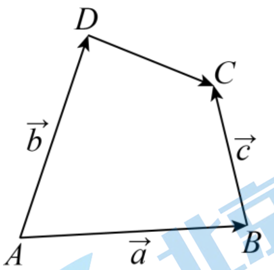
# 2023 北京首都师大附中高一 3 月月考

# 数　　学

**（2023 年 03 月）**

**一、单选题（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题列出的四个选项中，选出符合题目的一项）**

1. 四边形 ABCD 中，设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{c}$，则 $\overrightarrow{DC}=$（　　）




A. $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$　　B. $\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c})$

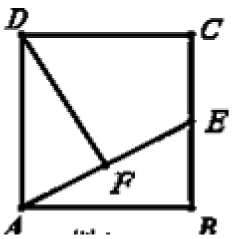
C. $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$　　D. $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}$

2. 将函数 $y=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 单位后，所得图象对应的函数解析式为（　　）

A. $y=\sqrt{2}\sin\left(2x-\frac{5}{12}\pi\right)$　　B. $y=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{5}{12}\pi\right)$

C. $y=\sqrt{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{12}\right)$　　D. $y=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{12}\right)$

3. 如图所示，在正方形 $ABCD$ 中，$E$ 为 $BC$ 的中点，$F$ 为 $AE$ 的中点，则 $\overrightarrow{DF}=$



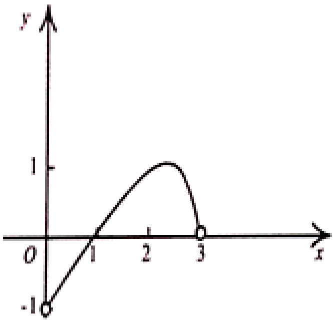

A. $-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$　　B. $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$

C. $\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$　　D. $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$

4. 若 $\theta$ 为第二象限角，则 $\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}-\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}}$，可化简为（　　）

A. $2\tan\theta$　　B. $\frac{2}{\tan\theta}$　　C. $-2\tan\theta$　　D. $-\frac{2}{\tan\theta}$

5. 如果函数 $f(x)$ 是定义在 $(-3,3)$ 上的奇函数，当 $0<x<3$ 时，函数 $f(x)$ 的图象如图所示，那么不等式 $f(x)\cos x<0$ 的解集是




A. $(-3,-\frac{\pi}{2})\cup(0,1)\cup(\frac{\pi}{2},3)$　　B. $(-\frac{\pi}{2},-1)\cup(0,1)\cup(\frac{\pi}{2},3)$

C. $(-3,-1)\cup(0,1)\cup(1,3)$　　D. $(-3,-\frac{\pi}{2})\cup(0,1)\cup(1,3)$

6. 已知函数 $f(x)=2\sin(\omega x-\frac{\pi}{6})(\omega>0)$，若 $\forall x\in\mathrm{R}$， $f(x)\le f(\frac{\pi}{3})$，则 $\omega$ 的最小值为（　）

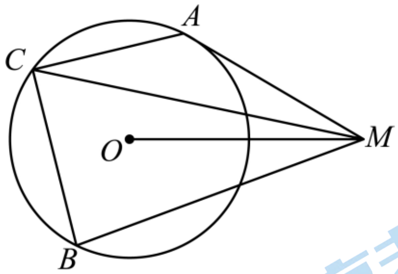
A. 2　　B. 4　　C. 6　　D. 8

7. 一般地，设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $A$，区间 $I\subseteq A$，如果对任意的 $x_1,x_2\in I$， $t\in(0,1)$，当 $x_1<x_2$ 时，都有 $f\left[(1-t)x_1+tx_2\right]>(1-t)f(x_1)+tf(x_2)$，则称 $y=f(x)$ 在区间 $I$ 上是“$n-$函数”下列函数中是区间 $(0,2\pi)$ 上是“$n-$函数”的是（　）

A. $y=\sin 2x$　　B. $y=\cos 2x$

C. $y=\sin\frac{x}{2}$　　D. $y=\cos\frac{x}{2}$

8. 如图，$A$，$B$，$C$ 三点在半径为 1 的圆 $O$ 上运动，$M$ 是圆 $O$ 外一点，且 $AC\perp BC$， $OM=2$，则 $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|$ 的最大值为（　）




A. 4　　B. 5　　C. 6　　D. 7

## 二、填空题（本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分）

9. 已知扇形的面积为 9，圆心角为 2rad，则扇形的弧长为______.

10. 设向量 $\overrightarrow{OA}=(3,-1)$，$\overrightarrow{OB}=(-1,2)$，$\overrightarrow{OC}=(-3,t)$.

（1）若 $A$，$B$，$C$ 三点共线，则 $t=$________；

（2）$\left|2\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right|=\left|\overrightarrow{AB}\right|$，则 $t=$______.

11. $y=\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$的最小正周期为______，对称轴为______.

