2023 北京二中高二（下）期末

数　　学

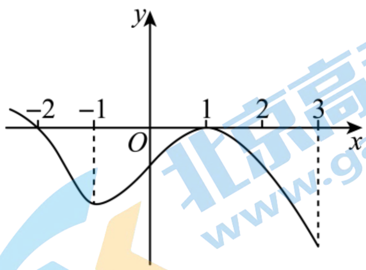
一、选择题（共 10 小题，每小题 5 分，共 5 分．选出符合题目要求的一项）

1. 集合 $A=\{x\in R|x\le 2\}$，$B=\{x\in R|x^2-3x\le 0\}$，则 $(\complement_R A)\cap B=$（　　）

A. $\{x|0\le x\le 2\}$　　　　B. $\{x|2<x\le 3\}$

C. $\{x|2\le x\le 3\}$　　　　D. $\{x|x>0\}$

2. 已知函数 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 的图象如图所示，则下列结论中正确的是（　　）



A. $f(x)$ 在区间 $(-2,3)$ 上有 2 个极值点

B. $f(x)$ 在 $x=-1$ 处取得极小值

C. $f(x)$ 在区间 $(-2,3)$ 上单调递减

D. $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极大值

3. 已知函数 $f(x)=x^2+bx+c$，b、$c\in\mathbf{R}$，则"$c<0$"是"函数 $f(x)$ 有零点"的（　　）

A. 充分而不必要条件　　　　B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件　　　　D. 既不充分也不必要条件

4. 一个盒子里有 3 个分别标有号码为 1，2，3 的小球，每次取出一个，记下它的标号后再放回盒子中，共取 3 次，则取得小球标号最大值是 3 的取法有（　　）

A. 12 种　　B. 15 种　　C. 17 种　　D. 19 种

5. 二项式 $\left(x^2-\frac{1}{2x}\right)^5$ 展开式中含 x 项的系数是（　　）

A. $\frac{5}{2}$　　　　B. $-\frac{5}{2}$

C. $-\frac{5}{4}$　　　　D. $\frac{5}{4}$

6. 从甲、乙等 5 名志愿者中选出 4 名，分别从事 A，B，C，D 四项不同的工作，每人承担一项．甲不从事 A 工作的概率为（　　）

A. $\frac{7}{10}$

B. $\frac{4}{5}$

C. $\frac{3}{5}$

D. $\frac{1}{5}$

7. 已知数列$\{a_n\}$中，$a_1=2$，$a_{n+1}-2a_n=0$，$b_n=\log_2 a_n$，那么数列$\{b_n\}$的前10项和等于（　）

A. 130　　B. 120　　C. 55　　D. 50

8. 已知函数$f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$，$x\in\mathbf{R}$，若对任意$\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$，都有$f(m\sin\theta)+f(1-m)>0$成立，则实数$m$的取值范围是（　　）

A. $(0,1)$

B. $(0,2)$

C. $(-\infty,1)$

D. $(-\infty,1]$

9. 在函数$f(x)=ax-2$的图像上存在两个不同点A, B，使得A, B关于直线$y=x$的对称点A', B'在函数$g(x)=e^x$的图像上，则实数a的取值范围是（　）

A. $(-\infty,e)$

B. $(0,\frac{e}{2})$

C. $(0,e)$

D. $(0,e^2)$

10. 某电力公司在工程招标中是根据技术、商务、报价三项评分标准进行综合评分的，按照综合得分的高低进行综合排序，综合排序高者中标.

分值权重表如下：

总分	技术	商务	报价
100%	50%	10%	40%

技术标、商务标基本都是由公司的技术、资质、资信等实力来决定的．报价表则相对灵活，报价标的评分方法是：基准价的基准分是 68 分，若报价每高于基准价 1%，则在基准分的基础上扣 0.8 分，最低得分 48 分；若报价每低于基准价 1%，则在基准分的基础上加 0.8 分，最高得分为 80 分．若报价低于基准价 15% 以上（不含 15%）每再低 1%，在 80 分在基础上扣 0.8 分.

在某次招标中，若基准价为 1000（万元）．甲、乙两公司综合得分如下表：

公司	技术	商务	报价
甲	80 分	90 分	A 甲分
乙	70 分	100 分	A 乙分

甲公司报价为 1100（万元），乙公司的报价为 800（万元）则甲，乙公司的综合得分，分别是（　　）

A. 73，75.4　　B. 73，80　　C. 74.6，76　　D. 74.6，75.4

二、填空题（共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）

11. 命题“$\forall x\in\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$，$\sin x>\cos x$”的否定形式是________.

12. 已知$(1+2x)^n$的展开式的二项式系数之和为32，则n=________；各项系数之和为________.（用数字作答）

13. 已知函数$f(x)=ax^2-x+\ln x$有两个不同的极值点x_1，x_2，则实数a的取值范围为________.

14. 已知非空集合A，B满足以下四个条件：

①$A\cup B=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$；

②$A\cap B=\varnothing$；

③A 中的元素个数不是A 中的元素；

④B中的元素个数不是B中的元素.

（ i ）如果集合A 中只有1个元素，那么集合A 的元素是________；

（ ii ）有序集合对(A,B)的个数是________.

15. 阿基米德螺线广泛存在于自然界中，具有重要作用．如图，在平面直角坐标系xOy中，螺线与坐标轴依次交于点$A_1(-1,0)$，$A_2(0,-2)$，$A_3(3,0)$，$A_4(0,4)$，$A_5(-5,0)$，$A_6(0,-6)$，$A_7(7,0)$，$A_8(0,8)$，并按这样的规律继续下去．给出下列四个结论：

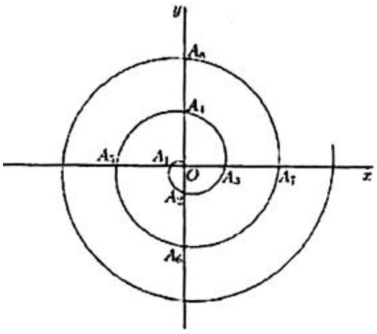
①对于任意正整数n，$|A_nA_{n+4}|=4$；

②存在正整数n，$|A_nA_{n+1}|$为整数；

③存在正整数n，三角形$A_nA_{n+1}A_{n+2}$的面积为2023；

④对于任意正整数n，三角形$A_nA_{n+1}A_{n+2}$为锐角三角形.

