sin x$

（I）$f'(\pi)=0$

（II）令 $g(x)=f(x)-\frac{1}{3}x^3$，则 $g'(x)=x\sin x-x^2=x(\sin x-x)$，

当 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ 时，设 $t(x)=\sin x-x$，则 $t'(x)=\cos x-1<0$

所以 $t(x)$ 在 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ 单调递减，$t(x)=\sin x-x<t(0)=0$

即 $\sin x < x$，所以 $g'(x) < 0$

所以 $g(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上单调递减，所以 $g(x) < g(0) = 0$，

所以 $f(x) < \frac{1}{3}x^3$．

（III）原题等价于 $\sin x > kx$ 对 $x \in (0,\frac{\pi}{2})$ 恒成立，

即 $k < \frac{\sin x}{x}$ 对 $x \in (0,\frac{\pi}{2})$ 恒成立，

令 $h(x) = \frac{\sin x}{x}$，则 $h'(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2} = -\frac{f(x)}{x^2}$．

易知 $f'(x) = x\sin x > 0$，即 $f(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 单调递增，

所以 $f(x) > f(0) = 0$，所以 $h'(x) < 0$，

故 $h(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 单调递减，所以 $k \le h(\frac{\pi}{2}) = \frac{2}{\pi}$．

综上所述，$k$ 的最大值为 $\frac{2}{\pi}$．

20.解：（I）依题意，直线 $l$ 的斜率存在，

因为直线 $l$ 过点 $M(-2,0)$，可设直线 $l$：$y = k(x+2)$．

因为 $P$、$Q$ 两点在圆 $x^2 + y^2 = 1$ 上，所以 $|\overrightarrow{OP}| = |\overrightarrow{OQ}| = 1$，

因为 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = -\frac{1}{2}$，所以 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = |\overrightarrow{OP}| \cdot |\overrightarrow{OQ}| \cdot \cos\angle POQ = -\frac{1}{2}$

所以 $\angle POQ = 120^\circ$ 所以 $O$ 到直线 $l$ 的距离等于 $\frac{1}{2}$．

所以 $\frac{|2k|}{\sqrt{k^2+1}} = \frac{1}{2}$，

得 $k = \pm\frac{\sqrt{15}}{15}$，

所以直线 $l$ 的方程为 $x - \sqrt{15}y + 2 = 0$ 或 $x + \sqrt{15}y + 2 = 0$．

（II）（解法一）因为 $\Delta OMP$ 与 $\Delta OPQ$ 的面积相等，所以 $\overrightarrow{MQ} = 2\overrightarrow{MP}$，

设 $P(x_1, y_1)$，$Q(x_2, y_2)$，所以 $\overrightarrow{MQ} = (x_2+2, y_2)$，$\overrightarrow{MP} = (x_1+2, y_1)$．

所以 $\begin{cases} x_2 + 2 = 2(x_1+2) \\ y_2 = 2y_1 \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x_2 = 2(x_1+1) \\ y_2 = 2y_1 \end{cases}$ （*）；

因为 $P$，$Q$ 两点在圆上，

所以$\begin{cases}x_1^2+y_1^2=1\\x_2^2+y_2^2=1\end{cases}$把（*）代入，得$\begin{cases}x_1^2+y_1^2=1\\4(x_1+1)^2+4y_1^2=1\end{cases}$，

所以$\begin{cases}x_1=-\dfrac{7}{8},\\y_1=\pm\dfrac{\sqrt{15}}{8}.\end{cases}$

所以直线$l$的斜率$k=k_{MP}=\pm\dfrac{\sqrt{15}}{9}$，即$k=\pm\dfrac{\sqrt{15}}{9}$.

（解法二）因为$\Delta OMP$与$\Delta OPQ$的面积相等，所以$\overrightarrow{MQ}=2\overrightarrow{MP}$，

设$P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，所以$\overrightarrow{MQ}=(x_2+2,y_2)$，$\overrightarrow{MP}=(x_1+2,y_1)$.

所以$x_2+2=2(x_1+2)$，即$2x_1-x_2=-2$ ①；

联立$\begin{cases}y=k(x+2)\\x^2+y^2=1\end{cases}$消去 y 得$(k^2+1)x^2+4k^2x+(4k^2-1)=0$.

由韦达定理知$x_1+x_2=-\dfrac{4k^2}{k^2+1}$， ② $x_1\cdot x_2=\dfrac{4k^2-1}{k^2+1}$ ③

由①②可知，$x_1=-\dfrac{6k^2+2}{3(k^2+1)}$，$x_2=-\dfrac{6k^2-2}{3(k^2+1)}$，

带入③得$\dfrac{36k^4-4}{9(k^2+1)^2}=\dfrac{4k^2-1}{k^2+1}$，所以$k=\pm\dfrac{\sqrt{15}}{9}$.

21.解：（I）$f_A(1)=1$，$f_B(1)=-1$，$A\Delta B=\{1,6,10,16\}$.

（II）根据题意可知：对于集合$C,X$，①若$a\in C$且$a\notin X$，则$Card(C\Delta(X\cup\{a\}))=Card(C\Delta X)-1$；②若$a\notin C$且$a\notin X$，则$Card(C\Delta(X\cup\{a\}))=Card(C\Delta X)+1$.

所以要使$Card(X\Delta A)+Card(X\Delta B)$的值最小，2，4，8 一定属于集合$X$；1，6，10，16 是否属于$X$不影响$Card(X\Delta A)+Card(X\Delta B)$的值；集合$X$不能含有$A\cup B$之外的元素.

所以当$X$为{1,6,10,16}的子集与{2,4,8}的并集时，$Card(X\Delta A)+Card(X\Delta B)$取到最小值 4.…8 分

（III）因为$A\Delta B=\{x\,|\,f_A(x)\cdot f_B(x)=-1\}$，

所以$A\Delta B=B\Delta A$.

由定义可知：$f_{A\Delta B}(x)=f_A(x)\cdot f_B(x)$.

所以对任意元素$x$，$f_{(A\Delta B)\Delta C}(x)=f_{A\Delta B}(x)\cdot f_C(x)=f_A(x)\cdot f_B(x)\cdot f_C(x)$，

$f_{A\Delta(B\Delta C)}(x)=f_A(x)\cdot f_{B\Delta C}(x)=f_A(x)\cdot f_B(x)\cdot f_C(x)$.

所以$f_{(A\Delta B)\Delta C}(x)=f_{A\Delta(B\Delta C)}(x)$.

所以$(A\Delta B)\Delta C=A\Delta(B\Delta C)$.

由$(P\Delta A)\Delta(Q\Delta B)=A\Delta B$知：$(P\Delta Q)\Delta(A\Delta B)=A\Delta B$.

所以 $(P\Delta Q)\Delta(A\Delta B)\Delta(A\Delta B)=(A\Delta B)\Delta(A\Delta B)$.

所以 $P\Delta Q\Delta\varnothing=\varnothing$.

所以 $P\Delta Q=\varnothing$，即 $P=Q$.

因为 $P,Q\subseteq A\cup B$，

所以满足题意的集合对（$P$，$Q$）的个数为 $2^7=128$.

# 关于我们

**北京高考在线**创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “精益求精、专业严谨” 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。