2020年全国统一高考数学试卷（江苏卷）

一、填空题：本题共14小题，每小题5分，共70分。

1．已知集合 $B=\{0,2,3\}$， $A=\{-1,0,1,2\}$ 则 $A\cap B$________.

【答案】：$\{0,2\}$

2．已知 i 是虚数单位，则复数 $z=(1+i)(2-i)$ 的实部是________.

【答案】：3

【解析】：$z=(1+i)(2-i)=3+i$, 则实部为 3.

3．已知一组数据 $4,2a,3-a,5,6$ 的平均数为 4，则 a 的值是________.

【答案】：2

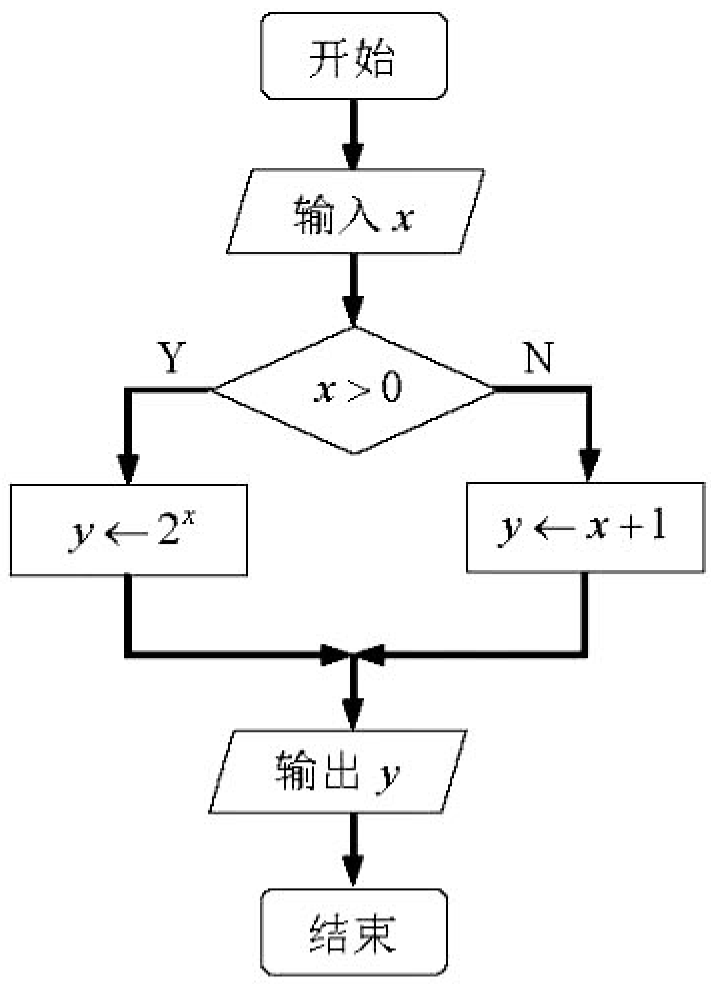
【解析】：由 $\dfrac{4+2a+(3-a)+5+6}{5}=4$ 可知 $a=2$.

4．将一颗质地均匀的正方体骰子先后抛掷 2 次，观察向上的点数，则点数和为 5 的概率是________.

【答案】：$\dfrac{1}{9}$

【解析】：总事件数为 $6\times6=36$，满足条件的事情为 $(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)$ 为共 4 种，则点数和为 5 的概率为 $\dfrac{4}{36}=\dfrac{1}{9}$.

5．右图是一个算法流程图，若输出 y 值为 -2，则输入 x 的值是________.



（第 5 题）

【答案】：-3

【解析】：由题可知 $y=\begin{cases}2^x, x>0,\\ x+1, x\le 0,\end{cases}$ 当 $y=-2$ 时得 $x+1=-2$，则 $x=-3$.

6．在平面直角坐标系 xOy 中，若双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{5}=1(a>0)$ 的一条渐近线方程为 $y=\frac{\sqrt{5}}{2}x$，则该双曲线的离心率是________.

【答案】：$\frac{3}{2}$

【解析】：由 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{5}=0$ 得渐近线方程为 $y=\pm\frac{\sqrt{5}}{a}x$，又 $a>0$，

则 $a=2, c^2=a^2+5=9, c=3$，得离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{3}{2}$.

7．已知 $y=f(x)$ 是奇函数，当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)=x^{\frac{2}{3}}$，则 $f(-8)$ 的值是________.

【答案】：-4

【解析】：$y=f(x)$ 是奇函数，当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)=x^{\frac{2}{3}}$，则 $f(-8)=-f(8)=-8^{\frac{2}{3}}=-4$.

