2023 北京北师大附中高一（下）期末

数　　学

考生须知

1.本试卷有三道大题，共 6 页.考试时长 120 分钟，满分 150 分.

2.考生务必将答案填写在答题纸上，在试卷上作答无效.

3.考试结束后，考生应将答题纸交回.

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1. 已知角α的终边经过点$P(-\frac{3}{5},\frac{4}{5})$，则$\tan\alpha=$（　）

A. $-\frac{4}{3}$　　B. $-\frac{3}{4}$　　C. $\frac{4}{3}$　　D. $\frac{3}{4}$

2. 在复平面内，复数z对应的点的坐标为$(-2,-1)$，则复数z的共轭复数$\bar{z}=$（　）

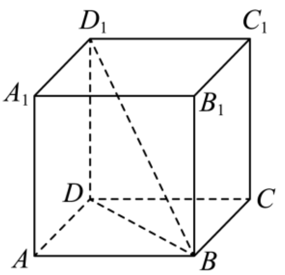
A. $-2-\mathrm{i}$　　B. $-2+\mathrm{i}$　　C. $2+\mathrm{i}$　　D. $2-\mathrm{i}$

3. 已知m,n表示两条不同直线，α表示平面，下列说法正确的是（　）

A. 若$m//\alpha$，$n//\alpha$，则$m//n$　　B. 若$m//\alpha$，$m\perp n$，则$n\perp\alpha$

C. 若$m\perp\alpha$，$n\subset\alpha$，则$m\perp n$　　D. 若$m\perp\alpha$，$m\perp n$，则$n//\alpha$

4. 已知正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$，直线BD_1与直线AA_1所成角的余弦值是（　）

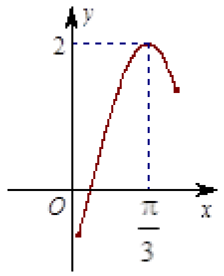


A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{\sqrt{6}}{3}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

5. 在$\triangle ABC$中，若$a=2$，$b=3$，$\cos(A+B)=\frac{1}{3}$，则$c=$（　）

A. $\sqrt{17}$　　B. 4　　C. $\sqrt{15}$　　D. 3

6. 函数$f(x)=A\sin(2x+\varphi)(A,\varphi\in R)$的部分图象如图所示，那么$f(0)=$（ ）



A. $-\frac{1}{2}$

B. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

C. -1

D. $-\sqrt{3}$

7. 已知D是边长为2的正△ABC边BC上的动点，则$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$的取值范围是（　）

A. $[\sqrt{3},4]$

B. $[\sqrt{3},2]$

C. $[0,2]$

D. $[2,4]$

8. 在$\triangle ABC$中，$A=\frac{\pi}{4}$，则“$\sin B<\frac{\sqrt{2}}{2}$”是“$\triangle ABC$是钝角三角形”的（　）

A. 充分而不必要条件

B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

9. 将边长为2的正方形$ABCD$沿对角线AC折起，折起后点D记为D'．若$BD'=2$，则四面体$ABCD'$的体积为（　）

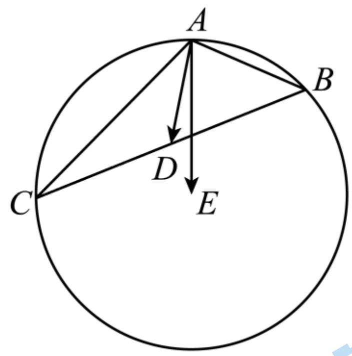
A. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

B. $\frac{\sqrt{2}}{3}$

C. $2\sqrt{2}$

D. $\sqrt{2}$

10. 如图，圆E为$\triangle ABC$的外接圆，$AB=4$，$AC=6$，D为边BC的中点，则$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AE}=$（　）



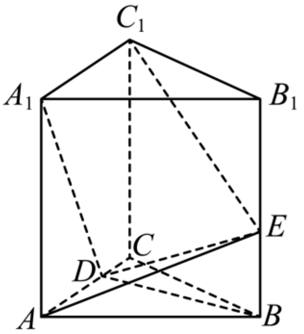
A. 26　　B. 13　　C. 10　　D. 5

二、填空题共5小题，每小题5分，共25分.