12. 已知$\vec{a},\vec{b}$是两个平面向量，$|\vec{b}|=2\sqrt{2}$，且对任意$t\in R$，恒有$|\vec{b}-t\vec{a}|\geqslant|\vec{b}-\vec{a}|$，则$|\vec{a}-\vec{b}|+|\vec{a}|$的最大值是________.

13. 已知函数 $f(x)=\cos(2x+\varphi)\left(|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}\right)$的图象关于直线$x=\dfrac{11\pi}{10}$对称，且 $f(x)$在$\left[\dfrac{\pi}{6},m\right]$上单调，则$m$的最大值为_____.

14. 已知 $f(x)=2\sin(2x+\dfrac{\pi}{3})$，若$\exists x_1,x_2,x_3\in\left[0,\dfrac{3\pi}{2}\right]$，使得 $f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)$，若$x_1+x_2+x_3$的最大值为$M$，最小值为$N$，则$M+N=$________.

**三、解答题（本大题共 5 小题，每小题 10 分，共 50 分.解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）**

15. 化简求值.

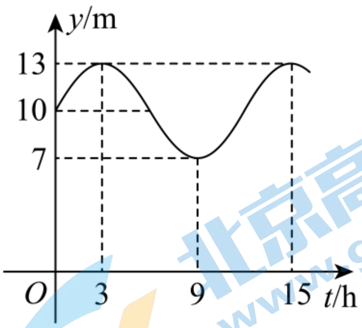
（1）计算：$\sin\left(-\dfrac{14\pi}{3}\right)-\cos\left(-\dfrac{29\pi}{6}\right)+\tan\left(-\dfrac{53\pi}{6}\right)+\sin\left(\dfrac{19\pi}{2}\right)-\cos 25\pi$

（2）化简：$\dfrac{\sin(2\pi-\alpha)\cos(3\pi+\alpha)\cos\left(\dfrac{3}{2}\pi+\alpha\right)}{\sin(-\pi+\alpha)\sin\left(\dfrac{1}{2}\pi+\alpha\right)}$

16. 某港口的水深$y$（单位：m）是时间$t$（$0\le t\le 24$，单位：h）的函数，下面是该港口的水深表：

| t（单位：h） | 0 | … | 3 | … | 9 | … | 15 | … |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| h（单位：m） | 10 | … | 13 | … | 7 | … | 13 | … |

经过长时间的观察，描出的曲线如下图所示，经拟合，该曲线可近似地看成函数$y=A\sin(\omega x+\varphi)+B$的图象.

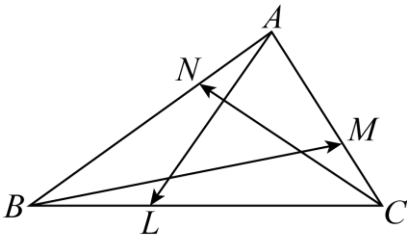



（1）试根据数据表和曲线，求出函数$y=A\sin(\omega x+\varphi)+B$的表达式；

（2）一般情况下，船舶航行时船底同海底的距离不少于 4.5m 时是安全的.如果某船的吃水深度（船底与水

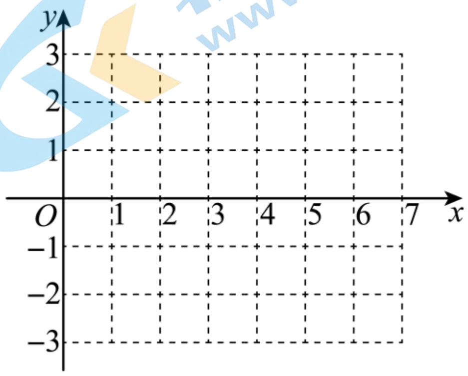
面的距离）为 7m，那么该船在什么时间段能够安全进港?若该船欲当天安全离港，它在港内停留的时间最多不能超过多少小时?（忽略离港所用的时间）

17. 如图所示，$L$，$M$，$N$ 分别为 $\Delta ABC$ 的边 $BC$，$CA$，$AB$ 上的点，且 $\dfrac{BL}{BC}=l$，$\dfrac{CM}{CA}=m$，$\dfrac{AN}{AB}=n$，若 $\overrightarrow{AL}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CN}=0$．求证：$l=m=n$．




18. 已知函数 $f(x)=2\sin\left(\dfrac{\pi}{3}x+\dfrac{\pi}{6}\right)$

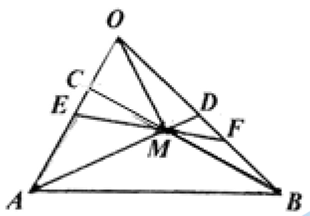
（1）用“五点作图法”在给定坐标系中画出函数 $f(x)$ 在 $[0,6]$ 上的图像；




（2）求 $y=f(x)$，$x\in\mathbf{R}$ 的单调递增区间；

（3）当 $x\in[0,m]$ 时，$f(x)$ 的取值范围为 $[1,2]$，直接写出 $m$ 的取值范围.

