2019 北京大兴区高三（上）期末

数　　学（文）

本试卷共 4 页，150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第一部分（选择题　共 40 分）

一、选择题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目　　要求的一项。

（1）设集合 $A=\{x\in\mathbf{R}\,|\,x>2\}$， $B=\{x\in\mathbf{R}\,|\,x^2-3x\leqslant 0\}$，则 $A\cap B$ 等于

（A） $[0,+\infty)$　　（B） $(2,+\infty)$

（C） $(2,3]$　　（D） $[0,2)$

（2）已知 $a>b>0$，则下列不等式成立的是

（A） $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$　　（B） $\sqrt{a}>\sqrt{b}$

（C） $\lg a<\lg b$　　（D） $2^{-a}>2^{-b}$

（3）在复平面内，复数 z 对应的点的坐标为 $(2,-1)$，则 $(1+\mathrm{i})z$ 等于

（A） $3+\mathrm{i}$　　（B） $2+\mathrm{i}$

（C） $1+\mathrm{i}$　　（D） $1-\mathrm{i}$

（4）执行如图所示的程序框图，若输出的 S 的值为 $\frac{4}{5}$，则输入 i 的值为

（A） 4

（B） 5

（C） 6

（D） 7

（5）已知奇函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的增函数，则“ $a+b>0$ ”是“ $f(a)+f(b)>0$ ”的

（A）充分而不必要条件　　（B）必要而不充分条件

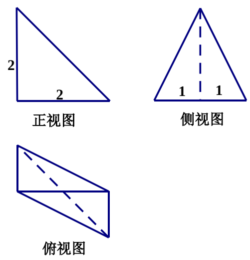
（C）充分必要条件　　（D）既不充分也不必要条件

（6）已知向量 $\boldsymbol{i}=(1,0)$， $\boldsymbol{j}=(0,1)$，若 $|\boldsymbol{a}|=1$，则 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{i})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{j})$ 的最大值为

（A） 3　　（B） $\sqrt{2}-1$

（C） 2　　（D） $\sqrt{2}+1$

（7）某三棱锥的三视图如图所示，则该三棱锥的体积为



（A） $\frac{2}{3}$

（B） $\frac{4}{3}$

（C） $\frac{8}{3}$

（D） 2

（8）A、B 两种品牌各三种车型 2017 年 7 月的销量环比(与 2017 年 6 月比较)增长率如下表：

A 品牌车型	A_1	A_2	A_3
环比增长率	-7.29%	10.47%	14.70%

B 品牌车型	B_1	B_2	B_3
环比增长率	-8.49%	-28.06%	13.25%

根据此表中的数据，有如下关于 7 月份销量的四个结论:

①A_1 车型销量比 B_1 车型销量多；

②A 品牌三种车型总销量环比增长率可能大于 14.70%；

③B 品牌三款车型总销量环比增长率可能为正；

④A 品牌三种车型总销量环比增长率可能小于 B 品牌三种车型总销量环比增长率.

其中正确结论的个数是

（A） 1　　（B） 2　　（C） 3　　（D） 4

第二部分（非选择题　共 110 分）

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。

（9）　抛物线 $x^2=y$ 的焦点到准线的距离等于_______.

（10）在 ΔABC 中，已知 $a^2+b^2=c^2-\sqrt{2}ab$，则 $\angle C=$ ________.

（11）若 x， y 满足 $\begin{cases} y\geqslant 0, \\ x-y+1\geqslant 0, \\ x+y-1\leqslant 0, \end{cases}$ 则 $z=x-2y$ 的最大值为______.

（12）能说明“如果$\{a_n\}$是等比数列，那么a_1+a_2,a_3+a_4,a_5+a_6仍为等比数列”为假命题的$\{a_n\}$的一个通项公式为_______.

（13）直线$l:y=kx+k$与圆$C:(x-1)^2+y^2=1$交于A，B两点，当ΔABC的面积最大时，k的值为________.