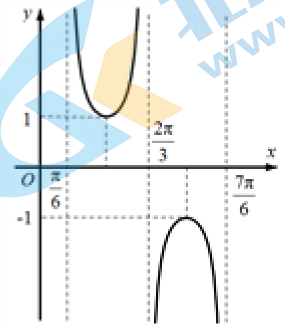
11. 已知复数$z=\frac{2}{1+\mathrm{i}}$，则$|z|=$________.

12. 已知正方形$ABCD$的边长为2，则$|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|=$________.

13. 如图，在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AC\perp BC$，$AC=3$，$BC=2$，点 D 在棱 AC 上，且 $AD=2DC$，点 E 在棱 BB_1 上，若三棱锥 $A-BDE$ 的体积是 $\frac{4}{3}$，则棱 BB_1 的长度可以是________.（写出一个符合要求的值）



14. 已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{\sin(\omega x+\varphi)}$（其中 $\omega>0$，$|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}$）的部分图象如图所示，则 $\omega=$________，$\varphi=$________.



15. 如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=1$，点 M 为直线 B_1C 上的动点，则下列四个命题：

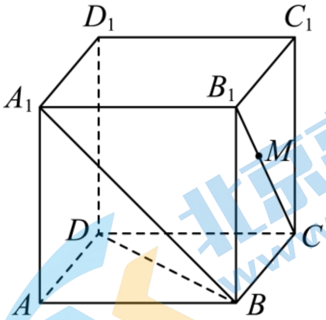
①连接 D_1M，总有 D_1M // 平面 A_1BD；

② $AC_1\perp$ 平面 A_1BD；

③动点 M 到直线 BD 的距离的最小值是 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$；

④设 $CM=x$，则三棱锥 A_1-ADM 的体积随着 x 增大而增大.

其中正确的命题的序号是________.



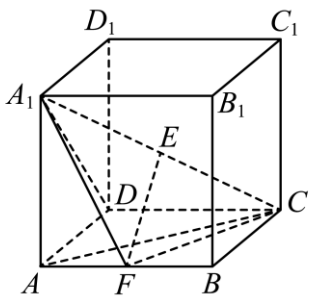
三、解答题共 6 小题，共 85 分.解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

16. 在 $\triangle ABC$ 中，$a=4$，$b=3$，$\cos A=\dfrac{1}{3}$.

（1）求 $\sin B$ 的值；

（2）求 c 的值和 $\triangle ABC$ 的面积

17. 如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=2$，E，F 分别是线段 A_1C，AB 的中点.

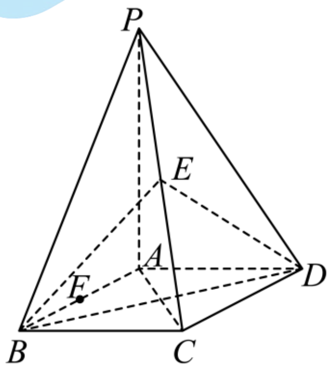


（1）求证：平面 $A_1DC\perp$ 平面 ADD_1A_1；

（2）求三棱锥 $F-ACA_1$ 的体积；

（3）求证：$EF//$ 平面 A_1AD；

18. 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是菱形，$PA\perp$ 平面 $ABCD$，E，F 分别为 PC，AB 的中点.



（1）求证：$PC\perp BD$；

（2）若 $PA=AB=AC=2$，求点 A 到平面 EBC 的距离；

（3）直线 AD 上是否存在一点 M，使得 P，M，E，F 四点共面?若存在，求 $\dfrac{AM}{AD}$ 的值；若不存在，说明理由.