其中所有正确结论的序号是________.



三、解答题（共6小题，共75分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程）

16. 数列$\{a_n\}$中$a_1=1$，$a_{n+1}=a_n+1$.等比数列$\{b_n\}$的前n项和为T_n.若$b_1=a_1+1$，$b_2-a_2=2$.

（1）求数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的通项公式；

（2）求满足$T_n+a_n>300$的最小的n值.

17. 已知表1和表2是某年部分日期的天安门广场升旗时刻表.

表 1：某年部分日期的天安门广场升旗时刻表

日期	升旗时刻	日期	升旗时刻	日期	升旗时刻	日期	升旗时刻
1 月 1 日	7：36	4 月 9 日	5：46	7 月 9 日	4：53	10 月 8 日	6：17
1 月 12 日	7：31	4 月 28 日	5：19	7 月 27 日	5：07	10 月 26 日	6：36
2 月 10 日	7：14	5 月 16 日	4：59	8 月 14 日	5：24	11 月 13 日	6：56
3 月 2 日	6：47	6 月 3 日	4：47	9 月 2 日	5：42	12 月 1 日	7：16
3 月 22 日	6：15	6 月 22 日	4：46	9 月 20 日	5：59	12 月 20 日	7：31

表 2：某年 2 月部分日期的天安门广场升旗时刻表

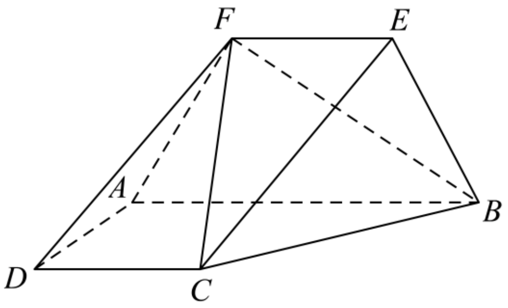
日期	升旗时刻	日期	升旗时刻	日期	升旗时刻
2 月 1 日	7：23	2 月 11 日	7：13	2 月 21 日	6：59
2 月 3 日	7：22	2 月 13 日	7：11	2 月 23 日	6：57
2 月 5 日	7：20	2 月 15 日	7：08	2 月 25 日	6：55
2 月 7 日	7：17	2 月 17 日	7：05	2 月 27 日	6：52
2 月 9 日	7：15	2 月 19 日	7：02	2 月 29 日	6：49

（1）从表 1 的日期中随机选出一天，试估计这一天的升旗时刻早于 7：00 的概率；

（2）甲，乙二人各自从表 2 的日期中随机选择一天观看升旗，且两人的选择相互独立．记 X 为这两人中观看升旗的时刻早于 7：00 的人数，求 X 的分布列和数学期望 $E\left(X\right)$；

（3）将表 1 和表 2 中的升旗时刻化为分数后作为样本数据（如 7：31 化为 $7\frac{31}{60}$）．记表 2 中所有升旗时刻对应数据的方差为 s^2，表 1 和表 2 中所有升旗时刻对应数据的方差为 s_*^2，判断 s^2 与 s_*^2 的大小．（只需写出结论）

18. 如图，梯形 $ABCD$ 所在的平面与等腰梯形 $ABEF$ 所在的平面互相垂直，$AB \parallel CD \parallel EF$，$AB \perp AD$，$|CD| = |DA| = |AF| = |FE| = 2$，$|\mathrm{AB}| = 4$．



（1）求证：DF // 平面 BCE；

（2）求二面角 $C-BF-A$ 的余弦值；

（3）线段 CE 上是否存在点 G，使得 $AG\perp$ 平面 BCF？请说明理由.

19. 已知椭圆 E：$\dfrac{x^2}{a^2}+y^2=1\left(a>1\right)$ 的左右顶点分别为 A_1、A_2，点 M 在 E 上（异于左右顶点），且 $\triangle A_1A_2M$ 面积的最大值为 2．过点 M 和点 $N\left(4,0\right)$ 的直线 l 与 E 交于另外一点 B，且 B 关于 x 轴的对称点为 C.

（1）求椭圆 E 的标准方程；

（2）试判断直线 MC 是否过定点？若过定点，求出定点坐标；若不过定点，请说明理由；

（3）线段 MC 的长度 $|MC|$ 能否为下列值：$\dfrac{10}{3}$、$\dfrac{13}{3}$？（直接写出结论即可）

20. 函数 $f\left(x\right)=\dfrac{1}{2}x^2-a\ln x+b\left(a\in\mathrm{R}\right)$.

（1）若曲线 $y=f\left(x\right)$ 在 $x=1$ 处的切线的方程为 $3x-y-3=0$，求实数 a、b 的值；

（2）讨论函数 $f\left(x\right)$ 的单调性；

（3）若 $a=-2$，对任意 $x_1,x_2\in\left(0,2\right]$，不等式 $\left|f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)\right|\le m\left|\dfrac{1}{x_1}-\dfrac{1}{x_2}\right|$ 恒成立，求 m 的最小值.

21. 已知集合 $M=\{1,2,3,\cdots,n\}\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$，若集合 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}\subseteq M\left(m\in\mathbf{N}^*\right)$，且对任意的 $b\in M$，存在 a_i，$a_j\in A\left(1\le i\le j\le m\right)$，使得 $b=\lambda_1a_i+\lambda_2a_j$（其中 $\lambda_1,\lambda_2\in\{-1,0,1\}$），则称集合 A 为集合 M 的一个 m 元基底.

（1）分别判断下列集合 A 是否为集合 M 的一个二元基底，并说明理由；

① $A=\{1,5\}$，$M=\{1,2,3,4,5\}$；

② $A=\{2,3\}$，$M=\{1,2,3,4,5,6\}$.

（2）若集合 A 是集合 M 的一个 m 元基底，证明：$m\left(m+1\right)\ge n$；

（3）若集合 A 为集合 $M=\{1,2,3,\cdots,19\}$ 的一个 m 元基底，求出 m 的最小可能值，并写出当 m 取最小值时 M 的一个基底 A .