（14）设函数$f(x)=\begin{cases}-|x|(x+2), x\leqslant a,\\ \ln x, \quad x>a.\end{cases}$ ①若$a=1$，则$f(x)$的零点有_____个；

②若$f(x)$的值域为$[-1,+\infty)$，则实数a的取值范围是__________.

三、解答题共 6 小题，共 80 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

（15）（本小题 13 分）

已知函数$f(x)=\sin x\cos x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}(\cos^2 x-\sin^2 x)$.

（Ⅰ）求$f(x)$的最小正周期；

（Ⅱ）求$f(x)$在区间$[-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{4}]$上的最大值和最小值.

（16）（本小题 13 分）

已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$a_{n+1}=3a_n$，数列$\{b_n\}$满足$b_1=1$，且$\{a_n+b_n\}$是公差为 2 的等差数列.

（Ⅰ）求$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式；

（Ⅱ）求$\{b_n\}$的前n项和S_n.

（17）（本小题 13 分）

自由购是一种通过自助结算购物的形式．某大型超市为调查顾客自由购的使用情况，随机抽取了 100 人，调查结果整理如下：

	20 以下	[20, 30)	[30, 40)	[40, 50)	[50, 60)	[60, 70]	70 以上
使用人数	3	12	17	6	4	2	0
未使用人数	0	0	3	14	36	3	0

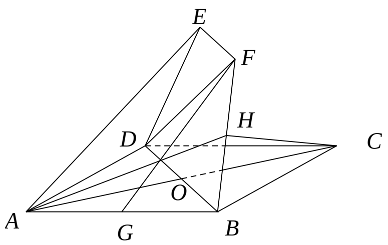
（Ⅰ）现随机抽取 1 名顾客，试估计该顾客年龄在$[30,50)$且未使用自由购的概率；

（Ⅱ）从被抽取的年龄在$[50,70]$使用的自由购顾客中，随机抽取 2 人进一步了解情况，求这 2 人年龄都在$[50,60)$的概率；

（Ⅲ）为鼓励顾客使用自由购，该超市拟对使用自由购顾客赠送 1 个环保购物袋．若某日该超市预计有 5000 人购物，试估计该超市当天至少应准备多少个环保购物袋？

（18）（本小题 14 分）

如图，正方形 $ABCD$ 和梯形 $BDEF$ 所在的平面互相垂直，$EF\,//\,BD$，$EF=\dfrac{1}{2}BD$，AC 与 BD 交于点 O，G，H 分别为线段 AB，BF 的中点．



（Ⅰ）求证：$AC\perp BF$；

（Ⅱ）求证：$GF\,//$ 平面 ADE；

（Ⅲ）若 $DF\perp BF$，求证：平面 $AHC\perp$ 平面 BGF．

（19）（本小题 13 分）

已知函数 $f(x)=x^3-ax+\dfrac{1}{4}$．

（Ⅰ）若 x 轴为曲线 $y=f(x)$ 的切线，求 a 的值；

（Ⅱ）求函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最大值和最小值．

（20）（本小题 14 分）

已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{1}{2}$，左顶点为 $A(-2,0)$，过椭圆 C 的右焦点 F 作互相垂直的两条直线 l_1 和 l_2，分别交直线 $l:x=4$ 于 M，N 两点．

（Ⅰ）求椭圆 C 的方程；

（Ⅱ）求 ΔFMN 的面积的最小值；

（Ⅲ）设直线 AM 与椭圆 C 的另一个交点为 P，椭圆 C 的右顶点为 B，求证：P，B，N 三点共线．

数学试题答案

一、选择题（共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	C	B	A	B	C	D	A	B

二、填空题（共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分）

（9）$\frac{1}{2}$

（10）$\frac{3\pi}{4}$

（11）1

（12）$a_n=(-1)^n$（答案不唯一，满足公比为-1均可）

（13）$\pm\frac{\sqrt{7}}{7}$　（只写一个且正确给 3 分）

（14）2 ；$[\frac{1}{e},\sqrt{2}-1]$（第一个空 3 分，第二个空 2 分）

三、解答题（共 6 小题，共 80 分）

（15）（共 13 分）

解：（Ⅰ）因为 $f(x)=\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x$　……4 分

$=\sin(2x+\frac{\pi}{3})$，　……5 分

所以 $f(x)$ 的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$.　……7 分

（Ⅱ）因为 $x\in[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}]$ ，所以 $2x+\frac{\pi}{3}\in[0,\frac{5\pi}{6}]$.　……2 分