19. 如图，在 $\triangle OAB$ 中，$\overrightarrow{OA}=3\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OD}$，$AD$ 与 $BC$ 的交点为 $M$，过 $M$ 作动直线 $l$ 分别交线段 $AC$、$BD$ 于 $E$、$F$ 两点.




（1）用 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ 表示 $\overrightarrow{OM}$；

（2）设 $\overrightarrow{OE}=\lambda\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OF}=\mu\overrightarrow{OB}$.①求证：$\dfrac{1}{\lambda}+\dfrac{2}{\mu}=5$；②求 $\lambda+\mu$ 的最小值.

# 参考答案

## 一、单选题（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题列出的四个选项中，选出符合题目的一项）

1.【答案】A

【解析】

【分析】在四边形 ABCD 中, 观察图形知 $\boldsymbol{b}+\overrightarrow{\mathrm{DC}}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}$ ,由此能可得答案.

【详解】解：在四边形 ABCD 中,

$\because \overrightarrow{\mathrm{AB}}=\boldsymbol{a}$， $\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\boldsymbol{b}$， $\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\boldsymbol{c}$，

$\therefore\ \boldsymbol{b}+\overrightarrow{\mathrm{DC}}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}$，

$\therefore\ \overrightarrow{\mathrm{DC}}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$，

故选 A.

【点睛】本题主要考查向量的加减混合运算及其几何意义，得出 $\boldsymbol{b}+\overrightarrow{\mathrm{DC}}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}$ ,是解题的关键.

2.【答案】D

【解析】

【分析】先将函数 $y=\sqrt{2}\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ 中 x 换为 x-$\dfrac{\pi}{12}$ 后化简即可.

【详解】$y=\sqrt{2}\sin\left(2(x-\dfrac{\pi}{12})+\dfrac{\pi}{4}\right)$ 化解为 $y=\sqrt{2}\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{12}\right)$

故选 D

【点睛】本题考查三角函数平移问题,属于基础题目,解题中根据左加右减的法则,将 x 按要求变换.

3.【答案】D

【解析】

【分析】利用向量的三角形法则和向量共线定理可得：$\overline{DF}=\overline{AF}-\overline{AD}$，$\overline{AF}=\dfrac{1}{2}\overline{AE}$，$\overline{AE}=\overline{AB}+\overline{BE}$，

$\overline{BE}=\dfrac{1}{2}\overline{BC}$，$\overline{BC}=\overline{AD}$，即可得出答案.

【详解】利用向量的三角形法则，可得 $\overline{DF}=\overline{AF}-\overline{AD}$，$\overline{AE}=\overline{AB}+\overline{BE}$，

$\because E$ 为 $BC$ 的中点，$F$ 为 $AE$ 的中点，则 $\overline{AF}=\dfrac{1}{2}\overline{AE}$，$\overline{BE}=\dfrac{1}{2}\overline{BC}$

$\therefore \overline{DF}=\overline{AF}-\overline{AD}=\dfrac{1}{2}\overline{AE}-\overline{AD}=\dfrac{1}{2}(\overline{AB}+\overline{BE})-\overline{AD}=\dfrac{1}{2}\overline{AB}+\dfrac{1}{4}\overline{BC}-\overline{AD}$

又 $\because \overline{BC}=\overline{AD}$

$\therefore \overline{DF}=\dfrac{1}{2}\overline{AB}-\dfrac{3}{4}\overline{AD}$.

故选 D.

【点睛】本题考查了向量三角形法则、向量共线定理，考查了推理能力与计算能力.

向量的运算有两种方法：

一是几何运算，往往结合平面几何知识和三角函数知识解答，运算法则是：

（1）平行四边形法则（平行四边形的对角线分别是两向量的和与差）；

（2）三角形法则（两箭头间向量是差，箭头与箭尾间向量是和）；

二是坐标运算，建立坐标系转化为解析几何问题解答（求最值与范围问题，往往利用坐标运算比较简单）.

4. 【答案】D

【解析】

【分析】

根据同角三角函数的关系化简可求出.

【详解】$\because \theta$ 为第二象限角，$\therefore \sin\theta>0$，

$$\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}-\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}}$$

$$=\sqrt{\frac{(1-\cos\theta)^2}{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)}}-\sqrt{\frac{(1+\cos\theta)^2}{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}}$$

$$=\sqrt{\frac{(1-\cos\theta)^2}{\sin^2\theta}}-\sqrt{\frac{(1+\cos\theta)^2}{\sin^2\theta}}=\frac{|1-\cos\theta|}{|\sin\theta|}-\frac{|1+\cos\theta|}{|\sin\theta|}$$

$$=\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}-\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}=-\frac{2\cos\theta}{\sin\theta}=-\frac{2}{\tan\theta}.$$

故选：D.

