

人大附中 2020 届高三上学期数学统练四

一、选择题（共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项）。

1. 已知集合 $U = \mathbb{R}$, $M = \{x | x \leq 1\}$, $P = \{x | x \geq 2\}$, 则 $C_U(M \cup P) =$ 【 】

A. $\{x | 1 < x < 2\}$ B. $\{x | x \geq 1\}$

C. $\{x | x \leq 2\}$ D. $\{x | x > 1\}$

2. 设命题 $P: \exists n \in \mathbb{N}, n^2 > 2^n$, 则 $\neg P$ 为 【 】

A. $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 > 2^n$ B. $\exists n \in \mathbb{N}, n^2 \leq 2^n$

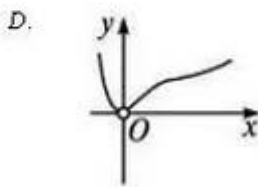
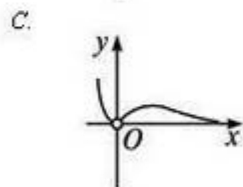
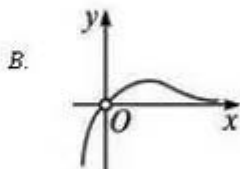
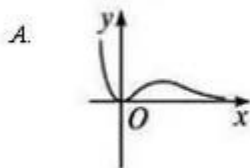
C. $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 \leq 2^n$ D. $\exists n \in \mathbb{N}, n^2 = 2^n$

3. 若 $\alpha = k \cdot 180^\circ + 45^\circ (k \in \mathbb{Z})$, 则 α 在 【 】

A. 第一或第三象限 B. 第一或第二象限

C. 第二或第四象限 D. 第三或第四象限

4. 函数 $y = \frac{x^3}{3^x - 1}$ 的图像大致是 【 】



5. 已知二次函数 $f(x) = ax^2 + bx$, 则“ $f(2) \geq 0$ ”是“函数 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上为增函数”的 【 】

A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件

C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

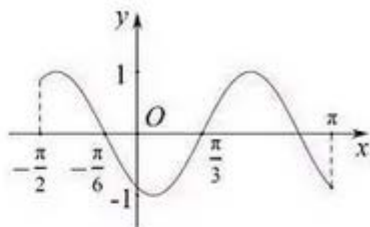
6. 函数 $y = f(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{2}, \pi]$ 上的简图如右图所示, 则函数 $y = f(x)$ 的解析式可以是 **【 】**

A. $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$

B. $f(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$

C. $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

D. $f(x) = \sin\left(x - \frac{2\pi}{3}\right)$



7. 先把函数 $y = \cos x$ 的图像上所有点先向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位, 再把所有点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍 (纵坐标不变), 得到的函数图形的解析式为 **【 】**

A. $f(x) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$

B. $f(x) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$

C. $f(x) = \cos\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{3}\right)$

D. $f(x) = \cos\left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{3}\right)$

8. 若 m 是函数 $f(x) = \sqrt{x} - 2^x + 2$ 的一个零点, 若 $x_1 \in (0, m)$, $x_2 \in (m, +\infty)$, 则 $f(x_1), f(x_2), f(m)$ 的大小关系是 **【 】**

A. $f(x_1) < f(x_2) < f(m)$

B. $f(m) < f(x_2) < f(x_1)$

C. $f(m) < f(x_1) < f(x_2)$

D. $f(x_2) < f(m) < f(x_1)$

二、填空题 (共 6 小题, 每小题 5 分, 共 30 分)

9. $\cos 40^\circ \cos 20^\circ - \sin 40^\circ \sin 20^\circ$ 的值等于_____.

10. 已知函数 $y = \sqrt{3-x}$ 的定义域为 F , 函数 $y = \lg(x-1) + \lg(x-2)$ 的定义域为 G , 那么 $F \cap G =$ _____.

11. $\log_2 20 - \log_2 5 + \log_3 4 \cdot \log_4 3 =$ _____.

12. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbb{R} , $f(x+1)$ 为偶函数, 当 $x \leq 1$ 时, $f(x) = 2x^2 - x$, 则函数 $f(x)$ 的单调递减区间是_____.

13. 已知 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$, (其中 $\omega > 0$) 在 $\left(0, \frac{\pi}{3}\right)$ 上单调递增, 且 $f\left(\frac{\pi}{6}\right) + f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0, f(0) = -1$.
则 $\omega =$ _____.

14. 已知函数 $y = f(x)$, 若对于任意 $x \in R$, $f(2x) = 2f(x)$ 恒成立, 则称函数 $y = f(x)$ 具有性质 P .

(1) 若函数 $y = f(x)$ 具有性质 P , 且 $f(4) = 8$, 则 $f(1) =$ _____.

(2) 若函数 $y = f(x)$ 具有性质 P , 且在 $(1, 2]$ 上的解析式为 $y = \cos x$, 那么 $y = f(x)$ 在 $(1, 8]$ 上有且仅有 _____ 个零点.

三、解答题共 3 小题, 共 30 分. 解答应写出文字说明, 演算步骤或证明过程.

15. (本小题满分 13 分) 已知函数 $f(x) = 2\sin x \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - 2\sin^2 x + 1 (x \in R)$

(1) 求函数 $f(x)$ 的最小正周期及函数 $f(x)$ 的单调递增区间;

(II) 若 $f\left(\frac{x_0}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{3}$, $x_0 \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$, 求 $\cos 2x_0$ 的值.

16. (本小题满分 13 分) 已知 $\triangle ABC$ 中, $c = 6$, $\angle C = \frac{\pi}{2}$, 且 $a \cos B = b \sin A$.

(1) 求 $\angle B$ 的值;

(II) 若点 E, P 分别在边 AB, BC 上, 且 $AE = 4$, $AP \perp CE$, 求 AP 的长;

17. (本小题满分 14 分) 已知函数 $f(x) = a \ln x + x^2 - 10x$ 在 $x = 2$ 处取得极值.

(1) 求 a 的值;

(II) 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(III) 当直线 $y = b$ 与函数 $y = f(x)$ 的图像有 3 个交点时, 求 b 的取值范围.

18.(本小题满分 13 分)某商场销售某种商品的经验表明,该商品每日的销售量 y (单位:千克)与销售价格 x (单

位:元/千克)满足关系式 $y = \frac{a}{x-3} + 10(x-6)^2$, 其中 $3 < x < 6$, a 为常数, 已知销售价格为 5 元/千克时,

每日可售出该商品 11 千克.

(I)求 a 的值

(II)若该商品的成品为 3 元/千克, 试确定销售价格 x 的值, 使商场每日销售该商品所获得的利润最大

19.(本小题满分 13 分)已知函数 $f(x) = e^x - ax + a - 1, a \in R$.

(I)若 $f(x)$ 的极值为 $e-1$, 求 a 的值:

(II)若 $x \in [a, +\infty)$, $f(x) \geq 0$ 恒成立, 求 a 的取值范围