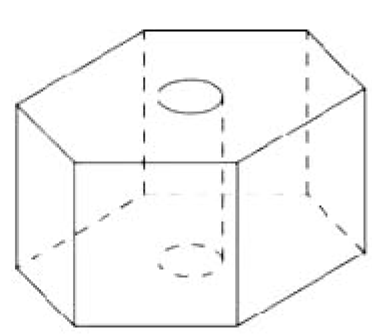
8．已知 $\sin^2(\frac{\pi}{4}+\alpha)=\frac{2}{3}$，则 $\sin 2\alpha$ 的值是________.

【答案】：$\frac{1}{3}$

【解析】：因为 $\sin^2(\frac{\pi}{4}+\alpha)=\frac{2}{3}$，由 $\sin^2(\frac{\pi}{4}+\alpha)=\frac{1}{2}(1-\cos(\frac{\pi}{2}+2\alpha))=\frac{1}{2}(1+\sin 2\alpha)=\frac{2}{3}$

解得 $\sin 2\alpha=\frac{1}{3}$.

9．如图，六角螺帽毛坯是由一个正六棱柱挖去一个圆柱所构成的．已知螺帽的底面正六边形边长为 $2cm$，高为 $2cm$，内孔半径为 $0.5cm$，则此六角螺帽毛坯的体积是 cm^3.



（第 9 题）

【答案】：$12\sqrt{3}-\frac{\pi}{2}$

【解析】：记此六角螺帽毛坯的体积为 V，正六棱柱的体积为 V_1，内孔的体积为正六棱柱的体积为 V_2，则 $V_1=6\times\frac{1}{2}\times 2\times 2\times\sin 60^\circ\times 2=12\sqrt{3}$，$V_2=\pi\times(0.5)^2\times 2=\frac{\pi}{2}$，

所以 $V=V_1-V_2=12\sqrt{3}-\frac{\pi}{2}$.

10．将函数 $y=3\sin(2x+\frac{\pi}{4})$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度，则平移后的图象中与 y 轴最近的对称轴的方程是________．

【答案】：$x=-\frac{5\pi}{24}$(微信公众号 数学研讨 独家解析)

【解析】：因为 $f(x)=3\sin(2x+\frac{\pi}{4})$，将函数 $f(x)=3\sin(2x+\frac{\pi}{4})$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度得 $g(x)=f(x-\frac{\pi}{6})=3\sin(2x-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4})=3\sin(2x-\frac{\pi}{12})$，

则 $y=g(x)$ 的对称轴为 $2x-\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$，即 $x=\frac{7\pi}{24}+\frac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$

$k=0$ 时，$x=\frac{7\pi}{24}$，$k=-1$ 时，$x=-\frac{5\pi}{24}$，

所以平移后的图象中与 y 轴最近的对称轴的方程是 $x=-\frac{5\pi}{24}$．

11．设 $\{a_n\}$ 是公差为 d 的等差数列，$\{b_n\}$ 是公比为 q 的等比数列．已知 $\{a_n+b_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=n^2-n+2^n-1(n\in\mathbf{N}^*)$，则 $d+q$ 的值是________．

【答案】：3(微信公众号 数学研讨 独家解析)

【解析】：因为 $\{a_n+b_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=n^2-n+2^n-1(n\in\mathbf{N}^*)$，

当 $n=1$ 时，$a_1+b_1=1$，

当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n+b_n=S_n-S_{n-1}=2n-2+2^{n-1}$，

所以 $a_2+b_2=4$，从而有 $d+q=(a_2+b_2)-(a_1+b_1)=3$．

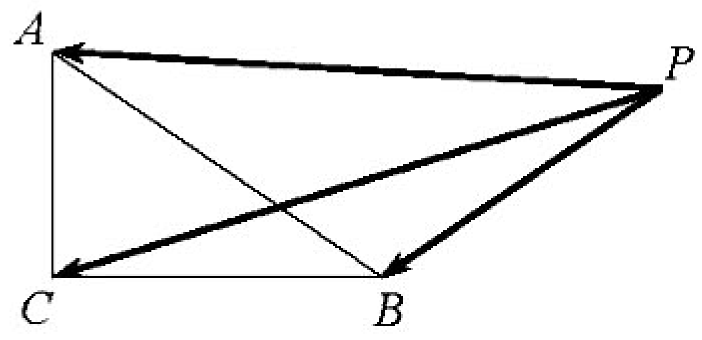
12．已知 $5x^2y^2+y^4=1$（x，$y\in\mathbf{R}$），则 x^2+y^2 的最小值是________．

【答案】：$\frac{4}{5}$(微信公众号 数学研讨 独家解析)

【解析】：$4=(5x^2+y^2)\cdot 4y^2\leqslant\left[\frac{(5x^2+y^2)+4y^2}{2}\right]^2=\frac{25}{4}(x^2+y^2)^2$，故 $x^2+y^2\geqslant\frac{4}{5}$，

当且仅当 $5x^2+y^2=4y^2=2$，即 $x^2=\frac{3}{10}$，$y^2=\frac{1}{2}$ 时取 $\left\{x^2+y^2\right\}_{\min}=\frac{4}{5}$．