所以当 $2x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$，即 $x=\frac{\pi}{12}$ 时，$f(x)$ 取得最大值为1，　……4 分

当 $2x+\frac{\pi}{3}=0$，即 $x=-\frac{\pi}{6}$ 时，$f(x)$ 取得最小值为0.　……6 分

（16）（共 13 分）

解：（Ⅰ）由 $a_1=1$，$a_{n+1}=3a_n$，

$\{a_n\}$ 是首项为1，公比为3的等比数列.　……1 分

所以 $a_n=3^{n-1}$.　……2 分

因为 $a_1+b_1=2$，　……3 分

所以$\{a_n+b_n\}$ 是首项为2，公差为2的等差数列.

可得 $a_n+b_n=2+(n-1)\times 2=2n$.　　　　……5 分

所以 $b_n=2n-3^{n-1}$.　　　　……6 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）知， $b_n=2n-3^{n-1}$.

数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为

$S_n=b_1+b_2+b_3+\cdots\cdots+b_n$

$=(2\times 1-3^0)+(2\times 2-3^1)+(2\times 3-3^2)+\cdots\cdots+(2\times n-3^{n-1})$　　……1 分

$=2\times(1+2+3+\cdots+n)-(3^0+3^1+3^2+\cdots 3^{n-1})$　　……2 分

$=2\times\dfrac{n(n+1)}{2}-\dfrac{1\cdot(1-3^n)}{1-3}$　　……6 分

$=n(n+1)-\dfrac{3^n-1}{2}$.　　……7 分

（17）（共 13 分）

解：（Ⅰ）随机抽取的 100 名顾客中，

年龄在[30, 50)且未使用自由购的有 3+14=17 人，

……1 分

所以随机抽取一名顾客，该顾客年龄在[30, 50)且未参加自由购的概率估计为

$P=\dfrac{17}{100}$.　　……3 分

（Ⅱ）设事件 A 为“这 2 人年龄都在 $[50,60)$ ”.　　……1 分

被抽取的年龄在 $[50,60)$ 的 4 人分别记为 a_1，a_2，a_3，a_4，

被抽取的年龄在 $[60,70]$ 的 2 人分别记为 b_1，b_2 ，

从被抽取的年龄在 $[50,70]$ 的自由购顾客中随机抽取 2 人

共包含 15 个基本事件，　　……2 分

分别为 a_1a_2，a_1a_3，a_1a_4，a_1b_1，a_1b_2，a_2a_3，a_2a_4，a_2b_1，a_2b_2，

a_3a_4，a_3b_1，a_3b_2，a_4b_1，a_4b_2，b_1b_2，　　……3 分

事件 A 包含 6 个基本事件，　　……4 分

分别为 a_1a_2，a_1a_3，a_1a_4，a_2a_3，a_2a_4，a_3a_4，　　……5 分

则 $P(A)=\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$.　　　　……7 分

（III）随机抽取的 100 名顾客中，使用自由购的有 $3+12+17+6+4+2=44$ 人，

……1 分

所以该超市当天至少应准备环保购物袋的个数估计为

$\frac{44}{100}\times 5000=2200$.　　　　……3 分

（18）（共 14 分）

解：（Ⅰ）因为 $ABCD$ 为正方形，所以 $AC\perp BD$.　　　　……1 分

又因为平面 $ABCD\perp$ 平面 $BDEF$，

平面 $ABCD\cap$ 平面 $BDEF=BD$，

所以 $AC\perp$ 平面 $BDEF$.　　　　……3 分

又因为 $BF\subset$ 平面 $BDEF$，

所以 $AC\perp BF$.　　　　……4 分

（Ⅱ）方法一：取 AD 中点 M，连接 ME，MG，

在 ΔABD 中，G，M 分别为 AB，AD 的中点，

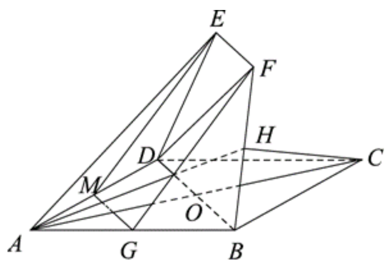
所以 $GM\ /\!/\ BD$ 且 $GM=\frac{1}{2}BD$.　　　　……1 分