5. 【答案】B

【解析】

【详解】试题分析：

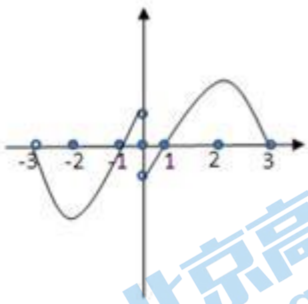


图 1

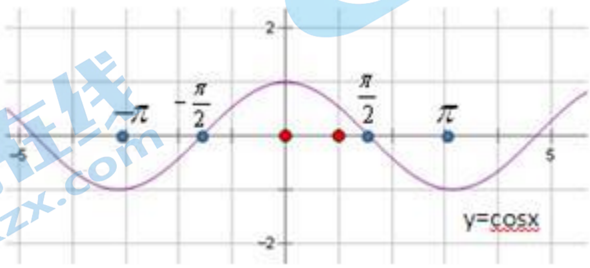


图 2

如图 1 为 f(x)在（-3，3）的图象，图 2 为 y=cosx 图象，要求得 $f(x)\cos x<0$ 的解集，只需转化为在 $(-3,3)$ 寻找满足如下两个关系的区间即可：$\begin{cases}f(x)>0\\ \cos x<0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}f(x)<0\\ \cos x>0\end{cases}$，结合图象易知当 $x\in(-\frac{\pi}{2},-1)$ 时，

$f(x)\langle 0,\cos x\rangle 0$，当 $x\in(0,1)$ 时，$f(x)\langle 0,\cos x\rangle 0$，当 $x\in(\frac{\pi}{2},3)$ 时，$f(x)>0,\cos x<0$，故选 B.

考点：奇函数的性质，余弦函数的图象，数形结合思想.

6.【答案】A

【解析】

【分析】由题意可得函数 $f\left(x\right)$ 在 $x=\frac{\pi}{3}$ 时取最大值，再利用正弦型函数的性质列式求解作答.

【详解】因 $\forall x\in\mathrm{R}, f\left(x\right)\le f(\frac{\pi}{3})$，则有 $f(x)_{\max}=f(\frac{\pi}{3})=2$，即 $\frac{\omega\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+2k\pi\left(k\in\mathrm{Z}\right)$，

解得 $\omega=2+6k\left(k\in\mathrm{Z}\right)$，而 $\omega>0$，则 $k\in\mathrm{N}$，即当 $k=0$ 时，$\omega_{\min}=2$，

所以 $\omega$ 的最小值为 2

故选：A

7.【答案】C

【解析】

【分析】当 $t=\frac{1}{2}$ 时，如果对任意的 $x_1,x_2\in\left(0,2\pi\right)$，当 $x_1<x_2$ 时，都有 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)>\frac{f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)}{2}$，

故函数为凸函数，进而分析各选项即可得答案.

【详解】解：由题知，当 $t=\frac{1}{2}$ 时，如果对任意的 $x_1,x_2\in\left(0,2\pi\right)$，当 $x_1<x_2$ 时，都有

$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)>\frac{f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)}{2}$，故函数为凸函数；

对于 A 选项，$y=\sin 2x$ 的最小正周期为 $\pi$，由于正弦函数在一个周期内凸函数性质，又有凹函数性质，

所以 $y=\sin 2x$ 在 $\left(0,2\pi\right)$ 不具有始终为凸函数的性质，故错误；

对于 B 选项，$y=\cos 2x$ 的最小正周期为 $\pi$，由于余弦函数在一个周期内凸函数性质，又有凹函数性质，

所以 $y=\cos 2x$ 在 $\left(0,2\pi\right)$ 不具有始终为凸函数的性质，故错误；

对于 C 选项，$y=\sin\frac{x}{2}$ 的最小正周期为 $4\pi$，其函数图像在 $\left(0,2\pi\right)$ 始终具有为凸函数的性质，故正确；

对于 D 选项，$y=\cos\frac{x}{2}$ 的最小正周期为 $4\pi$，其函数图像在 $\left(0,2\pi\right)$ 上即具有凸函数性质，又有凹函数性质，故错误；

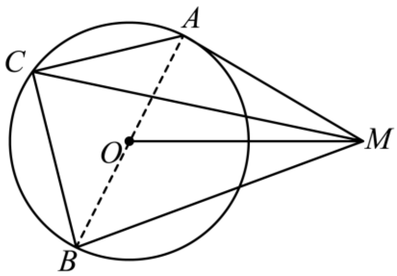
故选：C

8.【答案】D

【解析】

【分析】连接 $AB$，结合题意得到 $O$ 为 $AB$ 的中点，再利用向量的运算即可求解.