参考答案

一、选择题（共 10 小题，每小题 5 分，共 5 分．选出符合题目要求的一项）

1.【答案】B

【分析】根据集合补集和一元二次不等式解法化简集合，再根据交集运算法则求解答案.

【详解】因为 $A=\{x\in\mathrm{R}|x\le 2\}$，

所以 $\complement_{\mathrm{R}}A=\{x\in\mathrm{R}|x>2\}$，

因为 $B=\{x\in\mathrm{R}|x^2-3x\le 0\}$，

所以 $B=\{x\in\mathrm{R}|x(x-3)\le 0\}=\{x\in\mathrm{R}|0\le x\le 3\}$，

所以 $(\complement_{\mathrm{R}}A)\cap B=\{x|2<x\le 3\}$.

故选：B

2.【答案】C

【分析】由导函数图象可得 $f'(x)$ 的取值情况，即可判断.

【详解】根据 $f'(x)$ 的图象可得，在 $(-2,3)$ 上，$f'(x)\le 0$，且仅有 $f'(1)=0$，

$\therefore$ $f(x)$ 在 $(-2,3)$ 上单调递减，

$\therefore$ $f(x)$ 在区间 $(-2,3)$ 上没有极值点，故 A、B、D 错误，C 正确；

故选：C.

3.【答案】A

【分析】

利用 $\Delta>0$ 推出充分条件成立，取特殊值推出必要条件不成立，从而得出结论.

【详解】若 $c<0$，则 $\Delta=b^2-4c>0$，此时，函数 $f(x)$ 有零点，则“$c<0$”$\Rightarrow$“函数 $f(x)$ 有零点”；

取 $b=2$，$c=1$，则 $f(x)=x^2+2x+1=(x+1)^2$，此时，函数 $f(x)$ 有零点，但 $c>0$.

则“函数 $f(x)$ 有零点”$\not\Rightarrow$“$c<0$”.

因此，“$c<0$”是“函数 $f(x)$ 有零点”的充分而不必要条件.

故选：A.

【点睛】本题考查充分不必要条件的判断，同时也考查了二次函数的零点，考查推理能力，属于中等题.

4.【答案】D

【详解】试题分析：分三类：第一类，有一次取到 3 号球，共有 $C_3^1\times 2\times 2=12$ 取法；第二类，有两次取到 3 号球，共有 $C_3^2\times 2=6$ 取法；第三类，三次都取到 3 号球，共有 1 种取法；共有 19 种取法.

考点：排列组合，分类分步记数原理.

5.【答案】C

【分析】根据二项式定理写出通项公式进而求解.

【详解】二项式$\left(x^{2}-\dfrac{1}{2x}\right)^{5}$的通项公式$T_{r+1}=C_{5}^{r}\left(x^{2}\right)^{5-r}\left(-\dfrac{1}{2x}\right)^{r}=\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{r}C_{5}^{r}x^{10-3r}$,

令$r=3$，则$T_{4}=\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{3}C_{5}^{3}x=-\dfrac{1}{8}\times 10x=-\dfrac{5}{4}x$.

则二项式$\left(x^{2}-\dfrac{1}{2x}\right)^{5}$展开式中含$x$项的系数是$-\dfrac{5}{4}$.

故选：C

6.【答案】B

【分析】通过排列组合相关知识，得到所有方案数，再得到甲不能从事A工作的可能情况，结合古典概型概率求解方法得到答案.

【详解】甲、乙等5名志愿者中选出4名，分别从事A，B，C，D四项不同的工作，每人承担一项，总共有$A_{5}^{4}=120$种方案；

若甲不能从事A工作，

①甲不从事任何工作，有$A_{4}^{4}=24$种方案，

②甲从事工作，但不从事A工作，有$C_{4}^{3}C_{3}^{1}A_{3}^{3}=4\times 3\times 6=72$种方案；

所以甲不从事A工作的概率为$\dfrac{72+24}{120}=\dfrac{4}{5}$.

故选：B

7.【答案】C

【分析】求出数列$\{b_n\}$的通项，再利用等差数列前n项和公式计算作答.

【详解】依题意，数列$\{a_n\}$是以2为首项，2为公比的等比数列，即$a_n=2^n$，则$b_n=\log_2 2^n=n$,

数列$\{b_n\}$为等差数列，所以$\{b_n\}$的前10项和为$S_{10}=\dfrac{10(1+10)}{2}=55$.

故选：C

8.【答案】D

【分析】根据条件判断函数的奇偶性和单调性，利用函数的奇偶性和单调性将不等式进行转化，利用参数分离法进行分解，即可得出m的取值范围.

【详解】$f(x)$的定义域为实数集，$f(-x)=\dfrac{e^{-x}-e^{x}}{2}=-\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2}-f(x)$，所以$f(x)$是奇函数，

$f'(x)=e^{x}+e^{-x}>0$，$\therefore f(x)$在R上单调递增；

由$f(m\sin\theta)+f(1-m)>0$得，$f(m\sin\theta)>f(m-1)$,

则 $m\sin\theta > m-1$，即 $(1-\sin\theta)m<1$，

当 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 时，$\sin\theta=1$，此时不等式等价为 $0<1$ 成立，

当 $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$0<\sin\theta<1$，所以 $m<\frac{1}{1-\sin\theta}$，

因为 $0<\sin\theta<1$，$-1<-\sin\theta<0$，所以 $0<1-\sin\theta<1$，

则 $\frac{1}{1-\sin\theta}>1$，则 $m\le 1$.

故选：D.

9.【答案】C

【分析】由题意可转化为函数 $f(x)=ax-2$ 与函数 $y=\ln x$ 有两个焦点，进而可得参数范围.