13．在 $\triangle ABC$ 中，$AB=4$，$AC=3$，$\angle BAC=90^\circ$，D 在边 BC 上，延长 AD 到 P，使得 $AP=9$．若 $\overrightarrow{PA}=m\overrightarrow{PB}+\left(\frac{3}{2}-m\right)\overrightarrow{PC}$（$m$ 为常数），则 CD 的长度是________．



（第 13 题）

【答案】：$\dfrac{18}{5}$(微信公众号 数学研讨 独家解析)

【解析】：由向量系数$m+\left(\dfrac{3}{2}-m\right)=\dfrac{3}{2}$为常数，结合等和线性质可知$\dfrac{|\overrightarrow{PA}|}{|\overrightarrow{PD}|}=\dfrac{\frac{3}{2}}{1}$，

故$PD=\dfrac{2}{3}PA=6$，$AD=PA-PD=3=AC$，故$\angle C=\angle CDA$，故$\angle CAD=\pi-2C$；

在$\triangle ABC$中，$\cos C=\dfrac{AC}{BC}=\dfrac{3}{5}$；在$\triangle ADC$，由正弦定理$\dfrac{CD}{\sin\angle CAD}=\dfrac{AD}{\sin C}$，

即$CD=\dfrac{\sin(\pi-2C)}{\sin C}\cdot AD=\dfrac{\sin 2C}{\sin C}\cdot AD=2\cos C\cdot AD=2\times\dfrac{3}{5}\times 3=\dfrac{18}{5}$.

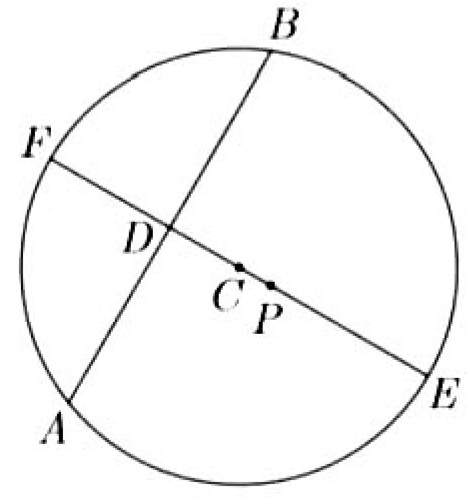
14. 在平面直角坐标系xOy中，已知$P(\dfrac{\sqrt{3}}{2}，0)$，A、B是圆C：$x^2+(y-\dfrac{1}{2})^2=36$上的两个动点，满足$PA=PB$，则$\triangle PAB$面积的最大值是________.

【答案】：$10\sqrt{5}$(微信公众号 数学研讨 独家解析)

【解析】：如图，作PC所在直径EF，交AB于点D，则：

$\because PA=PB$，$CA=CB=R=6$，$\therefore PC\perp AB$，EF为垂径.

要使面积$S_{\triangle PAB}$最大，则P、D位于C两侧，并设$CD=x$，



计算可知$PC=1$，故$PD=1+x$，$AB=2BD=2\sqrt{36-x^2}$，

故$S_{\triangle PAB}=\dfrac{1}{2}AB\cdot PD=(1+x)\sqrt{36-x^2}$，

令$x=6\cos\theta$，$S_{\triangle PAB}=(1+x)\sqrt{36-x^2}=(1+6\cos\theta)\cdot 6\sin\theta=6\sin\theta+18\sin 2\theta$，$0<\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}$，

记函数$f(\theta)=6\sin\theta+18\sin 2\theta$，则$f'(\theta)=6\cos\theta+36\cos 2\theta=6(12\cos^2\theta+\cos\theta-6)$，

令$f'(\theta)=6(12\cos^2\theta+\cos\theta-6)=0$，解得$\cos\theta=\dfrac{2}{3}$（$\cos\theta=-\dfrac{3}{4}<0$舍去）

显然，当$0\leqslant\cos\theta<\dfrac{2}{3}$时，$f'(\theta)<0$，$f(\theta)$单调递减；

当$\dfrac{2}{3}<\cos\theta<1$时，$f'(\theta)>0$，$f(\theta)$单调递增；

结合$\cos\theta$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$递减，故$\cos\theta=\frac{2}{3}$时$f(\theta)$最大，此时$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\frac{\sqrt{5}}{3}$，

故$f(\theta)_{\max}=6\times\frac{\sqrt{5}}{3}+36\times\frac{\sqrt{5}}{3}\times\frac{2}{3}=10\sqrt{5}$，即$\triangle PAB$面积的最大值是$10\sqrt{5}$.