【详解】连接 $AB$，




由题意可知 $AB$ 为圆 $O$ 的直径，所以 $O$ 为 $AB$ 的中点，

则 $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|=\left|2\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{MC}\right|\le 2\left|\overrightarrow{MO}\right|+\left|\overrightarrow{MC}\right|\le 4+\left|\overrightarrow{MC}\right|=7$，当且仅当 $\overrightarrow{MO},\overrightarrow{OC}$ 同向时取等号，

故选：D

## 二、填空题（本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分）

9.【答案】6

【解析】

【分析】联立公式 $S=\dfrac{1}{2}lr$ 和 $l=|\alpha|\cdot r$，即可得到本题答案.

【详解】设半径为 $r$，弧长为 $l$，

由题得，$S=\dfrac{1}{2}lr=9$①，$l=2r$②，

②代入①得，$r^2=9$，所以 $r=3$，则 $l=2r=6$.

故答案为：6

10.【答案】 ①. $\dfrac{7}{2}$ ##3.5 ②. $-4$

【解析】

【分析】(1) 若 $A$，$B$，$C$ 三点共线，则 $\overrightarrow{AB}//\overrightarrow{AC}$，由平行向量的坐标表示即可得出答案；

(2) 由向量的模长公式可求出 $\left|2\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right|=\sqrt{25+(4+t)^2}$，$\left|\overrightarrow{AB}\right|=5$，则 $\sqrt{25+(4+t)^2}=5$，解方程即可得出答案.

【详解】(1) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(-4,3)$，$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=(-6,t+1)$，

若 $A$，$B$，$C$ 三点共线，则 $\overrightarrow{AB}//\overrightarrow{AC}$，

$-4\times(t+1)-3\times(-6)=0$，解得：$t=\dfrac{7}{2}$.

(2) $2\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=2(-1,2)+(-3,t)=(-5,4+t)$，$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(-4,3)$

因为 $\left|2\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right|=\left|\overrightarrow{AB}\right|$，则 $\left|2\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right|=\sqrt{25+(4+t)^2}$，$\left|\overrightarrow{AB}\right|=5$，

所以 $\sqrt{25+(4+t)^2}=5$，解得：$t=-4$.

11.【答案】 ①. $\pi$ ②. $x=-\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$

【解析】

【分析】根据题意，由余弦型函数的性质，代入计算，即可得到结果.

【详解】因为函数 $y=\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$，则其最小正周期为 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$，

令 $2x+\frac{\pi}{3}=k\pi,k\in\mathbf{Z}$，解得 $x=-\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$，

所以其对称轴为: $x=-\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$

故答案为: $\pi$; $x=-\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$

12.【答案】4

【解析】

【分析】根据平面向量数量积的运算律及不等式恒成立，得到 $t^2\vec{a}^2-2t\vec{b}\cdot\vec{a}+2\vec{b}\cdot\vec{a}-\vec{a}^2\geq 0$ 恒成立，即可得到 $4\left(\vec{b}\cdot\vec{a}-\vec{a}^2\right)^2\leq 0$，从而得到 $\vec{a}\perp(\vec{b}-\vec{a})$，设 $|\vec{a}|=x$，$|\vec{b}-\vec{a}|=y$，则 $x^2+y^2=8$，再利用基本不等式计算可得.

【详解】解：$\because$ 对任意 $t\in R$，恒有 $|\vec{b}-t\vec{a}|\geqslant|\vec{b}-\vec{a}|$，

所以 $\left(\vec{b}-t\vec{a}\right)^2\geqslant\left(\vec{b}-\vec{a}\right)^2$，即 $\vec{b}^2-2t\vec{b}\cdot\vec{a}+t^2\vec{a}^2\geqslant\vec{b}^2-2\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{a}^2$

即 $t^2\vec{a}^2-2t\vec{b}\cdot\vec{a}+2\vec{b}\cdot\vec{a}-\vec{a}^2\geq 0$ 恒成立，所以 $\left(-2\vec{b}\cdot\vec{a}\right)^2-4\vec{a}^2\left(2\vec{b}\cdot\vec{a}-\vec{a}^2\right)\leq 0$，即 $4\left(\vec{b}\cdot\vec{a}-\vec{a}^2\right)^2\leq 0$

所以 $\vec{b}\cdot\vec{a}-\vec{a}^2=0$，即 $\left(\vec{b}-\vec{a}\right)\cdot\vec{a}=0$

$\therefore\vec{a}\perp(\vec{b}-\vec{a})$.

设 $|\vec{a}|=x$，$|\vec{b}-\vec{a}|=y$，则 $x^2+y^2=(2\sqrt{2})^2=8$，

$\therefore|\vec{a}-\vec{b}|+|\vec{a}|=x+y=\sqrt{(x+y)^2}=\sqrt{x^2+y^2+2xy}=\sqrt{8+2xy}\leqslant\sqrt{8+x^2+y^2}=4$，

当且仅当“$x=y$”时“$=$”成立. $\therefore|\vec{a}-\vec{b}|+|\vec{a}|$ 的最大值为 4.

故答案为：4.