【详解】解：由指对函数性质可知，可转化为函数 $f(x)=ax-2$ 与函数 $y=\ln x$ 有二个不同交点，

当 $a\le 0$ 时，不合题意；

当 $a>0$ 时，$ax-2=\ln x\Rightarrow a=\frac{\ln x+2}{x}$，有两个解，

设函数 $h(x)=\frac{\ln x+2}{x}$，$x>0$，

$h'(x)=\frac{-\ln x-1}{x^2}$，令 $h'(x)=0$，解得 $x=e^{-1}$，

所以函数 $h(x)$ 在 $(0,e^{-1})$ 单调递增，则 $(e^{-1},+\infty)$ 单调递减，

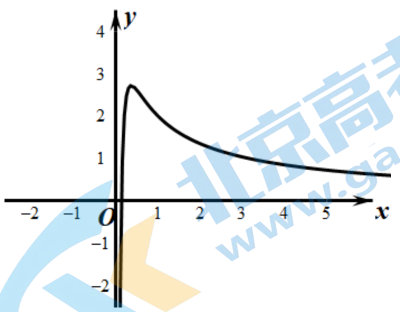
所以 $h(x)_{\max}=\frac{\ln e^{-1}+2}{e^{-1}}=e$，

又 $h(e^{-2})=\frac{\ln e^{-2}+2}{e^{-2}}=0$，

且当 $x\to+\infty$ 时，$h(x)>0$，

所以 $a\in(0,e)$，

故选：C.



10.【答案】A

【分析】根据定义计算甲，乙两公司的报价得分，再计算综合得分.

【详解】甲公司报价为 1100（万元），比基准价 1000（万元）多 100（万元），超 10%，所以得分为 $68\text{-}0.8\times10=60$，因此综合得分为 $80\times50\%+90\times10\%+60\times40\%=73$；

乙公司报价为 800（万元），比基准价 1000（万元）少 200（万元），低 20%，所以得分为 $80-(20-15)\times0.8=76$，因此综合得分为 $70\times50\%+100\times10\%+76\times40\%=75.4$，故选 A.

【点睛】本题考查了函数值的计算，属于中档题.

二、填空题（共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）

11.【答案】$\exists x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$，$\sin x\le\cos x$.

【分析】由全称命题的否定是特陈命题，即可得出答案.

【详解】命题“$\forall x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$，$\sin x>\cos x$”的否定形式是：

$\exists x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$，$\sin x\le\cos x$.

故答案为：$\exists x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$，$\sin x\le\cos x$.

12.【答案】 ①. 5 ②. 243

【分析】由题意可得：$2^n=32$，算出 n，令 $x=1$ 即可求出二项展开式的系数和.

【详解】$(1+2x)^n$ 的展开式的二项式系数之和为 32，所以 $2^n=32$，则 $n=5$，

令 $x=1$，$(1+2)^5=3^5=243$.

故答案为：5；243.

13.【答案】$\left(0,\frac{1}{8}\right)$

【分析】求出函数的定义域与导函数，依题意 $f'(x)=0$ 有两个不同的正实根，利用根的判别式及韦达定理得到不等式组，解得即可.

【详解】因为 $f(x)=ax^2-x+\ln x$ 定义域为 $(0,+\infty)$，

所以 $f'(x)=2ax-1+\frac{1}{x}=\frac{2ax^2-x+1}{x}$，

因为函数 $f(x)=ax^2-x+\ln x$ 有两个不同的极值点 x_1，x_2，

所以 $f'(x)=0$ 有两个不同的正实根 x_1，x_2，

即方程 $2ax^2-x+1=0$ 有两个不同的正实根 x_1，x_2，

所以$\begin{cases}\Delta=1-8a>0\\x_1+x_2=\dfrac{1}{2a}>0\\x_1x_2=\dfrac{1}{2a}>0\end{cases}$，解得$0<a<\dfrac{1}{8}$，

所以实数a的取值范围是$\left(0,\dfrac{1}{8}\right)$

故答案为：$\left(0,\dfrac{1}{8}\right)$

14.【答案】 ①. 7 ②. 44

【分析】（ⅰ）如果集合A中只有1个元素，则$1\notin A$，$7\notin B$，即$7\in A$，$1\in B$，即可推出A；

（ⅱ）分别讨论集合A，B元素个数，即可得到结论.

【详解】因为集合A中只有1个元素，则集合B中有7个元素，所以$1\notin A$，$7\notin B$，

则$7\in A$，即$A=\{7\}$，即集合A的元素是7；

若集合A中只有1个元素，则集合B中只有7个元素，则$1\notin A$，$7\notin B$，

即$7\in A$，$1\in B$，此时有$C_6^0=1$，

若集合A中只有2个元素，则集合B中只有6个元素，则$2\notin A$，$6\notin B$，

即$6\in A$，$2\in B$，则有$C_6^1=6$，

若集合A中只有3个元素，则集合B中只有5个元素，则$3\notin A$，$5\notin B$，

即$5\in A$，$3\in B$，此时有$C_6^2=15$，

若集合A中只有4个元素，则集合B中只有4个元素，则$4\notin A$，$4\notin B$，显然矛盾；

若集合A中只有5个元素，则集合B中只有3个元素，则$5\notin A$，$3\notin B$，

即$3\in A$，$5\in B$，此时有$C_6^4=15$，

若集合A中只有6个元素，则集合B中只有2个元素，则$6\notin A$，$2\notin B$，

即$2\in A$，$6\in B$，此时有$C_6^5=6$，

若集合A中只有7个元素，则集合B中只有1个元素，则$7\notin A$，$1\notin B$，

即$1\in A$，$7\in B$，此时有$C_6^6=1$，

故有序集合对(A,B)的个数是$1+6+15+15+6+1=44$，

故答案为：7；44

15.【答案】①②④

【分析】根据规律判断①，利用特殊值判断②，由$S_{\triangle A_nA_{n+1}A_{n+2}}=S_{\triangle OA_nA_{n+1}}+S_{\triangle OA_{n+1}A_{n+2}}$判断③；利用余弦定理证明从而判断④.