19. 已知有限数列 $\{a_n\}$ 共 M 项 $(M\geq 4)$，其任意连续三项均为某等腰三角形的三边长，且这些等腰三角形两两均不全等.将数列 $\{a_n\}$ 的各项和记为 S .

（1）若 $a_n\in\{1,2\}(n=1,2,\cdots,M)$，直接写出 M,S 的值；

（2）若 $a_n\in\{1,2,3\}(n=1,2,\cdots,M)$，求 M 的最大值；

（3）若 $a_n\in\mathbf{N}^*(n=1,2,\cdots,M),M=16$，求 S 的最小值

参考答案

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1.【答案】A

【分析】根据给定条件，利用三角函数定义直接计算作答.

【详解】因为角α的终边经过点$P(-\frac{3}{5},\frac{4}{5})$，所以$\tan\alpha=\frac{\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}}=-\frac{4}{3}$.

故选：A

2.【答案】B

【分析】根据给定条件，求出复数z，再求出共轭复数作答.

【详解】依题意，$z=-2-\mathrm{i}$，所以复数z的共轭复数$\overline{z}=-2+\mathrm{i}$.

故选：B

3.【答案】C

【分析】根据平行与垂直关系相关定理依次判断各个选项即可.

【详解】对于 A，若$m//\alpha$，$n//\alpha$，则m,n可能平行、相交或异面，A 错误；

对于 B，若$m//\alpha$，$m\perp n$，则n与α可能平行或相交，B 错误；

对于 C，由线面垂直性质可知：若$m\perp\alpha$，$n\subset\alpha$，则$m\perp n$，C 正确；

对于 D，若$m\perp\alpha$，$m\perp n$，则$n//\alpha$或$n\subset\alpha$，D 错误.

故选：C.

4.【答案】D

【分析】根据线线平行得异面直线所成的角，即可由三角形边角关系求解.

【详解】由于$AA_1//DD_1$,所以$\angle DD_1B$即为直线BD_1与直线AA_1所成的角或其补角，

不妨设正方体的棱长为a，则$BD=\sqrt{2}a,BD_1=\sqrt{D_1D^2+BD^2}=\sqrt{3}a$，

所以$\cos\angle DD_1B=\frac{DD_1}{D_1B}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

故选：D

5.【答案】A

【分析】利用余弦定理求解.

【详解】因为$\cos(A+B)=\cos(\pi-C)=-\cos C=\frac{1}{3}$，

所以$\cos C=-\frac{1}{3}$，

又 $a=2$， $b=3$，

由余弦定理得： $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$，

$=4+9-2\times2\times3\times\left(-\frac{1}{3}\right)=17$，

所以 $c=\sqrt{17}$，

故选：A

6. 【答案】C

【详解】 $A=2,2\times\frac{\pi}{3}+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi(k\in Z)\therefore\varphi=-\frac{\pi}{6}+2k\pi(k\in Z)$

$f(0)=2\sin(-\frac{\pi}{6}+2k\pi)=-1$，选 C.

7. 【答案】D

【分析】根据向量数量积的几何意义可得 $|\overrightarrow{AD}|\cos\angle DAB\in[1,2]$，再由 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=|\overrightarrow{AD}||\overrightarrow{AB}|\cos\angle DAB$ 即可求范围.

【详解】由 D 在边 BC 上运动，且△ ABC 为边长为 2 的正三角形，

所以 $0\le\angle DAB\le\frac{\pi}{3}$， 则 $\left|\overrightarrow{AB}\right|\cos\angle DAB\in\left[1,2\right]$，

由 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=|\overrightarrow{AD}||\overrightarrow{AB}|\cos\angle DAB\in[2,4]$.

故选：D

8. 【答案】A

【分析】先判断如果 $\sin B<\frac{\sqrt{2}}{2}$ 能不能推出 $\triangle ABC$ 是钝角三角形，

再判断如果 $\triangle ABC$ 是钝角三角形，是否一定有 $\sin B<\frac{\sqrt{2}}{2}$ 即可.