13.【答案】$\frac{3\pi}{5}$

【解析】

【分析】根据函数的对称性求出 $\varphi$，即可求出函数解析式，再根据 $x$ 的取值范围，求出 $2x-\frac{\pi}{5}$ 的取值范围，根据余弦函数的性质得到不等式组，解得即可；

【详解】解：因为函数 $f\left(x\right)=\cos\left(2x+\varphi\right)\left(\left|\varphi\right|<\dfrac{\pi}{2}\right)$ 的图象关于直线 $x=\dfrac{11\pi}{10}$ 对称，

所以 $2\times\dfrac{11\pi}{10}+\varphi=k\pi$， $k\in Z$，即 $\varphi=k\pi-\dfrac{11\pi}{5}$， $k\in Z$，

又 $\left|\varphi\right|<\dfrac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=-\dfrac{\pi}{5}$，从而 $f\left(x\right)=\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{5}\right)$.

因为 $x\in\left[\dfrac{\pi}{6},m\right]$，所以 $2x-\dfrac{\pi}{5}\in\left[\dfrac{2\pi}{15},2m-\dfrac{\pi}{5}\right]$，因为函数 $y=\cos x$ 在 $\left[0,\pi\right]$ 上单调递减，在 $\left[\pi,2\pi\right]$ 上单调递增，

所以 $\dfrac{2\pi}{15}<2m-\dfrac{\pi}{5}\le\pi$，即 $\dfrac{\pi}{6}<m\le\dfrac{3\pi}{5}$，故 $m$ 的最大值为 $\dfrac{3\pi}{5}$.

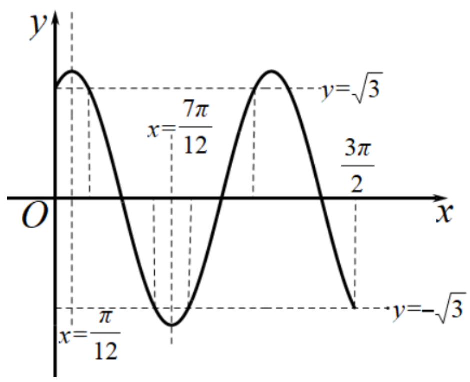
故答案为： $\dfrac{3\pi}{5}$

14.【答案】 $\dfrac{23\pi}{6}$

【解析】

【分析】作出 $f(x)$ 在 $\left[0,\dfrac{3\pi}{2}\right]$ 上的图象， $x_1,x_2,x_3$ 为 $f(x)$ 的图象与直线 $y=m$ 交点的横坐标，利用数形结合思想即可求得 $M$ 和 $N$.

【详解】作出 $f(x)=2\sin(2x+\dfrac{\pi}{3})$ 在 $[0,\dfrac{3\pi}{2}]$ 上的图象（如图所示）




因为 $f(0)=2\sin\dfrac{\pi}{3}=\sqrt{3}$， $f(\dfrac{3\pi}{2})=2\sin(\pi+\dfrac{\pi}{3})=-\sqrt{3}$，

所以当 $f(x)$ 的图象与直线 $y=\sqrt{3}$ 相交时，由函数图象可得，

设前三个交点横坐标依次为 $x_1$、 $x_2$、 $x_3$，此时和最小为 $N$，

由 $2\sin(2x+\dfrac{\pi}{3})=\sqrt{3}$，得 $\sin(2x+\dfrac{\pi}{3})=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

则 $x_1=0$， $x_2=\dfrac{\pi}{6}$， $x_3=\pi$， $N=\dfrac{7\pi}{6}$；

当 $f(x)$ 的图象与直线 $y=-\sqrt{3}$ 相交时，

设三个交点横坐标依次为 $x_1$、$x_2$、$x_3$，此时和最大为 $M$，

由 $2\sin(2x+\frac{\pi}{3})=-\sqrt{3}$，得 $\sin(2x+\frac{\pi}{3})=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，

则 $x_1+x_2=\frac{7\pi}{6}$，$x_3=\frac{3\pi}{2}$，$M=\frac{8\pi}{3}$；

所以 $M+N=\frac{23\pi}{6}$.

故答案为：$\frac{23\pi}{6}$.

## 三、解答题（本大题共 5 小题，每小题 10 分，共 50 分.解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

15.【答案】（1）$\frac{\sqrt{3}}{3}$

（2）$-\sin\alpha$

【解析】

【分析】（1）（2）根据诱导公式化简，利用特殊角的三角函数值即可求解.