【详解】依题意可得对于任意正整数 n，$|A_nA_{n+4}|=|n-(n+4)|=4$，故①正确；

当 $n=3$ 时，$|A_3A_4|=\sqrt{3^2+4^2}=5\in Z$，故②正确；

$$S_{\triangle A_nA_{n+1}A_{n+2}}=S_{\triangle OA_nA_{n+1}}+S_{\triangle OA_{n+1}A_{n+2}}=\frac{1}{2}|OA_n|\cdot|OA_{n+1}|+\frac{1}{2}|OA_{n+1}|\cdot|OA_{n+2}|$$

$=\frac{1}{2}n\cdot(n+1)+\frac{1}{2}(n+1)(n+2)=(n+1)^2$，因为 $(n+1)^2$ 不可能等于 2023，故③错误；

$|A_nA_{n+1}|=\sqrt{n^2+(n+1)^2}=\sqrt{2n^2+2n+1}$，

$|A_{n+1}A_{n+2}|=\sqrt{(n+1)^2+(n+2)^2}=\sqrt{2n^2+6n+5}$，

$|A_nA_{n+2}|=n+n+2=2n+2=\sqrt{4n^2+8n+4}$，

因为 $|A_nA_{n+1}|<|A_{n+1}A_{n+2}|<|A_nA_{n+2}|$，所以在三角形 $A_{n+2}A_{n+1}A_n$ 中，$\angle A_{n+2}A_{n+1}A_n$ 为最大角，

$$\cos\angle A_{n+2}A_{n+1}A_n=\frac{2n^2+2n+1+2n^2+6n+5-\left(4n^2+8n+4\right)}{2\sqrt{2n^2+2n+1}\cdot\sqrt{2n^2+6n+5}}$$

$$=\frac{2}{2\sqrt{2n^2+2n+1}\cdot\sqrt{2n^2+6n+5}}>0,$$

则 $\angle A_{n+2}A_{n+1}A_n$ 为锐角，即三角形 $A_nA_{n+1}A_{n+2}$ 为锐角三角形，故④正确；

故答案为：①②④

【点睛】关键点点睛：本题解题的关键在于根据阿基米德螺线的规律，结合两点间的距离公式，面积公式，余弦定理等探究求解即可.

三、解答题（共 6 小题，共 75 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程）

16.【答案】（1）$a_n=n$，$b_n=2^n$

（2）8

【分析】（1）由 $a_1=1$，$a_{n+1}=a_n+1$，结合等差数列的定义求得 $a_n=n$；利用 $b_1=a_1+1$，$b_2-a_2=2$ 求得等比数列 $\{b_n\}$ 的通项公式；

（2）根据等比数列的求和公式得到 $T_n=2\left(2^n-1\right)$，$T_n+a_n=2\left(2^n-1\right)+n>300$，结合单调性即可得到最小的 n 值.

【小问 1 详解】

因为 $a_{n+1}=a_n+1$，所以 $a_{n+1}-a_n=1$，

所以数列 $\{a_n\}$ 是 $a_1=1$，公差为 1 的等差数列，

所以 $a_n=1+(n-1)=n$，

因为 $b_1=a_1+1=2$，$b_2-a_2=2$，

所以$b_2=4$，

所以等比数列$\{b_n\}$的公比$q=\frac{4}{2}=2$，

所以$b_n=2\times 2^{n-1}=2^n$.

【小问 2 详解】

$T_n=\frac{2\left(1-2^n\right)}{1-2}=2\left(2^n-1\right)$，

$T_n+a_n=2\left(2^n-1\right)+n>300$，

因为T_n+a_n单调递增，

且$T_7+a_7=2\times 127+7=261<300$，$T_8+a_8=2\times 255+8=518>300$，

所以n的最小值为 8.

17.【答案】(1) $\frac{3}{4}$

(2) 分布列见解析，$E\left(X\right)=\frac{2}{3}$

(3) $s^2<s_*^2$

【分析】(1) 记事件 A 为“从表 1 的日期中随机选出一天，这一天的升旗时刻早于$7:00$”，在表 1 的 20 个日期中，有 15 个日期的升旗时刻早于$7:00$，由此能求出从表 1 的日期中随机选出一天，这一天的升旗时刻早于$7:00$的概率；

(2) X 可能的取值为 0，1，2，记事件B为“从表 2 的日期中随机选出一天，这一天的升旗时刻早于$7:00$”，则$P(B)=\frac{5}{15}=\frac{1}{3}$．$P(\bar{B})=1-P(B)=\frac{2}{3}$，由此能求出 X 的分布列和数学期望；

(3) 由方差性质推导出$s^2<s_*^2$.

【小问 1 详解】

记事件 A 为“从表 1 的日期中随机选出一天，这一天的升旗时刻早于$7:00$”，

在表 1 的 20 个日期中，有 15 个日期的升旗时刻早于$7:00$，

$\therefore P\left(A\right)=\frac{15}{20}=\frac{3}{4}$.

【小问 2 详解】

X 可能的取值为 0，1，2.

记事件B为“从表 2 的日期中随机选出一天，这一天的升旗时刻早于$7:00$”，

则$P(B)=\frac{5}{15}=\frac{1}{3}$．$P(\bar{B})=1-P(B)=\frac{2}{3}$.

$P(X=0)=P(\bar{B})P(\bar{B})=\frac{4}{9}$,

$P(X=1)=C_2^1\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{9}$,

$P(X=2)=P(B)\cdot P(B)=\frac{1}{9}$,

所以 X 的分布列为：

X	0	1	2
P	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$

$E(X)=0\times\frac{4}{9}+1\times\frac{4}{9}+2\times\frac{1}{9}=\frac{2}{3}$.

【小问 3 详解】

由表 1 所有升旗时刻对应数据比较集中，而表 2 所有升旗时刻对应数据比较分散，可得 $s^2<s_*^2$.

18. 【答案】（1）见解析；

（2）$\frac{\sqrt{5}}{5}$；

（3）不存在，理由见解析.

【分析】(1)证明 $DF//CE$ ．然后证明 DF // 平面 BCE .

(2)在平面 $ABEF$ 内，过 A 作 $Az\perp AB$，建立空间直角坐标系 $A-xyz$ ．求出平面 BCF 的法向量，平面 ABF 的一个法向量，利用空间向量的数量积求解即可.

(3)解法一：求出平面 ACE 的法向量通过 $\vec{m}\cdot\vec{n}\neq 0$，说明平面 ACE 与平面 BCF 不可能垂直.

解法二：假设线段 CE 上存在点 G，使得 $AG\perp$ 平面 BCF，设 $\overrightarrow{CG}=\lambda\overrightarrow{CE}$，其中 $\lambda\in[0，1]$．通过 $AG\perp$ 平面 BCF，$AG//\vec{n}$ 得方程组，判断方程组无解，说明假设不成立.