【详解】如果 $\sin B<\frac{\sqrt{2}}{2}$， 由于 B 是三角形的内角，并且 $A=\frac{\pi}{4}$, 则 $0<B<\frac{\pi}{4}$，

$A+B<\frac{\pi}{2}$， $\triangle ABC$ 是钝角三角形，

所以 $\sin B<\frac{\sqrt{2}}{2}$ 是充分条件；

如果 $\triangle ABC$ 是钝角三角形，不妨设 $B=\frac{2\pi}{3}$， 则 $\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}>\frac{\sqrt{2}}{2}$，

所以 $\sin B<\frac{\sqrt{2}}{2}$ 不是必要条件；

故选：A.

9.【答案】A

【分析】先将正方形 $ABCD$ 折起得到四面体 $ABCD'$，由 $BO\perp AC$， $D'O\perp AC$ 得 $AC\perp$ 平面 OBD'，再求出 AC， OB,OD' 的长度，证明 $OB\perp OD'$，最后把四面体看做两个同底的三棱锥 $A-BOD'$ 和 $C-BOD'$ 拼接而成，即可用三棱锥的体积公式求体积.

【详解】如图 1，连接 BD 与 AC 相交于点 O，则 $AC\perp BD$.

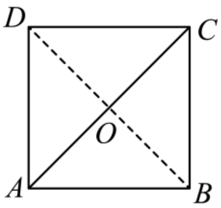


图1

如图 2，将正方形 $ABCD$ 沿对角线 AC 折起，折起后点 D 记为 D' .

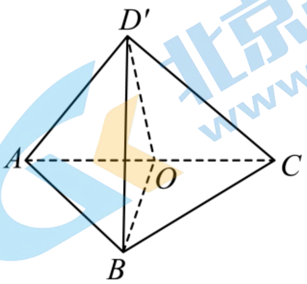


图2

因为 $BO\perp AC$， $D'O\perp AC$， $BO\cap D'O=O$， $BO\subset$ 平面 OBD'， $D'O\subset$ 平面 OBD'，

所以 $AC\perp$ 平面 OBD'，

因为正方形 $ABCD$ 边长为 2，所以 $AC=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$, $OB=OD'=\frac{1}{2}BD=\frac{1}{2}AC=\sqrt{2}$,

又因为 $BD'=2$,所以 $OB^2+OD'^2=BD'^2$,所以 $OB\perp OD'$.

所以四面体 $ABCD'$ 的体积为

$$V_{A-BOD'}+V_{C-BOD'}=\frac{1}{3}\times S_{\triangle BOD'}\times AC=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}\right)\times 2\sqrt{2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

故选：A

10.【答案】B

【分析】由中点关系可得 $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$，利用 E 为 $\triangle ABC$ 的外接圆的圆心，可得 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|^2=\frac{1}{2}\times 4^2=8$，同理可得 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}|^2=18$，即可得出结论.

【详解】由于 D 是 BC 边的中点，可得 $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$，

$\because E$ 是 $\triangle ABC$ 的外接圆的圆心，

$\therefore \overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AE}||\overrightarrow{AB}|\cos\angle BAE=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|^2=\frac{1}{2}\times 4^2=8$，

同理可得 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}|^2=18$，

$\therefore \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\times 8+\frac{1}{2}\times 18=13$.

故选：B

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11.【答案】$\sqrt{2}$

【分析】根据复数的除法运算可得 $z=1-\mathrm{i}$，结合复数的几何意义即可求出模.

【详解】由 $z=\frac{2}{1+\mathrm{i}}$，得 $z=\frac{2}{1+\mathrm{i}}=\frac{2(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}=1-\mathrm{i}$，

所以 $|z|=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$，

故答案为：$\sqrt{2}$

12.【答案】$2\sqrt{5}$

【分析】根据向量数量积以及模长公式即可求解.

