

# 2023年普通高等学校招生全国统一考试

## 上海 数学试卷 2023.06.07

考生注意：

1. 本试卷共5页，21道试题，满分150分。考试时间120分钟。
2. 本考试分设试卷和答题纸。试卷包括试题与答题要求。作答必须涂（选择题）或写（非选择题）在答题纸上，在试卷上作答一律不得分。
3. 答卷前，务必用钢笔或圆珠笔在答题纸正面清楚地填写姓名、准考证号，并将核对后的条形码贴在指定位置上，在答题纸反面清楚地填写姓名。

一、填空题（本大题共有12题，满分54分，第1~6题每题4分，第7~12题每题5分）

考生应在答题纸的相应位置填写结果。

1. 不等式  $|x-2| < 1$  的解集为\_\_\_\_\_；

2. 已知  $\vec{a} = (-2, 3)$ ,  $\vec{b} = (1, 2)$ , 求  $\vec{a} \cdot \vec{b} =$ \_\_\_\_\_；

3. 已知  $\{a_n\}$  为等比数列，且  $a_1 = 3, q = 2$ , 求  $s_6 =$ \_\_\_\_\_；

4. 已知  $\tan \alpha = 3$ , 求  $\tan 2\alpha =$ \_\_\_\_\_；

5. 已知  $f(x) = \begin{cases} 2^x, & x > 0 \\ 1, & x \leq 0 \end{cases}$ , 则  $f(x)$  的值域是\_\_\_\_\_；

6. 已知当  $z = 1+i$ , 则  $|1-i \cdot z| =$ \_\_\_\_\_；

7. 已知  $x^2 + y^2 - 4y - m = 0$  的面积为  $\pi$ , 求  $m =$ \_\_\_\_\_；

8. 在  $\triangle ABC$  中,  $a = 4, b = 5, c = 6$ , 求  $\sin A =$ \_\_\_\_\_；

9. 国内生产总值 (GDP) 是衡量地区经济状况的最佳指标, 根据统计数据显示, 某市在 2020 年间经济高质量增长, GDP 稳步增长, 第一季度和第四季度的 GDP 分别为 231 和 242, 且四个季度 GDP 的中位数与平均数相等, 则 2020 年 GDP 总额为

10. 已知  $(1+2023x)^{100} + (2023-x)^{100} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{100}x^{100}$ , 其中  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{100} \in \mathbb{R}$ ,

若  $0 \leq k \leq 100$  且  $k \in \mathbb{N}$ , 当  $a_k < 0$  时,  $k$  的最大值是\_\_\_\_\_。

11. 公园修建斜坡, 假设斜坡起点在水平面上, 斜坡与水平面的夹角为  $\theta$ , 斜坡终点距离水平面的垂直高度为 4 米, 游客每走一米消耗的体能为  $(1.025 - \cos \theta)$ , 要使游客从斜坡底走到斜坡顶端所消耗的总体能最少, 则  $\theta =$  \_\_\_\_\_.

12. 空间内存在三点  $A, B, C$ , 满足  $AB = AC = BC = 1$ , 在空间内取不同两点(不计顺序), 使得这两点与  $A, B, C$  可以组成正四棱锥, 求方案数为 \_\_\_\_\_.

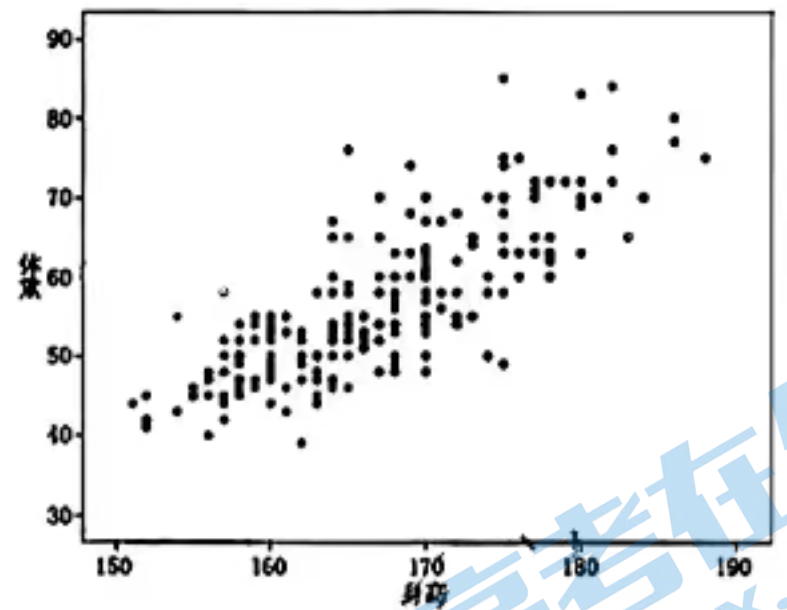
二、选择题(本题共有 4 题, 满分 18 分, 13、14 每题 4 分, 15、16 题每题 5 分) 每题有且只有一个正确选项, 考生应在答题纸的相应位置, 将代表正确选项的小方格涂黑.

13. 已知  $P = \{1, 2\}, Q = \{2, 3\}$ , 若  $M = \{x | x \in P \text{ 且 } x \notin Q\}$ , 则  $M =$  ( ).

- A.  $\{1\}$     B.  $\{2\}$   
 C.  $\{1, 2\}$      D.  $\{1, 2, 3\}$

14. 根据身高和体重散点图, 下列说法正确的是( ).