【小问 1 详解】

$\because CD//EF$，且 $CD=EF$，

$\therefore$ 四边形 $CDFE$ 为平行四边形，

$\therefore DF//CE$.

$\because DF\not\subset$ 平面 BCE，

$\therefore DF\parallel$ 平面 BCE .

【小问 2 详解】

在平面 $ABEF$ 内，过 A 作 $Az\perp AB$.

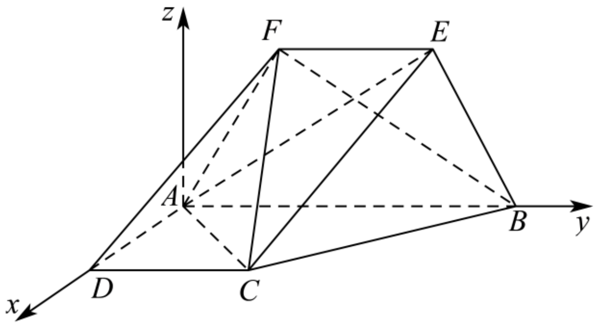
$\because$ 平面 $ABCD\perp$ 平面 $ABEF$，平面 $ABCD\cap$ 平面 $ABEF=AB$，

又 $Az\subset$ 平面 $ABEF$，$Az\perp AB$，

$\therefore Az\perp$ 平面 $ABCD$，

$\therefore AD\perp AB$， $AD\perp Az$， $Az\perp AB$.

如图建立空间直角坐标系 $A-xyz$：



由题意得， $A(0，0，0)$， $B(0，4，0)$， $C(2，2，0)$， $E(0,3,\sqrt{3})$， $F(0,1,\sqrt{3})$.

$\therefore \overrightarrow{BC}=(2，-2，0)$， $\overrightarrow{BF}=(0，-3，\sqrt{3})$.

设平面 BCF 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$， 则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{BC}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{BF}=0\end{cases}$， 即 $\begin{cases}2x-2y=0\\ -3y+\sqrt{3}z=0\end{cases}$

令 $y=1$，则 $x=1$， $z=\sqrt{3}$， $\therefore \vec{n}=(1,1,\sqrt{3})$.

平面 ABF 的一个法向量为 $\vec{v}=(1,0,0)$，

则 $\cos<\vec{n},\vec{v}>=\dfrac{\vec{n}\bullet\vec{v}}{|\vec{n}||\vec{v}|}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

$\therefore$ 二面角 $C-BF-A$ 的余弦值 $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

【小问 3 详解】

线段 CE 上不存在点 G， 使得 $AG\perp$ 平面 BCF， 理由如下：

解法一： 设平面 ACE 的法向量为 $\vec{m}=(x_1,y_1,z_1)$， 则 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{AC}=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{AE}=0\end{cases}$,即 $\begin{cases}2x_1+2y_1=0\\ 3y_1+\sqrt{3}z_1=0\end{cases}$

令 $y_1=1$， 则 $x_1=-1$， $z_1=-\sqrt{3}$， $\therefore \vec{m}=(-1,1,-\sqrt{3})$.

$\because \vec{m}\bullet\vec{n}\neq 0$，

$\therefore$平面 ACE 与平面 BCF 不可能垂直，

从而线段 CE 上不存在点 G， 使得 $AG\perp$ 平面 BCF.

解法二： 线段 CE 上不存在点 G， 使得 $AG\perp$ 平面 BCF， 理由如下：

假设线段 CE 上存在点 G， 使得 $AG\perp$ 平面 BCF，

设 $\overrightarrow{CG}=\lambda\overrightarrow{CE}$， 其中 $\lambda\in[0，1]$.

设 $G(x_2，y_2，z_2)$， 则有 $(x_2-2,y_2-2,z_2)=(-2\lambda,\lambda,\sqrt{3}\lambda)$，

$\therefore x_2=2-2\lambda$， $y_2=2+\lambda$， $z_2=\sqrt{3}\lambda$， 从而 $G(2-2\lambda,2+\lambda,\sqrt{3}\lambda)$，

$\therefore \overrightarrow{AG}=(2-2\lambda,2+\lambda,\sqrt{3}\lambda)$.

$\because AG\perp$ 平面 BCF，$\therefore AG /\!/ \vec{n}$.

$\therefore$ 有 $\dfrac{2-2\lambda}{1}=\dfrac{2+\lambda}{1}=\dfrac{\sqrt{3}\lambda}{\sqrt{3}}$,

$\because$ 上述方程组无解，$\therefore$ 假设不成立.

$\therefore$ 线段 CE 上不存在点 G，使得 $AG\perp$ 平面 BCF.

19.【答案】(1) $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$

(2) 直线 MC 过定点，定点坐标 $(1,0)$；

(3) 线段 MC 的长度 $|MC|$ 能为 $\dfrac{10}{3}$，不能为 $\dfrac{13}{3}$.

【分析】(1) 当 M 在短轴的端点时，$\triangle A_1A_2M$ 取得面积的最大值，表示出 $\triangle A_1A_2M$ 的面积即可求出 a 的值，即可求出椭圆 E 的标准方程；

(2) 联立直线 l 的方程和椭圆方程，化简写出根与系数关系，求得直线 MC 的方程，结合根与系数关系来判断出直线 MC 过定点.

(3) 求出 $|MC|$ 的最大值和最小值即可得出答案.

【小问 1 详解】

当 M 在短轴的端点时，$\triangle A_1A_2M$ 取得面积的最大值，

则 $S_{\triangle A_1A_2M}=\dfrac{1}{2}\cdot 2a\cdot b=a=2$，所以椭圆 E 的标准方程为：$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$.