【详解】由题意可知 $|\overrightarrow{AB}|=2,|\overrightarrow{AC}|=2\sqrt{2},\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\rangle=\frac{\pi}{4}$，

$\therefore \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2\times 2\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=4,$

故 $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|=\sqrt{\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AC}^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}=\sqrt{2^2+\left(2\sqrt{2}\right)^2+8}=2\sqrt{5}$，

故答案为：$2\sqrt{5}$

13.【答案】3（只要满足 $BB_1\geq 2$ 均可）

【分析】根据锥体的体积公式结合等体积法即可求解.

【详解】由题意可知

$V_{A-BDE}=V_{E-BDA}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABD}\cdot EB=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}AD\cdot BC\cdot EB=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 2\times 2\cdot EB=\frac{4}{3}\Rightarrow EB=2$，

所以 BB_1 的长度不小于 2 即可，不妨取 $BB_1=3$，

故答案为：3（只要满足 $BB_1\geq 2$ 均可）

14.【答案】 ①. 2 ②. $-\frac{\pi}{3}$

【详解】由图知函数的周期是 $\frac{7\pi}{6}-\frac{\pi}{6}=\pi=\frac{2\pi}{\omega},\omega=2$，又知 $f\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\frac{1}{sin\left(\frac{5\pi}{12}\times 2+\varphi\right)}=1$，

$\varphi+\frac{5\pi}{6}=2k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k=0$时，$\varphi=-\frac{\pi}{3}$，故答案为(1) 2；(2) $-\frac{\pi}{3}$.

【方法点睛】本题主要通过已知三角函数的图象求解析式考查三角函数的性质，属于中档题.利用图象先求出周期，用周期公式求出ω，利用特殊点求出φ，正确求ω，φ是解题的关键.求解析时求参数φ是确定函数解析式的关键，由特殊点求φ时，可以先求出φ的所有的值，再根据题设中的条件，取特殊值即可.

15.【答案】①②③

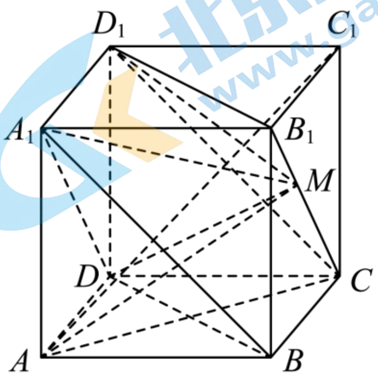
【分析】利用面面平行的性质推理判断①；利用线面垂直的判定推理判断②；利用线面平行结合等体积法计算判断③；利用等体积法计算判断④作答.

【详解】在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，对角面A_1B_1CD是矩形，则$B_1C//A_1D, A_1D\subset$平面A_1BD，

$B_1C\not\subset$平面A_1BD，

于是$B_1C//$平面A_1BD，同理$B_1D_1//$平面A_1BD，而$B_1C\cap B_1D_1=B_1, B_1C, B_1D_1\subset$平面$B_1CD_1$，

则有平面$A_1BD//$平面B_1CD_1，而$D_1M\subset$平面B_1CD_1，因此$D_1M//$平面A_1BD，①正确；



$CC_1\perp$平面$ABCD, BD\subset$平面$ABCD$，则$CC_1\perp BD$，而$BD\perp AC, AC\cap CC_1=C$，$AC, CC_1\subset$平面$ACC_1$，

则有$BD\perp$平面ACC_1，而$AC_1\subset$平面ACC_1，因此$AC_1\perp BD$，同理$AC_1\perp A_1B$，

$A_1B\cap BD=B, A_1B, BD\subset$平面$A_1BD$，所以$AC_1\perp$平面$A_1BD$，②正确；

由①知，平面$A_1BD//$平面B_1CD_1，由于B_1C与BD是异面直线，则点M到直线BD的距离最小值等于点B_1到平面A_1BD的距离h，

正方体棱长为1，则$S_{\triangle A_1BD}=\frac{\sqrt{3}}{4}BD^2=\frac{\sqrt{3}}{2}, S_{\triangle A_1B_1B}=\frac{1}{2}A_1B_1^2=\frac{1}{2}$，由$V_{B_1-A_1BD}=V_{D-A_1B_1B}$，