（注：实际上可设$\angle BCD=\theta$，利用直角$\triangle BCD$可更快速计算得出该面积表达式）

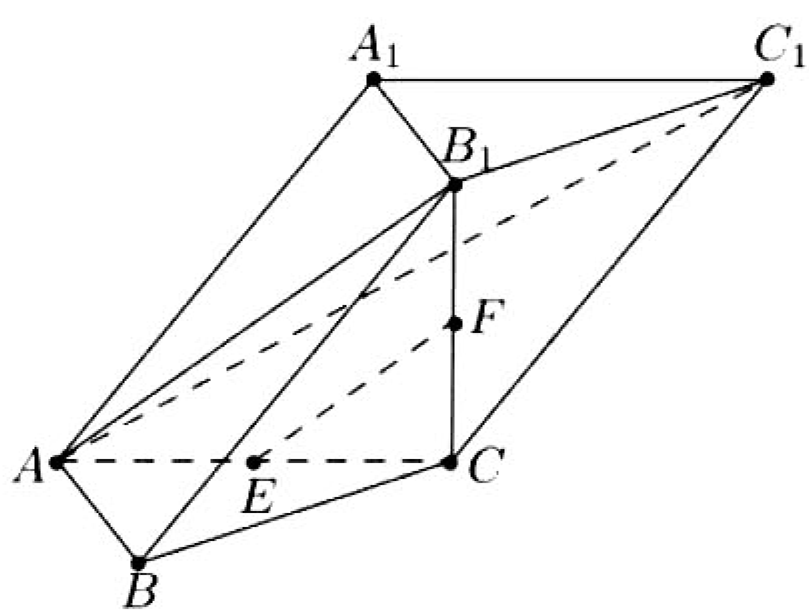
二、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15.（14 分）

在三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$AB\perp AC$，$B_1C\perp$平面ABC，E，F分别是AC，B_1C的中点.

（1）求证：EF//平面AB_1C_1；

（2）求证：平面$AB_1C\perp$平面ABB_1.



（第 15 题）

【解析】:（1）因为E，F分别是AC，B_1C的中点，

所以$EF//AB_1$，

因为$EF\not\subset$平面AB_1C_1，$AB_1\subset$平面AB_1C_1，

所以EF//平面AB_1C_1.

（2）因为$B_1C\perp$平面ABC，$AB\subset$面ABB_1，

所以$B_1C\perp AB$，

又因为$AB\perp AC$，$AC\cap B_1C=C$，$AC\subset$面AB_1C，$B_1C\subset$面AB_1C，

所以$AB\perp$面AB_1C，

因为$AB\subset$面ABB_1，

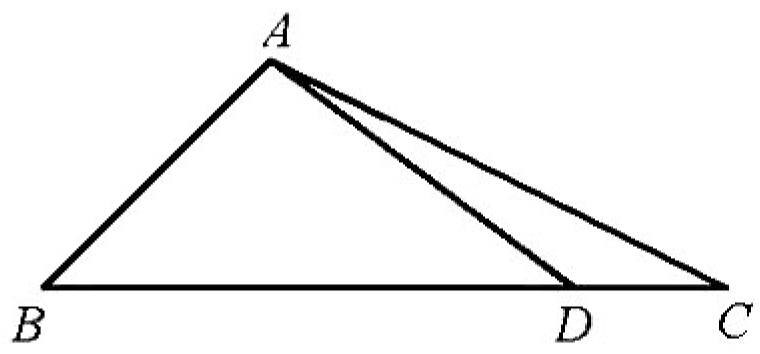
所以平面$AB_1C\perp$平面ABB_1.

16.（14 分）

在$\triangle ABC$中，角A、B、C的对边分别为a、b、c．已知$a=3$，$c=\sqrt{2}$，B=45°.

（1）求$\sin C$的值；

（2）在边 BC 上取一点 D，使得 $\cos\angle ADC=-\dfrac{4}{5}$，求 $\tan\angle DAC$ 的值．



（第 16 题）

【答案】：（1） $\sin C=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$；（2） $\tan\angle DAC=\dfrac{2}{11}$(微信公众号 数学研讨 独家解析)

【解析】：（1）由余弦定理，得 $\cos B=\cos 45^{\circ}=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\dfrac{11-b^2}{6\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

因此 $b^2=5$，即 $b=\sqrt{5}$

由正弦定理 $\dfrac{c}{\sin C}=\dfrac{b}{\sin B}$，得 $\dfrac{\sqrt{2}}{\sin C}=\dfrac{\sqrt{5}}{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$

因此 $\sin C=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$．

（2）因为 $\cos\angle ADC=-\dfrac{4}{5}$，所以 $\sin\angle ADC=\sqrt{1-\cos^2\angle ADC}=\dfrac{3}{5}$，

因为 $\angle ADC\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$，所以 $C\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，

所以 $\cos C=\sqrt{1-\sin^2 C}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，

$$\begin{aligned}所以\sin\angle DAC&=\sin\left(\pi-\angle DAC\right)=\sin\left(\angle ADC+\angle C\right)\\&=\sin\angle ADC\cos C+\cos\angle ADC\sin C\\&=\frac{2\sqrt{5}}{25}\end{aligned}$$