【小问 2 详解】

$N(4,0)$，依题意可知直线 l 的斜率存在且不为 0，

设直线 l 的方程为 $y=k(x-4)$，设 $B(x_1,y_1),M(x_2,y_2),C(x_1,-y_1)$，

$\begin{cases} y=k(x-4) \\ \dfrac{x^2}{4}+y^2=1 \end{cases}$ 消去 y 并化简得 $(1+4k^2)x^2-32k^2x+64k^2-4=0$，

$x_1+x_2=\dfrac{32k^2}{1+4k^2}, x_1\cdot x_2=\dfrac{64k^2-4}{1+4k^2}$，

直线 MC 的方程为 $y+y_1=\dfrac{y_2+y_1}{x_2-x_1}\cdot(x-x_1)$，

根据椭圆的对称性可知，若直线 MC 过定点，则定点在 x 轴上，

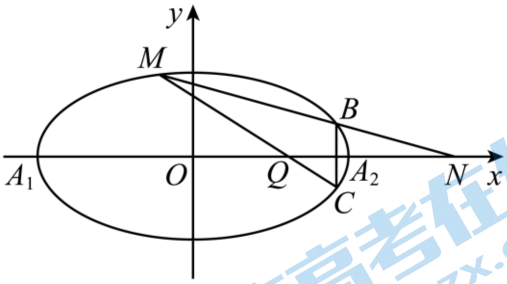
由此令 $y=0$ 得 $y_1=\dfrac{y_2+y_1}{x_2-x_1}\cdot(x-x_1)$，

即 $x=\dfrac{y_1(x_2-x_1)}{y_2+y_1}+x_1=\dfrac{y_1(x_2-x_1)+x_1(y_2+y_1)}{y_2+y_1}=\dfrac{x_1y_2+x_2y_1}{y_2+y_1}$

$$=\frac{x_1(kx_2-4k)+x_2(kx_1-4k)}{kx_2-4k+kx_1-4k}=\frac{x_1(x_2-4)+x_2(x_1-4)}{x_2+x_1-8}=\frac{2x_1x_2-4(x_1+x_2)}{x_2+x_1-8}$$

$$=\frac{2\times\frac{64k^2-4}{1+4k^2}-4\times\frac{32k^2}{1+4k^2}}{\frac{32k^2}{1+4k^2}-8}=\frac{\frac{128k^2-8-128k^2}{1+4k^2}}{\frac{32k^2-8-32k^2}{1+4k^2}}=1,$$

所以定点为$(1,0)$.



【小问 3 详解】

因为直线 MC 过点 $Q(1,0)$，所以$|MC|$的最小值为过点$Q(1,0)$且垂直 x 轴与椭圆的交点，

令 $x=1$，则$\frac{1}{4}+y^2=1$，解得：$y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$，故$|MC|_{\min}=\sqrt{3}$.

$|MC|$的最大值为长轴长$2a=4$，故$|MC|_{\max}=4$，

所以$\sqrt{3}\le|MC|\le4$，所以线段 MC 的长度$|MC|$能为$\frac{10}{3}$，不能为$\frac{13}{3}$.

【点睛】求解定点问题常用的方法:

(1)"特殊探路，一般证明"，即先通过特殊情况确定定点，再转化为有方向、有目标的一般性证明.

(2)"一般推理，特殊求解"，即先由题设条件得出曲线的方程，再根据参数的任意性得到定点坐标.

(3)求证直线过定点(x_0,y_0)，常利用直线的点斜式方程$y-y_0=k(x-x_0)$来证明.

20.【答案】(1) $a=-2$，$b=-\frac{1}{2}$

(2) 答案见解析　(3) 12

【分析】(1) 通过曲线在某一点的切线的相关知识直接求解;

(2) 利用导数，对参数分类讨论，即可求解单调性;

(3) 设$0<x_1\le x_2\le2$，将原表达式化为$f(x_2)+\frac{m}{x_2}\le f(x_1)+\frac{m}{x_1}$，构造函数$h(x)=f(x)+\frac{m}{x}$，根据

$h(x)$为$(0,2]$上的减函数，参变分离求解函数的最值即可.

【小问 1 详解】

因为$f(x)=\frac{1}{2}x^2-a\ln x+b(a\in\mathrm{R})$，

所以$f'(x)=x-\frac{a}{x}$，

因为曲线 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线的方程为 $3x-y-3=0$，

所以 $\begin{cases} f'(1)=1-a=3 \\ f(1)=\dfrac{1}{2}+b=0 \end{cases}$，

解得 $a=-2$， $b=-\dfrac{1}{2}$

【小问 2 详解】

因为 $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2-a\ln x+b(a\in \mathrm{R})$，定义域 $(0,+\infty)$，

所以 $f'(x)=x-\dfrac{a}{x}=\dfrac{x^2-a}{x}$，

若 $a\le 0$， $f'(x)>0$ 恒成立，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增；

若 $a>0$，令 $f'(x)=0$，得 $x=\sqrt{a}$，

当 $0<x<\sqrt{a}$ 时， $f'(x)<0$， $f(x)$ 单调递减，

当 $x>\sqrt{a}$ 时， $f'(x)>0$， $f(x)$ 单调递增

综上所述，若 $a\le 0$，则 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增

若 $a>0$， $f(x)$ 在 $(0,\sqrt{a})$ 单调递减，在 $(\sqrt{a},+\infty)$ 单调递增.

【小问 3 详解】

因为 $a=-2$，所以 $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2+2\ln x+b$，

所以函数 $f(x)$ 在 $(0,2]$ 上单调递增，

若 $x_1=x_2$， m 为任意实数，原不等式恒成立；

若 $x_1\ne x_2$，不妨设 $0<x_1<x_2\le 2$，则 $\dfrac{1}{x_1}>\dfrac{1}{x_2}$

因为 $\left|f(x_1)-f(x_2)\right|\le m\left|\dfrac{1}{x_1}-\dfrac{1}{x_2}\right|$，

所以 $f(x_2)-f(x_1)\le m\left(\dfrac{1}{x_1}-\dfrac{1}{x_2}\right)$，

即 $f(x_2)+\dfrac{m}{x_2}\le f(x_1)+\dfrac{m}{x_1}$ 恒成立，

设 $h(x)=f(x)+\dfrac{m}{x}=\dfrac{1}{2}x^2+2\ln x+\dfrac{m}{x}+b$，

若 $f(x_2)+\dfrac{m}{x_2}=f(x_1)+\dfrac{m}{x_1}$，则 $h(x)$ 是 $(0,2]$ 上的常函数，显然不成立，

若 $f(x_2)+\dfrac{m}{x_2}<f(x_1)+\dfrac{m}{x_1}$，则 $h(x)$ 是 $(0,2]$ 上的减函数，

所以 $h'(x)=x+\dfrac{2}{x}-\dfrac{m}{x^2}\le 0$ 在 $(0,2]$ 上恒成立，即 $m\ge x^3+2x$ 在 $(0,2]$ 上恒成立，

又函数 $y=x^3+2x$ 在 $(0,2]$ 上是增函数，所以 $x^3+2x\le 12$（当且仅当 $x=2$ 时等号成立）.