又因为 $EF\ /\!/\ BD$ 且 $EF=\frac{1}{2}BD$，

所以 $GM\ /\!/\ EF$ 且 $GM=EF$.　　　　……2 分

所以四边形 $GMEF$ 为平行四边形.

所以 $GF\ /\!/\ ME$.　　　　……3 分



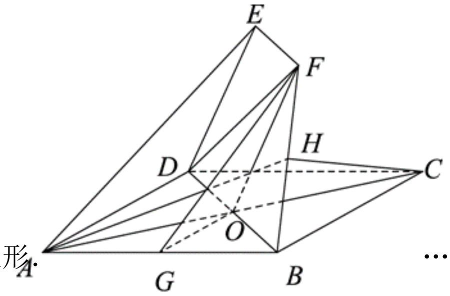
因为 $ME\subset$ 平面 ADE，

$GF\not\subset$ 平面 ADE，　　　　……4 分

所以 $GF\ /\!/$ 平面 ADE.　　　　……5 分

方法二：

连接 OF， OG，



因为 $EF \parallel BD$ 且 $EF = \frac{1}{2}BD$，

所以 $EF \parallel OD$ 且 $EF = OD$.

所以四边形 $DOFE$ 为平行四边形. ……1 分

所以 $OF \parallel DE$.

因为 $DE \subset$ 平面 ADE，

$OF \not\subset$ 平面 ADE，

所以 $OF \parallel$ 平面 ADE. ……2 分

因为 O， G 分别为 BD， AB 的中点，

所以 $OG \parallel AD$.