因为 $\angle DAC\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，

所以 $\cos\angle DAC=\sqrt{1-\sin^2\angle DAC}=\dfrac{11\sqrt{5}}{25}$，

故 $\tan\angle DAC=\dfrac{\sin\angle DAC}{\cos\angle DAC}=\dfrac{2}{11}$．

17．（14 分）

某地准备在山谷中建一座桥梁，桥址位置的竖直截面图如图所示：谷底 O 在水平线 MN 上，桥 AB 与 MN 平行，OO' 为铅垂线（O' 在 AB 上）．经测量，左侧曲线 AO 上任一点 D 到

当 $20<x<40$ 时，$y'>0$，y 单调递增.

所以，当 $x=20$ 时，y 取最小值，造价最低.

答：(1) 桥 AB 的长度为 120 米；(2) $O'E$ 为 20 米时，桥墩 CD 与 EF 的总造价最低.

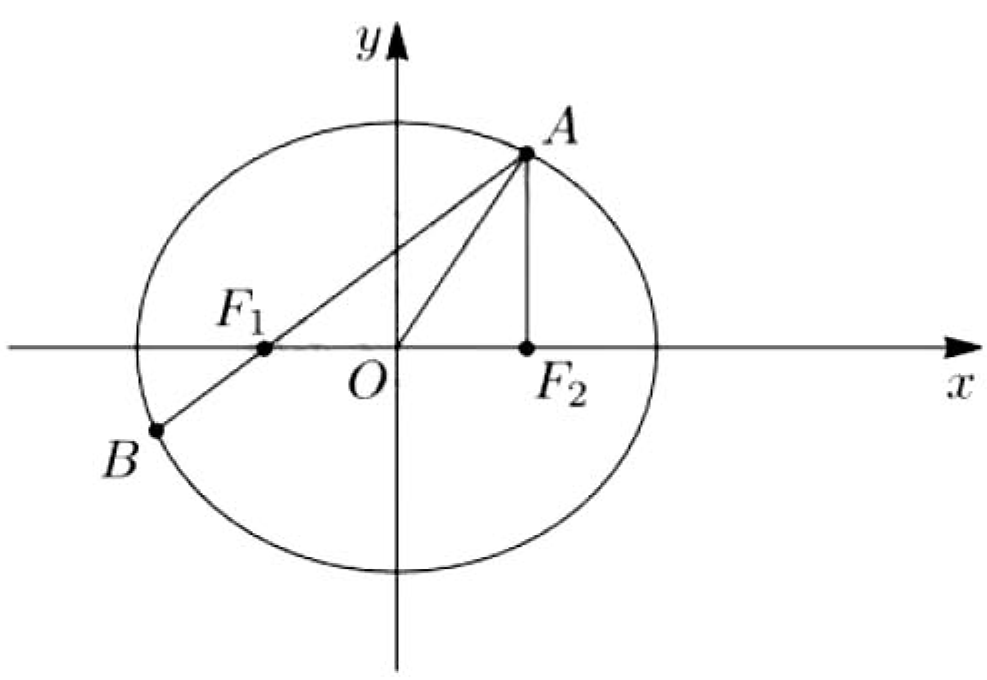
18.（16 分）

在平面直角坐标系 xOy 中，已知椭圆 $E:\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 的左、右焦点分别为 F_1、F_2，点 A 在椭圆 E 上且在第一象限内，$AF_2\perp F_1F_2$，直线 AF_1 与椭圆 E 相交于另一点 B.

（1）求 ΔAF_1F_2 的周长；

（2）在 x 轴上任取一点 P，直线 AP 与椭圆 E 的右准线相交于点 Q，求 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{QP}$ 的最小值；

（3）设点 M 在椭圆 E 上，记 ΔOAB 与 ΔMAB 的面积分别为 S_1，S_2，若 $S_2=3S_1$，求点 M 的坐标.



（第 18 题）

【解析】：（1）ΔAF_1F_2 的周长 $l=2a+2c=6$.（微信公众号 数学研讨 独家解析）

（2）由椭圆方程得 $A(1,\dfrac{3}{2})$，设点 $P(t,0)$，则直线 AP 方程为 $y=\dfrac{\frac{3}{2}}{1-t}(x-t)$，

令 $x=\dfrac{a^2}{c}=4$ 得 $y_Q=\dfrac{6-\frac{3}{2}t}{1-t}=\dfrac{12-3t}{2(1-t)}$，即 $Q(4,\dfrac{12-3t}{2-2t})$，$\overrightarrow{QP}=(t-4,\dfrac{12-3t}{2t-2})$

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{QP}=t^2-4t=(t-2)^2-4\geqslant-4$，即 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{QP}$ 的最小值为 -4

（3）设 O 到直线 AB 的距离为 d_1，M 到直线 AB 的距离为 d_2，

若 $S_2=3S_1$，则 $\dfrac{1}{2}\times|AB|\times d_2=\dfrac{1}{2}\times|AB|\times d_1\times3$，即 $d_2=3d_1$，

由(1)可得直线AB方程为$y=\frac{3}{4}(x+1)$，即$3x-4y+3=0$，所以$d_1=\frac{3}{5}$，$d_2=\frac{9}{5}$.