综上，$m\ge 12$，即 m 的最小值为12

【点睛】方法点睛：本题考查函数与导数的综合问题.利用导数解决函数单调性是常见方法，本题通过 $h(x)$ 是 $(0,2]$ 上的减函数，转化为 $h'(x)\le 0$ 在 $(0,2]$ 上恒成立，进而求解答案.

21.【答案】（1）见解析　（2）见解析

（3）见解析

【分析】（1）利用二元基底的定义加以验证，可得 $A=\{1,5\}$ 不是 $M=\{1,2,3,4,5\}$ 的一个二元基底.，$A=\{2,3\}$ 是 $M=\{1,2,3,4,5,6\}$ 的一个二元基底..

（2）设 $a_1<a_2<\cdots<a_m$，计算出 $b=\lambda_1 a_i+\lambda_2 a_j$ 的各种情况下的正整数个数并求出它们的和，结合题意得 $m+m+C_m^2+C_m^2\ge n$，即 $m(m+1)\ge n$.

（3）由（2）可知 $m(m+1)\ge 19$，所以 $m\ge 4$，并且得到结论“基底中元素表示出的数最多重复一个”. 再讨论当 $m=4$ 时，集合 A 的所有情况均不可能是 M 的 4 元基底，而当 $m=5$ 时，M 的一个基底 $A=\{1,3,5,9,16\}$，由此可得 m 的最小可能值为 5.

【小问 1 详解】

① $A=\{1,5\}$ 不是 $M=\{1,2,3,4,5\}$ 的一个二元基底.

理由是 $3\ne\lambda_1\cdot 1+\lambda_2\cdot 5\left(\lambda_1,\lambda_2\in\{-1,0,1\}\right)$；

② $A=\{2,3\}$ 是 $M=\{1,2,3,4,5,6\}$ 的一个二元基底.

理由是 $1=-1\times 2+1\times 3, 2=1\times 2+0\times 3, 3=0\times 2+1\times 3$，

$4=1\times 2+1\times 2, 5=1\times 2+1\times 3, 6=1\times 3+1\times 3$.

【小问 2 详解】

不妨设 $a_1<a_2<\cdots<a_m$，则

形如 $1\cdot a_i+0\cdot a_j\ (1\le i\le j\le m)$ 的正整数共有 m 个；

形如 $1\cdot a_i+1\cdot a_i\ (1\le i\le m)$ 的正整数共有 m 个；

形如 $1\cdot a_i+1\cdot a_j\ (1\le i<j\le m)$ 的正整数至多有 C_m^2 个；

形如$(-1)\cdot a_i+1\cdot a_j$ $(1\le i<j\le m)$的正整数至多有C_m^2个.

又集合$M=\{1,2,3,\cdots,n\}$含n个不同的正整数，A 为集合M的一个m元基底.

故$m+m+C_m^2+C_m^2\ge n$，即$m(m+1)\ge n$.

【小问 3 详解】

由（2）可知$m(m+1)\ge 19$，所以$m\ge 4$.

当$m=4$时，$m(m+1)-19=1$，即用基底中元素表示出的数最多重复一个. *

假设$A=\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$为$M=\{1,2,3,\cdots,19\}$的一个 4 元基底，

不妨设$a_1<a_2<a_3<a_4$，则$a_4\ge 10$.

当$a_4=10$时，有$a_3=9$，这时$a_2=8$或7.

如果$a_2=8$，则由$1=10-9,1=9-8,18=9+9,18=10+8$，与结论*矛盾.

如果$a_2=7$，则$a_1=6$或5.易知$A=\{6,7,9,10\}$和$A=\{5,7,9,10\}$都不是$M=\{1,2,3,\cdots,19\}$的 4 元基底，矛盾.

当$a_4=11$时，有$a_3=8$，这时$a_2=7$，$a_1=6$，易知$A=\{6,7,8,11\}$不是$M=\{1,2,3,\cdots,19\}$的 4 元基底，矛盾.

当$a_4=12$时，有$a_3=7$，这时$a_2=6$，$a_1=5$，易知$A=\{5,6,7,12\}$不是$M=\{1,2,3,\cdots,19\}$的 4 元基底，矛盾.

当$a_4=13$时，有$a_3=6$，$a_2=5$，$a_1=4$，易知$A=\{4,5,6,13\}$不是$M=\{1,2,3,\cdots,19\}$的 4 元基底，矛盾.

当$a_4=14$时，有$a_3=5$，$a_2=4$，$a_1=3$，易知$A=\{3,4,5,14\}$不是$M=\{1,2,3,\cdots,19\}$的 4 元基底，矛盾.

当$a_4=15$时，有$a_3=4$，$a_2=3$，$a_1=2$，易知$A=\{2,3,4,15\}$不是$M=\{1,2,3,\cdots,19\}$的 4 元基底，矛盾.

当$a_4=16$时，有$a_3=3$，$a_2=2$，$a_1=1$，易知$A=\{1,2,3,16\}$不是$M=\{1,2,3,\cdots,19\}$的 4 元基底，矛盾.

当$a_4\ge 17$时，A 均不可能是M的 4 元基底.

当$m=5$时，M的一个基底$A=\{1,3,5,9,16\}$；或$\{3,7,8,9,10\}$；或$\{4,7,8,9,10\}$等，只要写出一个即可.

综上，m的最小可能值为 5.

【点睛】方法点睛：新定义题型的特点是：通过给出一个新概念，或约定一种新运算，或给出几个新模型来创设全新的问题情景，要求考生在阅读理解的基础上，依据题目提供的信息，联系所学的知识和方法，实现信息的迁移，达到灵活解题的目的：遇到新定义问题，应耐心读题，分析新定义的特点，弄清新定义

的性质，按新定义的要求，“照章办事”，逐条分析、验证、运算，使问题得以解决.