得$\frac{1}{3}S_{\triangle A_1BD}\cdot h=\frac{1}{3}S_{\triangle A_1B_1B}\cdot AD$，即$\frac{\sqrt{3}}{2}h=\frac{1}{2}$，解得$h=\frac{\sqrt{3}}{3}$，③正确；

因为$B_1C//A_1D, A_1D\subset$平面A_1AD，$B_1C\not\subset$平面A_1AD，则$B_1C//$平面A_1AD，

因此点M到平面A_1AD的距离为定值，而$\triangle A_1AD$的面积为定值，

于是三棱锥A_1-ADM的体积$V_{A_1-ADM}=V_{M-A_1AD}$为定值，④错误，

所以正确的命题的序号是①②③.

故答案为：①②③

【点睛】方法点睛：求点到平面的距离可以利用几何法，作出点到平面的垂线段求解；也可以用等体积法，求出三棱锥某个底面上的高即可.

三、解答题共 6 小题，共 85 分.解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

16.【答案】(1) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$；

(2) $c=1+2\sqrt{2}$，$S_{\triangle ABC}=4+\sqrt{2}$.

【分析】(1) 利用平方关系、正弦定理求值作答.

(2) 利用余弦定理、三角形面积公式计算作答.

【小问 1 详解】

在 $\triangle ABC$ 中，$a=4$，$b=3$，$\cos A=\dfrac{1}{3}$，则 $\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，

由正弦定理得 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$，所以 $\sin B=\dfrac{b\sin A}{a}=\dfrac{3\times\frac{2\sqrt{2}}{3}}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

【小问 2 详解】

在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，即 $16=9+c^2-2c$，而 $c>0$，解得 $c=1+2\sqrt{2}$；

$\triangle ABC$ 的面积 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}\times3\times(1+2\sqrt{2})\times\dfrac{2\sqrt{2}}{3}=4+\sqrt{2}$，

所以 $c=1+2\sqrt{2}$，$S_{\triangle ABC}=4+\sqrt{2}$.

17.【答案】(1) 见解析　(2) $\dfrac{2}{3}$

(3) 见解析

【分析】(1) 根据线面垂直即可求证面面垂直，

(2) 根据等体积法即可求解，

(3) 由中位线得线线平行，即可得到线面平行，进而可证面面平行，即可求解.

【小问 1 详解】

在正方体中，由于 $CD\perp$ 平面 ADD_1A_1, $CD\subset$ 平面 A_1DC，

所以平面 $A_1DC\perp$ 平面 ADD_1A_1

【小问 2 详解】

$$V_{F-ACA_1}=V_{A_1-ACF}=\frac{1}{3}S_{\triangle ACF}\cdot AA_1=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}AF\cdot BC\cdot AA_1=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times1\times2\times2=\frac{2}{3}$$

【小问 3 详解】

取 CD 中点为 M，连接 EM, FM，

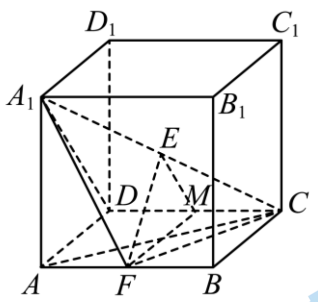
由于 E,F,M 均为中点，所以 $EM // A_1D, MF // AD$，

$ME \not\subset$ 平面 AA_1D，$A_1D \subset$ 平面 AA_1D，所以 $EM //$ 平面 AA_1D，

$MF \not\subset$ 平面 AA_1D，$AD \subset$ 平面 AA_1D，所以 $FM //$ 平面 AA_1D，

$FM \cap EM = M, FM, EM \subset$ 平面 EFM，所以平面 $EFM //$ 平面 AA_1D，

由于 $EF \subset$ 平面 EFM，所以 $EF //$ 平面 AA_1D.