【小问 1 详解】

$$\sin\left(-\frac{14\pi}{3}\right)-\cos\left(-\frac{29\pi}{6}\right)+\tan\left(-\frac{53\pi}{6}\right)+\sin\left(\frac{19\pi}{2}\right)-\cos 25\pi$$

$$=\sin\left(-\frac{14\pi}{3}+4\pi\right)-\cos\left(\frac{29\pi}{6}\right)+\tan\left(-\frac{53\pi}{6}+8\pi\right)+\sin\left(\frac{19\pi}{2}-8\pi\right)-\cos\left(25\pi-24\pi\right)$$

$$=\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)-\cos\left(\frac{29\pi}{6}-4\pi\right)+\tan\left(-\frac{5\pi}{6}\right)+\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)-\cos\pi=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{3}-1+1=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

【小问 2 详解】

$$\frac{\sin(2\pi-\alpha)\cos(3\pi+\alpha)\cos\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)}{\sin(-\pi+\alpha)\sin\left(\frac{1}{2}\pi+\alpha\right)}=\frac{\sin(-\alpha)\cos(\pi+\alpha)\cos\left(-\frac{1}{2}\pi+\alpha\right)}{-\sin(\pi-\alpha)\sin\left(\frac{1}{2}\pi+\alpha\right)}=\frac{-\sin\alpha(-\cos\alpha)\sin\alpha}{-\sin\alpha\cos\alpha}=-\sin\alpha$$

16.【答案】（1）$y=3\sin\frac{\pi}{6}t+10$

（2）16

【解析】

【分析】（1）由图象求出函数的最大值和最小值以及周期进行求解即可.

（2）根据条件解不等式 $y-7\geq 4.5$，然后进行求解即可.

【小问 1 详解】

由图象知最大值 $A+B=13$，最小值 $-A+B=7$，得 $A=3$，$B=10$，

得 $T=15-3=12$，即 $\dfrac{2\pi}{\omega}=12$，得 $\omega=\dfrac{\pi}{6}$，此时 $y=3\sin\left(\dfrac{\pi}{6}t+\varphi\right)+10$，又当 $t=3$ 时，

$y=3\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\times3+\varphi\right)+10=13\Rightarrow\dfrac{\pi}{2}+\varphi=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi,k\in Z\Rightarrow\varphi=2k\pi,k\in Z$，

故 $y=3\sin\dfrac{\pi}{6}t+10$.

【小问 2 详解】

由 $y-7\ge4.5$，得 $y\ge11.5$，即 $3\sin\dfrac{\pi}{6}t+10\ge11.5$，得 $\sin\dfrac{\pi}{6}t\ge\dfrac{1}{2}$，

得 $2k\pi+\dfrac{\pi}{6}\le\dfrac{\pi}{6}t\le2k\pi+\dfrac{5\pi}{6}$，$k\in Z$，解得 $12k+1\le t\le12k+5$，$k\in Z$，

$\because 0\le t\le24$，$\therefore k=0$ 时，$1\le t\le5$，$k=1$ 时，$13\le3t\le17$，

故当 1 时至 5 时，或 13 时至 17 时，能够安全进港，若该船欲当天安全离港，它在港内停留的时间最多不能超过多长时间为 $17-1=16$ 小时.

17.【答案】证明见解析

【解析】

【分析】

令 $\overrightarrow{BC}=\vec{a}$，$\overrightarrow{CA}=\vec{b}$ 为一组基底，根据已知有 $\overrightarrow{BL}=l\vec{a}$，$\overrightarrow{CM}=m\vec{b}$. 根据向量的三角形法则以及平面向量的基本定理把 $\overrightarrow{AL},\overrightarrow{BM},\overrightarrow{CN}$ 用向量 $\vec{a},\vec{b}$ 表示出来即可。

【详解】证明：令 $\overrightarrow{BC}=\vec{a}$，$\overrightarrow{CA}=\vec{b}$ 为一组基底，根据已知有 $\overrightarrow{BL}=l\vec{a}$，$\overrightarrow{CM}=m\vec{b}$.

$\because\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=-\vec{a}-\vec{b}$，则有 $\overrightarrow{AN}=n\overrightarrow{AB}=-n\vec{a}-n\vec{b}$.

$\therefore\overrightarrow{AL}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BL}=(l-1)\vec{a}-\vec{b}$，$\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CM}=\vec{a}+m\vec{b}$，$\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AN}=-n\vec{a}+(1-n)\vec{b}$.

又 $\overrightarrow{AL}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CN}=0$，$\therefore(l-n)\vec{a}+(m-n)\vec{b}=0$.

根据平面向量基本定理，有 $l-n=m-n=0$. 故 $l=m=n$.

【点睛】本题主要考查了平面向量的三角形法则以及向量的基本定理，属于基础题。

18.【答案】(1) 答案见解析

(2) 递增区间为 $[6k-2,6k+1](k\in\mathbf{Z})$

(3) $[1,2]$.

【解析】

【分析】(1) 由 $x\in[0,6]$，计算出 $\dfrac{\pi x}{3}+\dfrac{\pi}{6}$ 的取值范围，通过列表、描点、连线，可作出函数 $f(x)$ 在 $[0,6]$ 上的图象；

(2) 解不等式 $2k\pi-\dfrac{\pi}{2}\le\dfrac{\pi}{3}x+\dfrac{\pi}{6}\le2k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in Z)$ 可得函数 $f(x)$ 的单调递增区间；

（3）利用（1）中的图象结合$1 \le f(x) \le 2$可得出实数$m$的取值范围.