又因为 $OG \not\subset$ 平面 ADE， $AD \subset$ 平面 ADE，

所以 $OG \parallel$ 平面 ADE. ……3 分

因为 $OG \cap OF = O$，

所以平面 $GOF \parallel$ 平面 ADE. ……4 分

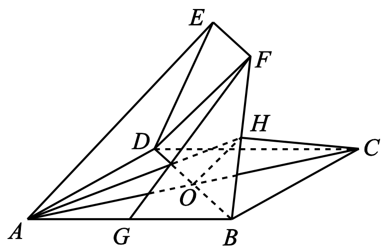
因为 $GF \subset$ 平面 OGF，

所以 $GF \parallel$ 平面 ADE. ……5 分

（III）连接 OH，

在 ΔBDF 中， O， H 分别为 BD， BF 的中点，

所以 $OH \parallel DF$. ……1 分



因为 $DF \perp BF$，

所以 $OH \perp BF$. ……2 分

因为 $BF \perp AC$，

$AC \cap OH = O$，

$AC \subset$ 平面 AHC， $OH \subset$ 平面 AHC，

所以 $BF \perp$ 平面 AHC． ……4 分

因为 $BF \subset$ 平面 BGF，

所以平面 $AHC \perp$ 平面 BGF． ……5 分

（19）（共 13 分）

解：（Ⅰ）由于 x 轴为 $y = f(x)$ 的切线，设切点坐标为 $(x_0, 0)$， ……1 分

则 $x_0^{\ 3} - ax_0 + \frac{1}{4} = 0$， ……① ……2 分

又 $f'(x_0) = 0$，即 $3x_0^{\ 2} - a = 0$， ……② ……3 分

②代入①，解得 $x_0 = \frac{1}{2}$，

所以 $a = \frac{3}{4}$． ……4 分

（Ⅱ） $f'(x) = 3x^2 - a$，

（1）当 $a \leqslant 0$ 时， $f'(x) \geqslant 0$， $f(x)$ 在 $[0,1]$ 单调递增， ……1 分

所以 $x = 0$ 时， $f(x)$ 取得最小值 $\frac{1}{4}$．

$x = 1$ 时， $f(x)$ 取得最大值 $\frac{5}{4} - a$． ……3 分

（2）当 $a \geqslant 3$ 时， $f'(x) < 0$， $f(x)$ 在 $[0,1]$ 单调递减， ……4 分

所以， $x = 1$ 时， $f(x)$ 取得最小值 $\frac{5}{4} - a$．

$x = 0$ 时， $f(x)$ 取得最大值 $\frac{1}{4}$．

（3）当 $0 < a < 3$ 时，令 $f'(x) = 0$，解得 $x = \sqrt{\frac{a}{3}}$， ……5 分

x， $f'(x)$， $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 的变化情况如下：

x	$(0,\sqrt{\frac{a}{3}})$	$\sqrt{\frac{a}{3}}$	$(\sqrt{\frac{a}{3}},1)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	单调递减↗	极小值	单调递增↘

由上表可知，当 $x=\sqrt{\frac{a}{3}}$ 时， $f(x)$ 取得最小值 $\frac{1}{4}-\frac{2a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}}$； ……7 分

由于 $f(0)=\frac{1}{4}$， $f(1)=\frac{5}{4}-a$，

当 $0<a<1$ 时， $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得最大值 $\frac{5}{4}-a$， ……8 分

当 $1\leqslant a<3$ 时， $f(x)$ 在 $x=0$ 处取得最大值 $\frac{1}{4}$. ……9 分

（20）（共 14 分）

解：（Ⅰ）由题意 $a=2$， ……1 分

离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$，所以 $c=1$. ……2 分

所以 $b^2=a^2-c^2=3$. ……3 分

所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. ……4 分

（Ⅱ）$F(1,0)$，由题意，设 $l_1:y=k(x-1)$， $l_2:y=-\frac{1}{k}(x-1)$， ……1 分

令 $x=4$ 得： $M(4,3k)$， $N(4,-\frac{3}{k})$， ……2 分

所以 $|MN|=|3k-(-\frac{3}{k})|=3|k+\frac{1}{k}|$.

设 d 为点 F 到直线 l 的距离，则 ΔFMN 的面积为

$$S=\frac{1}{2}\times|MN|\times d=\frac{9}{2}|k+\frac{1}{k}|$$ ……3 分

$$=\frac{9}{2}(|k|+\frac{1}{|k|})\geqslant\frac{9}{2}\times2\sqrt{|k|\times\frac{1}{|k|}}=9.$$ ……4 分

当且仅当 $|k|=\dfrac{1}{|k|}$，

即 $k=\pm1$ 时，ΔFMN 的面积的最小值为 9．　　……5 分

（III）直线 AM 的方程为 $y=\dfrac{k}{2}(x+2)$，　　……1 分

由 $\begin{cases} y=\dfrac{k}{2}(x+2) \\ 3x^2+4y^2=12 \end{cases}$ 消元，得

$3x^2+k^2(x+2)^2=12$ ，　　……2 分

即 $(3+k^2)x^2+4k^2x+4k^2-12=0$，

设 $P(x_P,y_P)$，则 $-2x_p=\dfrac{4k^2-12}{3+k^2}$，

所以 $x_p=\dfrac{6-2k^2}{3+k^2}$．

所以 $P(\dfrac{6-2k^2}{3+k^2},\dfrac{6k}{3+k^2})$．　　……3 分

又 $B(2,0)$，$N(4,-\dfrac{3}{k})$，

所以 $k_{BP}-k_{BN}=\dfrac{\dfrac{6k}{3+k^2}}{\dfrac{6-2k^2}{3+k^2}-2}-\dfrac{-\dfrac{3}{k}-0}{4-2}=\dfrac{6k}{-4k^2}+\dfrac{3}{2k}=0.$　　……4 分

所以 $k_{BP}=k_{BN}$，所以 P,B,N 三点共线．　　……5 分