18.【答案】（1）见解析　（2）$\dfrac{2\sqrt{21}}{7}$

（3）1

【分析】（1）根据线面垂直即可求证线线垂直，

（2）根据等体积法，结合棱锥的体积公式即可求解，

（3）根据线线平行可得线面平行，进而根据中位线，由线线平行的传递性即可求解.

【小问 1 详解】

连接 AC, BD 相交于 O，由于底面 $ABCD$ 是菱形，所以 $AC \perp BD$，

又 $PA \perp$ 平面 $ABCD$，$DB \subset$ 平面 $ABCD$，所以 $PA \perp DB$，

$PA \cap AC = A, PA, AC \subset$ 平面 PAC，所以 $BD \perp$ 平面 PAC，

$PC \subset$ 平面 PAC，所以 $BD \perp PC$

【小问 2 详解】

由题意可知：点 A 到平面 EBC 的距离即为点 A 到平面 PBC 的距离，

设点 A 到平面 EBC 的距离为 h，

由于 $PA = AB = AC = 2$，$PA \perp$ 平面 $ABCD$，所以 $PB = PC = \sqrt{PA^2 + AB^2} = 2\sqrt{2}$，

所以 $S_{\triangle PBC} = \dfrac{1}{2} BC \cdot \sqrt{PB^2 - \left(\dfrac{BC}{2}\right)^2} = \dfrac{1}{2} \times 2 \cdot \sqrt{\left(2\sqrt{2}\right)^2 - 1^2} = \sqrt{7}$，

$S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2} BC \cdot AB \sin 60^\circ = \dfrac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$，

$V_{A-PBC} = V_{P-ABC} \Rightarrow \dfrac{1}{3} S_{\triangle PBC} h = \dfrac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot PA \Rightarrow h = \dfrac{S_{\triangle ABC} \cdot PA}{S_{\triangle PBC}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \dfrac{2\sqrt{21}}{7}$，

【小问 3 详解】

取 PD 中点为 N，连接 AN，延长 DA，使得 $DA = AM$，连接 PM，

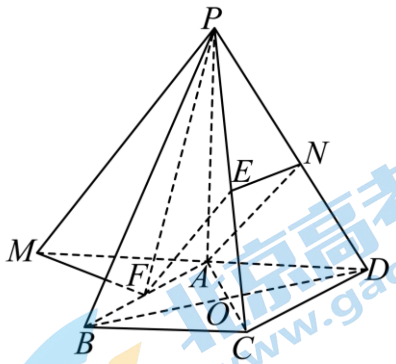
由于 E,N 均为中点，所以 $EN//CD$, 且 $EN=\frac{1}{2}CD$，

又 $AF=\frac{1}{2}AB, AB//CD, AB=CD$，所以 $EN//AF$, 且 $EN=AF$，

故四边形 $ANEF$ 为平行四边形，故 $AN//EF$，

由于 A 是 MD 的中点， N 是 PD 中点，所以 $AN//PM$，

因此 $EF//PM$，所以 P，M，E，F 四点共面，故 $\frac{AM}{AD}=1$



19. 【答案】（1） $M=4,S=7$；

（2）8；　（3）50

【分析】（1）直接列举出数列 $\{a_n\}$，即可求得 M,S；

（2）先构造数列使 $M=8$，再说明不同的等腰三角形只有 6 个，故 $M\le 6+2=8$，即可求得 M 的最大值；

（3）先构造数列使 $S=50$，再设 T 为数列的每一组连续三项的和的和，得 $3S=T+2a_1+2a_{16}+a_2+a_{15}$，列举出不同的等腰三角形，使 T 和 $2a_1+2a_{16}+a_2+a_{15}$ 最小，进而得到 $S\ge 50$，即可求解.