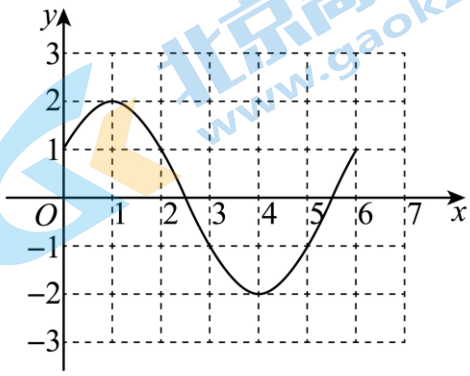
【小问 1 详解】

因为$f(x)=2\sin\left(\frac{\pi}{3}x+\frac{\pi}{6}\right)$，当$x\in[0,6]$时，$\frac{\pi x}{3}+\frac{\pi}{6}\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{13\pi}{6}\right]$，

列表如下：

| $x$ | 0 | 1 | $\frac{5}{2}$ | 4 | $\frac{11}{2}$ | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{\pi}{3}x+\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $2\pi$ | $\frac{13\pi}{6}$ |
| $y$ | 1 | 2 | 0 | $-2$ | 0 | 1 |

作图如下：




【小问 2 详解】

因为$f(x)=2\sin\left(\frac{\pi}{3}x+\frac{\pi}{6}\right)$，令$\frac{\pi}{3}x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in Z)$，解得$x=3k+1(k\in Z)$，

令$2k\pi-\frac{\pi}{2}\le\frac{\pi}{3}x+\frac{\pi}{6}\le 2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in Z)$，解得$6k-2\le x\le 6k+1(k\in \mathbf{Z})$，

所以$y=f(x)$的递增区间为$[6k-2,6k+1](k\in\mathbf{Z})$

【小问 3 详解】

$\because x\in[0,m]$，$\therefore \frac{\pi}{3}x+\frac{\pi}{6}\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi m}{3}+\frac{\pi}{6}\right]$，

又$1\le f(x)\le 2$，由（1）的图象可知，$1\le m\le 2$，$\therefore m$的取值范围是$[1,2]$.

19. 【答案】（1）$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{5}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{5}\overrightarrow{OB}$

（2）①证明过程见详解；②$\frac{3+2\sqrt{2}}{5}$.

【解析】

【分析】（1）利用三点共线列出方程，求解即可；

（2）①利用向量的线性运算即可证明；②利用基本不等式即可求解.

【小问 1 详解】

由 $A,M,D$ 三点共线可得存在实数 $t$，使得 $\overrightarrow{OM}=t\overrightarrow{OA}+(1-t)\overrightarrow{OD}=t\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}(1-t)\overrightarrow{OB}$，

同理由 $C,M,B$ 三点共线可得存在实数 $m$，使得 $\overrightarrow{OM}=m\overrightarrow{OB}+(1-m)\overrightarrow{OC}=m\overrightarrow{OB}+\frac{1}{3}(1-m)\overrightarrow{OA}$，

所以 $\begin{cases}t=\frac{1}{3}(1-m)\\ \frac{1}{2}(1-t)=m\end{cases}$，解得 $\begin{cases}t=\frac{1}{5}\\ m=\frac{2}{5}\end{cases}$，

所以 $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{5}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{5}\overrightarrow{OB}$.

【小问 2 详解】

①设 $\overrightarrow{OM}=x\overrightarrow{OE}+y\overrightarrow{OF}=x\lambda\overrightarrow{OA}+y\mu\overrightarrow{OB}$，其中 $x+y=1,\lambda\in[\frac{1}{3},1]$.

所以 $\begin{cases}x\lambda=\frac{1}{5}\\ y\mu=\frac{2}{5}\end{cases}$，则 $\begin{cases}\frac{1}{\lambda}=5x\\ \frac{2}{\mu}=5y\end{cases}$，所以 $\frac{1}{\lambda}+\frac{2}{\mu}=5$；

②所以 $\lambda+\mu=\frac{1}{5}(\frac{1}{\lambda}+\frac{2}{\mu})(\lambda+\mu)=\frac{1}{5}(3+\frac{\mu}{\lambda}+\frac{2\lambda}{\mu})\geq\frac{3+2\sqrt{2}}{5}$，当且仅当 $\frac{\mu}{\lambda}=\frac{2\lambda}{\mu}$ 时取等号，即

$\lambda=\frac{1+\sqrt{2}}{5}$ 时，$\lambda+\mu$ 取得最小值为 $\frac{3+2\sqrt{2}}{5}$.

# 关于我们

**北京高考在线**创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 〞精益求精、专业严谨 〞 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。