由题意得，M点应为与直线AB平行且距离为$\frac{9}{5}$的直线与椭圆的交点，

设平行于AB的直线l为$3x-4y+m=0$，与直线AB的距离为$\frac{9}{5}$，

所以$\frac{|m-3|}{\sqrt{9+16}}=\frac{9}{5}$，即$m=-6$或$12$.

当$m=-6$时，直线l为$3x-4y-6=0$，即$y=\frac{3}{4}(x-2)$，

联立$\begin{cases} y=\frac{3}{4}(x-2) \\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1 \end{cases}$可得$(x-2)(7x+2)=0$，即$\begin{cases} x_M=2 \\ y_N=0 \end{cases}$或$\begin{cases} x_M=-\frac{2}{7} \\ y_N=-\frac{12}{7} \end{cases}$，

所以$M(2,0)$或$(-\frac{2}{7},-\frac{12}{7})$. (微信公众号 数学研讨 独家解析)

当$m=12$时，直线l为$3x-4y+12=0$，即$y=\frac{3}{4}(x+4)$，

联立$\begin{cases} y=\frac{3}{4}(x+4) \\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1 \end{cases}$可得$\frac{21}{4}x^2+18x+24=0$，$\Delta=9\times(36-56)<0$，所以无解 .

综上所述，M点坐标为$(2,0)$或$(-\frac{2}{7},-\frac{12}{7})$.

19.（16分）

已知关于x的函数$y=f(x)$，$y=g(x)$与$h(x)=kx+b\left(k,b\in R\right)$在区间$D$上恒有$f(x)\geq h(x)\geq g(x)$.

（1）若$f(x)=x^2+2x$，$g\left(x\right)=-x^2+2x$，$D=(-\infty,+\infty)$，求$h(x)$的表达式;

（2）若$f(x)=x^2-x+1$，$g(x)=k\ln x$，$h\left(x\right)=kx-k$，$D=(0,+\infty)$，求k的取值范围;

（3）若$f(x)=x^4-2x^2$，$g(x)=4x^2-8$，$h(x)=4(t^3-t)x-3t^4+2t^2\ (0<|t|\leq\sqrt{2})$，$D=[m,n]\subset[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$，求证：$n-m\leqslant\sqrt{7}$.

【解答】:（1）由$f(x)=g(x)$得$x=0$. (微信公众号 数学研讨 独家解析)

又$f'(x)=2x+2$，$g'(x)=-2x+2$，所以$f'(0)=g'(0)=2$，

所以，函数$h(x)$的图像为过原点，斜率为2的直线，所以$h(x)=2x$.

由(1)可得直线AB方程为$y=\dfrac{3}{4}(x+1)$，即$3x-4y+3=0$，所以$d_1=\dfrac{3}{5}$，$d_2=\dfrac{9}{5}$.

由题意得，M点应为与直线AB平行且距离为$\dfrac{9}{5}$的直线与椭圆的交点，

设平行于AB的直线l为$3x-4y+m=0$，与直线AB的距离为$\dfrac{9}{5}$，

所以$\dfrac{|m-3|}{\sqrt{9+16}}=\dfrac{9}{5}$，即$m=-6$或$12$.

当$m=-6$时，直线l为$3x-4y-6=0$，即$y=\dfrac{3}{4}(x-2)$，

联立$\begin{cases} y=\dfrac{3}{4}(x-2) \\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1 \end{cases}$可得$(x-2)(7x+2)=0$，即$\begin{cases} x_M=2 \\ y_N=0 \end{cases}$或$\begin{cases} x_M=-\dfrac{2}{7} \\ y_N=-\dfrac{12}{7} \end{cases}$，

所以$M(2,0)$或$(-\dfrac{2}{7},-\dfrac{12}{7})$.（微信公众号 数学研讨 独家解析）

当$m=12$时，直线l为$3x-4y+12=0$，即$y=\dfrac{3}{4}(x+4)$，

联立$\begin{cases} y=\dfrac{3}{4}(x+4) \\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1 \end{cases}$可得$\dfrac{21}{4}x^2+18x+24=0$，$\Delta=9\times(36-56)<0$，所以无解 .

综上所述，M点坐标为$(2,0)$或$(-\dfrac{2}{7},-\dfrac{12}{7})$.

19.（16分）

已知关于x的函数$y=f(x)$，$y=g(x)$与$h(x)=kx+b\left(k,b\in R\right)$在区间$D$上恒有$f(x)\geq h(x)\geq g(x)$.