【小问 1 详解】

边长为 1 或 2 的等腰三角形只有 1，1，1；1，2，2；2，2，2；若前三项为 1，1，1，则该数列只有 3 项，不合题意；

若前三项为 1，2，2，该数列只有 4 项，该数列只能为 1，2，2，2；若前三项为 2，2，2，该数列只有 4 项，该数列只能为 2，2，2，1；

综上： $M=4,S=7$；

【小问 2 详解】

①构造数列：1，2，2，2，3，3，3，1，此时 $M=8$.

②当存在连续三项为 1，1，1 时，本题中有两条边为 1，1 的等腰三角形仅有 1，1，1，即数列只有 3 项，与 $M\ge 4$ 矛盾，舍去.

③当不存在连续三项为 1，1，1 时，连续三项（不考虑这三项的顺序）共以下 6 种可能：

1，2，2；1，3，3；2，2，2；2，2，3；2，3，3；3，3，3.

又相邻的 4 项组成的 2 个等腰三角形中间 2 项是共用的，则总的项数为不同的等腰三角形的个数加上首尾 2 项，所以 $M \le 6+2=8$.

④由①②③，M 的最大值为 8.

【小问 3 详解】

①构造数列：1，2，2，2，3，3，3，4，4，4，5，5，5，3，3，1，此时 $S=50$.

②设 T 为数列的每一组连续三项的和的和，则

$T=\left(a_1+a_2+a_3\right)+\left(a_2+a_3+a_4\right)+\cdots+\left(a_{13}+a_{14}+a_{15}\right)+\left(a_{14}+a_{15}+a_{16}\right)$

$=3\left(a_1+a_2+\cdots+a_{15}+a_{16}\right)-2a_1-a_2-a_{15}-2a_{16}$，即 $3S=T+2a_1+2a_{16}+a_2+a_{15}$.

③连续三项（不考虑这三项的顺序）及这三项的和（标注在下面的括号内）有以下可能：

$\underline{2,2,1(5)};2,2,2(6);2,2,3(7);$

$\underline{3,3,1(7)};3,3,2(8);3,3,3(9);\cdots;3,3,5(11);$

$\underline{4,4,1(9)};\underline{4,4,2(10)};4,4,3(11);\cdots;4,4,7(15);$

$\underline{5,5,1(11)};\underline{5,5,2(12)};5,5,3(13);\cdots;5,5,9(19);$

$\underline{6,6,1(13)};\underline{6,6,2(14)};\underline{6,6,3(15)};\cdots;6,6,11(23);$

其中画横线的连续三项不能同时满足和前一项、后一项构成 3 个等腰三角形，故必为数列的首三项或尾三项，

故其对应的三角形在 14 个三角形中至多出现两个.

④由③，要使 S 最小，则使 T 和 $2a_1+2a_{16}+a_2+a_{15}$ 最小，在画横线的连续三项中取和最小的 2 组，

在没画横线的连续三项中取合最小的 12 组，同时令 $a_1=1,a_{16}=1,a_2=2,a_{15}=3$，

则 $T\ge(5+7)+(6+7+8+9+10+11+11+12+13+13+14+14)=140$，

$2a_1+2a_{16}+a_2+a_{15}\ge 2\times1+2\times1+2+3=9$，又由②，$3S\ge140+9=149$，

所以 $S\ge50$.

⑤由①④，S 的最小值为 50.

【点睛】本题关键点在于设 T 为数列的每一组连续三项的和的和，得 $3S=T+2a_1+2a_{16}+a_2+a_{15}$，将 S 最小，转化为 T 和 $2a_1+2a_{16}+a_2+a_{15}$ 最小，列举出不同的等腰三角形，使 T 和 $2a_1+2a_{16}+a_2+a_{15}$ 最小，进而得到 $S\ge50$，再构造数列使 $S=50$ 即可求解.