- A. 身高越高, 体重越重  
 B. 身高越高, 体重越轻  
 C. 身高与体重成正相关  
 D. 身高与体重成负相关



15. 设  $a > 0$ , 函数  $y = \sin x$  在区间  $[a, 2a]$  上的最小值为  $s_a$ , 在  $[2a, 3a]$  上的最小值为  $t_a$ , 当  $a$  变化时, 以下不可能的情形是( ).

- A.  $s_a > 0$  且  $t_a > 0$     B.  $s_a < 0$  且  $t_a < 0$     C.  $s_a > 0$  且  $t_a < 0$     D.  $s_a < 0$  且  $t_a > 0$

16. 在平面上, 若曲线  $\Gamma$  具有如下性质: 存在点  $M$ , 使得对于任意点  $P \in \Gamma$ , 都有  $Q \in \Gamma$  使得

$$|PM| \cdot |QM| = 1.$$

则称这条曲线为“自相关曲线”.

判断下列两个命题的真假( ).

- ① 所有椭圆都是“自相关曲线”.  
 ② 存在是“自相关曲线”的双曲线.

- A. ①假命题; ②真命题                                B. ①真命题; ②假命题  
 C. ①真命题; ②真命题                                D. ①假命题; ②假命题

三、解答题（本大题共有 5 题，满分 78 分）解答下列各题必须在答题纸的相应位置写出必要的步骤.

17.（本题满分 14 分）本题共有 2 个小题，第 1 小题满分 6 分，第 2 小题满分 8 分.

直四棱柱  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ ,  $AB \parallel DC$ ,  $AB \perp AD$ ,  $AB = 2$ ,  $AD = 3$ ,  $DC = 4$ .

(1) 求证:  $A_1B \perp$  面  $DCC_1D_1$

(2) 若四棱柱体积为 36, 求二面角  $A_1 - BD - A$  的大小

18.（本题满分 14 分）本题共有 2 个小题，第 1 小题满分 6 分，第 2 小题满分 8 分.

$$\text{函数 } f(x) = \frac{x^2 + (3a+1)x + c}{x+a} \quad (a, c \in \mathbb{R})$$

① 当  $a = 0$  是, 是否存在实数  $c$ , 使得  $f(x)$  为奇函数

② 函数  $f(x)$  的图像过点  $(1, 3)$ , 且  $f(x)$  的图像  $x$  轴负半轴有两个交点

求实数  $a$  的取值范围

19. (本题满分 14 分) 本题共有 2 个小题, 第 1 小题满分 2 分, 第 2 小题满分 6 分, 第 3 小题满分 8 分.

21 世纪汽车博览会在上海 2023 年 6 月 7 日在上海举行, 下表为某汽车模型公司共有 25 个汽车模型, 其外观和内饰的颜色分布如下表所示:

	红色外观	蓝色外观
棕色内饰	12	8
米色内饰	2	3

(1) 若小明从这些模型中随机拿一个模型, 记事件  $A$  为小明取到的模型为红色外观, 事件  $B$  取到模型有棕色内饰

求  $P(B)$ 、 $P(B|A)$ , 并据此判断事件  $A$  和事件  $B$  是否独立

(2) 该公司举行了一个抽奖活动, 规定在一次抽奖中, 每人可以一次性从这些模型中拿两个汽车模型, 给出以下假设: 1、拿到的两个模型会出现三种结果, 即外观和内饰均为同色、外观内饰都异色、以及仅外观或仅内饰同色; 2、按结果的可能性大小, 概率越小奖项越高;

(3) 奖金额为一等奖 600 元, 二等奖 300 元, 三等奖 150 元, 请你分析奖项对应的结果, 设  $X$  为奖金额, 写出  $X$  的分布列并求出  $X$  的数学期望

20. (本题满分 16 分) 本题共有 3 个小题, 第 1 小题满分 4 分, 第 2 小题满分 6 分, 第 3 小题满分 6 分.

曲线  $\Gamma: y^2 = 4x$ , 第一象限内点  $A$  在  $\Gamma$  上,  $A$  的纵坐标是  $a$ .

(1) 若  $A$  到准线距离为 3, 求  $a$ ;

(2) 若  $a = 4$ ,  $B$  在  $x$  轴上,  $AB$  中点在  $\Gamma$  上, 求点  $B$  坐标和坐标原点  $O$  到  $AB$  距离;

(3) 直线  $l: x = -3$ , 令  $P$  是第一象限  $\Gamma$  上异于  $A$  的一点, 直线  $PA$  交  $l$  于  $Q$ ,  $H$  是  $P$  在  $l$  上的投影, 若点  $A$  满足 “对于任意  $P$  都有  $|HQ| > 4$ ” 求  $a$  的取值范围.

(1) 若正整数  $m \geq 2$ , 证明  $a_m = \ln a_{m-1} - 1$ ;

(2) 若正整数  $m \geq 2$ , 试比较  $a_m$  与  $a_{m-1} - 2$  大小;

(3) 若正整数  $k \geq 3$ , 是否存在  $k$  使得  $a_1, a_2, \dots, a_k$  依次成等差数列? 若存在, 求出  $k$  的所有取值

若不存在, 试说明理由.

## 关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “精益求精、专业严谨” 的建设理念，不断探索 “K12 教育+互联网+大数据” 的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供 “衔接和桥梁纽带” 作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。



微信搜一搜

北京高考资讯