（1）若$f(x)=x^2+2x$，$g\left(x\right)=-x^2+2x$，$D=(-\infty,+\infty)$，求$h(x)$的表达式；

（2）若$f(x)=x^2-x+1$，$g(x)=k\ln x$，$h\left(x\right)=kx-k$，$D=(0,+\infty)$，求k的取值范围；

（3）若$f(x)=x^4-2x^2$，$g(x)=4x^2-8$，$h(x)=4(t^3-t)x-3t^4+2t^2$ $(0<|t|\leq\sqrt{2})$，$D=[m,n]\subset[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$，求证：$n-m\leqslant\sqrt{7}$.

【解答】:（1）由$f(x)=g(x)$得$x=0$.（微信公众号 数学研讨 独家解析）

又$f'(x)=2x+2$，$g'(x)=-2x+2$，所以$f'(0)=g'(0)=2$，

所以，函数$h(x)$的图像为过原点，斜率为2的直线，所以$h(x)=2x$.

经检验：$h(x)=2x$ 符号题意．

（2）$h(x)-g(x)=k(x-1-\ln x)$

设 $\varphi(x)=x-1-\ln x$，则 $\varphi'(x)=1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-1}{x}$

$\varphi(x)\ge\varphi(1)=0$，所以当 $h(x)-g(x)\ge 0$ 时，$k\ge 0$．

由 $f(x)-h(x)=x^2-x+1-(kx-k)=x^2-(k+1)x+(1+k)\ge 0$，得

当 $x=k+1\le 0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上递增，所以 $f(x)>f(0)=1+k\ge 0$，所以 $k=-1$

当 $k+1>0$ 时，$\Delta\le 0$，即 $(k+1)^2-4(k+1)\le 0,(k+1)(k-3)\le 0,-1<k\le 3$

综上，$k\in[0,3]$．(微信公众号 数学研讨 独家解析)

（3）因为 $f(x)=x^4-2x^2$，所以 $f'(x)=4x^3-4x=4x(x+1)(x-1)$，

所以函数 $y=f(x)$ 的图像在 $x=x_0$ 处的切线为

$y=(4x_0^3-4x_0)(x-x_0)+(x_0^4-2x_0^2)=(4x_0^3-4x_0)x-3x_0^4+2x_0^2$，

可见直线 $y=h(x)$ 为函数 $y=f(x)$ 的图像在 $x=t(0<|t|\le\sqrt{2})$ 处的切线，

又因为

x	$-\sqrt{2}$	$(-\sqrt{2},-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,\sqrt{2})$	$\sqrt{2}$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\downarrow$	-1	$\uparrow$	0	$\downarrow$	-1	$\uparrow$	0

由函数 $y=f(x)$ 的图像可知，当 $f(x)\ge h(x)$ 在区间 D 上恒成立时，$|t|\in[1,\sqrt{2}]$，

又由 $g(x)-h(x)=0$ 得 $4x^2-4(t^3-t)x+3t^4-2t^2-8=0$，

设方程 $g(x)-h(x)=0$ 的两根为 x_1，x_2，则 $x_1+x_2=t^3-t$，$x_1x_2=\dfrac{3t^4-2t^2-8}{4}$，

$\therefore |x_1-x_2|=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{(t^3-t)^2-(3t^4-2t^2-8)}=\sqrt{t^6-5t^4+3t^2+8}$，

令 $t^2=\lambda$，则 $\lambda\in[1,2]$，由图像可知 $n-m=|x_1-x_2|=\sqrt{\lambda^3-5\lambda^2+3\lambda+8}$．

设 $\varphi(\lambda)=\lambda^3-5\lambda^2+3\lambda+8$，则 $\varphi'(\lambda)=3\lambda^2-10\lambda+3=(\lambda-3)(3\lambda-1)$，

所以当$\lambda\in[1,2]$时，$\varphi'(\lambda)<0$，$\varphi(\lambda)$单调递减，所以$\varphi(\lambda)_{\max}=\varphi(1)=7$，

故$(n-m)_{\max}=|x_1-x_2|_{\max}=\sqrt{\phi(\lambda)_{\max}}=\sqrt{7}$，即$n-m\le\sqrt{7}$.

20.（16 分）

已知数列$\{a_n\}(n\in\mathbf{N}^*)$的首项$a_1=1$，前$n$项和为$S_n$．设$\lambda$和$k$为常数．若对一切正整数$n$，均有$S_{n+1}^{\frac{1}{k}}+S_n^{\frac{1}{k}}=\lambda a_{n+1}^{\frac{1}{k}}$成立，则称此数列为“$\lambda-k$”数列．

（1）若等差数列是“$\lambda-1$”数列，求λ的值；(微信公众号 数学研讨 独家解析)

（2）若数列$\{a_n\}$是“$\frac{\sqrt{3}}{3}-2$”数列，且$a_n>0$，求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（3）对于给定的λ，是否存在三个不同的数列$\{a_n\}$为“$\lambda-3$”数列，且$a_n\geqslant0$？若存在，求出λ的取值范围；若不存在，说明理由．

【答案】：（1）$\lambda=1$；（2）$a_n=\begin{cases}1 & ,n=1\\ 3\cdot4^{n-2}, & n\geqslant2\end{cases}$；（3）不存在．

【解析】：（1）$k=1$时，$a_{n+1}=S_{n+1}-S_n=\lambda a_{n+1}$．

（2）$\sqrt{S_{n+1}}-\sqrt{S_n}=\frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{a_{n+1}}$，$a_{n+1}=S_{n+1}-S_n=\frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{a_{n+1}}\left(\sqrt{S_{n+1}}+\sqrt{S_n}\right)$，

因此$\sqrt{S_{n+1}}+\sqrt{S_n}=\sqrt{3}\sqrt{a_{n+1}}$．(微信公众号 数学研讨 独家解析)

$\sqrt{S_{n+1}}=\frac{2}{3}\sqrt{3a_{n+1}}$，$S_{n+1}=\frac{4}{3}a_{n+1}=\frac{4}{3}(S_{n+1}-S_n)$．从而，$S_{n+1}=4S_n$．

又$S_1=a_1=1$，$S_n=4^{n-1}$．$a_n=S_n-S_{n-1}=3\cdot4^{n-2}$，$n\geqslant2$．

综上，$a_n=\begin{cases}1 & ,n=1\\ 3\cdot4^{n-2}, & n\geqslant2\end{cases}$．

（3）若存在三个不同的数列$\{a_n\}$为"$\lambda-3$"数列，则$S_{n+1}^{\frac{1}{3}}-S_n^{\frac{1}{3}}=\lambda a_{n+1}^{\frac{1}{3}}$，

则$S_{n+1}-3S_{n+1}^{\frac{2}{3}}S_n^{\frac{1}{3}}+3S_{n+1}^{\frac{1}{3}}S_n^{\frac{2}{3}}-S_n=\lambda^3a_{n+1}=\lambda^3(S_{n+1}-S_n)$，

由，$a_1=1,a_n\ge0$则$S_n>0$，令$p_n=\left(\frac{S_{n+1}}{S_n}\right)^{\frac{1}{3}}>0$，

则$(1-\lambda^3)p_n^3-3p_n^2+3p_n-(1-\lambda^3)=0$，(微信公众号 数学研讨 独家解析)

$\lambda=1$时，$p_n=p_n^2$，由$p_n>0$可得$p_n=1$，则$S_{n+1}=S_n$，即$a_{n+1}=0$，

此时$\{a_n\}$唯一，不存在三个不同的数列$\{a_n\}$；

$\lambda \neq 1$时，令$t=\dfrac{3}{1-\lambda^3}$，则$p_n^3-tp_n^2+tp_n-1=0$，则$(p_n-1)\left[p_n^2+(1-t)p_n+1\right]=0$，

① $t\leq 1$时$p_n^2+(1-t)p_n+1>0$，则$p_n=1$同理不存在三个不同的数列$\{a_n\}$；

② $1<t<3$时，$\Delta=(1-t)^2-4<0$，$p_n^2+(1-t)p_n+1=0$无解，

则$p_n=1$，同理不存在三个不同的数列$\{a_n\}$；

③ $t=3$时，$(p_n-1)^3=0$，则$p_n=1$，同理不存在三个不同的数列$\{a_n\}$；

④ $t>3$即$0<\lambda<1$时，$\Delta=(1-t)^2-4>0$，$p_n^2+(1-t)p_n+1=0$有两解α,β，

设$\alpha<\beta$，$\alpha+\beta=t-1>2$，$\alpha\beta=1>0$，则$0<\alpha<1<\beta$，

则对任意$n\in N^*,\dfrac{S_{n+1}}{S_n}=1$或$\dfrac{S_{n+1}}{S_n}=a^3$或$\dfrac{S_{n+1}}{S_n}=\beta^3$；(微信公众号 数学研讨 独家解析)

此时$S_n=1,S_n=\begin{cases}1,n=1\\\beta^3,n\geq 2\end{cases},S_n=\begin{cases}1,n=1,2\\\beta^3,n\geq 3\end{cases}$均符合条件，

对应$a_n=\begin{cases}1,n=1\\0,n\geq 2\end{cases},a_n=\begin{cases}1\quad, & n=1\\\beta^3-1\quad, & n=2\\0\quad, & n\geq 3\end{cases}$，$a_n=\begin{cases}1\quad, & n=1\\\beta^3-1, & n=3\\0 & ,n=2,n\geq 4\end{cases}$，

则存在三个不同的数列$\{a_n\}$为"$\lambda-3$"数列，且$a_n\geq 0$，综上，$0<\lambda<1$.