一、振动活塞

（1）有一竖直放置的柱体气缸，上有一质量为m的活塞，活塞面积为A，在外界大气压p_0与内部气体气压的作用下保持平衡。气缸内气体在平衡时高度为L，重力加速度g。记活塞相比于平衡位置向上的位移为x，所有过程中缸内气体保持等温。

给活塞施加一位移微扰$B \ll L$。已知活塞与气缸壁之间摩擦力满足$f =- \eta v$（$\frac{\eta}{m} < \omega$），求此后的活塞运动方程$x(t)$，以及该运动的周期T。

（2）现有一本征频率ω_0、质量为m的谐振子，受耗散阻力$f =- \eta v$和单色驱动力$F = F_0 \cos \omega t$，在稳态下求驱动力做功平均功率$\overline{P}$，其中

$$\overline{P} = \frac{1}{T}\int_0^T P \mathrm{d}t$$

（3）接上问，求耗散力平均功率。

（4）证明以上两问求得的平均功率大小相同。

二、声压球悬浮

（1）在静压p_0的气体中有一单色平面纵波

$$\xi = A \cos \omega t \cos kx$$

定义声压p_s是当处压强对大气压强的偏离，声强很小时可认为$p_s = \Delta\rho c^2$，其中c是气体中声速。求出上述单色平面纵波各处声压$p_s(x,t)$。

（2）一质量为m，半径为r的小球球心在声压场$x = x_0$处，求其受力，然后取$kr \ll 1$ 近似。

（3）在高频振荡情形下证明小球作谐振。

（4）求一周期内球收到的平均作用力F，并说明在什么地方存在稳定平衡。

（5）现在将系统置于重力场中，求小球平衡条件。

三、加速盒子中的理想气体

有一高为H、截面积A的柱形恒温轻盒子温度保持T，内含质量m的N个近独立可区分双原子气体粒子。盒子在高度方向加速运动，加速度为a（$maH \ll k_B T$）。

（1）求盒子中气体粒子数密度分布。

（2）求理想气体的熵$S(p,T)$

（3）气体从静止缓慢提升加速度直到a，求盒子内气体熵变。

（4）求盒子内气体和环境总熵变。

（5）突然使盒子加速度为零，求盒子内气体熵变，再求盒子内气体和环境总熵变。

四、肥皂泡

有一肥皂泡，表面张力系数γ，在p_0的大气压下维持半径R_0。现在在肥皂泡表面均匀地带上电荷Q，整个过程等温，则肥皂泡半径变为R_1。求解$Q(\gamma, p_0, R_0, R_1)$。

五、等离子体振荡

一团等离子体气由正离子与电子构成，由于正离子很重，和电子相比可视为静止。已知电子质量m_e与电量$-e$，等离子体气中电子数密度n，等离子气体介电常数ϵ与磁导率μ。

（1）证明

$$\nabla^2 \vec{E} = \frac{ne^2\mu}{m}\vec{E} + \mu\epsilon\ddot{\vec{E}}$$

数学提示：$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - (\nabla \cdot \nabla)\vec{E}$

（2）求等离子体气中的色散关系。

（3）画出等离子体气、普通不导电介质、导电介质的色散关系$\frac{\omega}{k}-\omega$图像。

（*）电子运动时会受到$\vec{f}=-\eta\vec{v}$的耗散力，重解（2）（3）小问。

六、矩阵光学

本题中曲率半径一律以从右边看是凸为正。

定义光线态矢

$$|\psi\rangle=\binom{n\alpha}{y}$$

其中n是当处介质折射率，α是光线与光轴夹角，y是光线到光轴的横向距离。

（1）球面折射满足

$$|\psi'\rangle=\hat{R}|\psi\rangle$$

求$\hat{R}$的矩阵表述。

（2）一段传播距离满足

$$|\psi'\rangle=\hat{T}|\psi\rangle$$

求$\hat{T}$的矩阵表述。

（3）一厚透镜的两个面曲率半径分别为R_1、R_2，透镜厚度d，透镜材料折射率n，两侧是空气。求透镜算符$\hat{L}$的矩阵表述。

（4）求厚透镜焦距与厚透镜主面到后球面的距离，用$\hat{L}$的矩阵元表示。

参考答案

一、振动活塞

（1）等温气体有

$$p(L+x)=const$$

于是

$$p=\left(p_0+\frac{mg}{A}\right)\left(1-\frac{x}{L}\right)$$

$$F=pA=(p_0A+mg)\left(1-\frac{x}{L}\right)$$

$$k=-\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}=\frac{p_0A+mg}{L}$$

$$\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}$$

带阻尼的谐振子方程

$$m\ddot{x}=-m\omega_0^2x-\eta\dot{x}$$

记$\beta=\frac{\eta}{2m}$，通解

$$x=\mathbb{C}_1\mathrm{e}^{\left(-\beta-i\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}\right)t}+\mathbb{C}_2\mathrm{e}^{\left(-\beta+i\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}\right)t}$$

带入初条件解得

$$x=B\mathrm{e}^{-\beta t}\left(\cos\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}t+\frac{\beta}{\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}}\sin\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}t\right)$$

显然周期就是

$$T=\frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}}$$

（2）强迫振动方程

$$m\ddot{x}=-m\omega_0^2x-\eta\dot{x}+F_0\mathrm{e}^{i\omega t}$$

于是

$$x=\frac{F_0}{m}\frac{1}{(\omega_0^2-\omega^2)+2i\omega\beta}\mathrm{e}^{i\omega t}$$

也即强迫振动

$$x=\frac{F_0}{m}\frac{1}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(2\omega\beta)^2}\left[(\omega_0^2-\omega^2)\cos\omega t+2\omega\beta\sin\omega t\right]$$

策动力功率

$$\langle P_F\rangle=\frac{\omega}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}Fv\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\frac{1}{m}\frac{2\omega^2\beta}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(2\omega\beta)^2}F_0^2$$

（3）耗散力功率

$$\langle P_\eta\rangle=\frac{\omega}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}-\eta v^2\mathrm{d}t=-\frac{1}{2}\eta\left(\frac{F_0}{m}\frac{\omega}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(2\omega\beta)^2}\right)^2\left[(\omega_0^2-\omega^2)^2+(2\omega\beta)^2\right]$$

（4）显然以上两功率互为相反数。

二、声压球悬浮

（1）容易观察出

$$\frac{\Delta\rho}{\rho}=\frac{\partial\xi}{\partial x}$$

于是

$$p_s=-p_0kA\cos\omega t\sin kx$$

（注意到$c=\sqrt{\frac{\partial p}{\partial\rho}}$，证明可见 https://zhuanlan.zhihu.com/p/509060864）

（2）

$$F=\int_0^\pi p_s(x_0-r\cos\theta)\cos\theta\cdot 2\pi r\sin\theta\cdot r\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{2\pi}{k}p_0A\cos\omega t$$

$$\cdot\left[(1-kx_0)\cdot 2\cos kx_0\sin kr-kx_0\cdot 2\cos kx_0\cos kr+kr\sin kx_0\sin kr\right]$$

近似下

$$F=4\pi kx_0p_0A\cos\omega t\cos kx_0\cdot r$$

（3）这和快速有效势的解法是一样的。不妨记小球坐标ζ（$\zeta\ll\frac{1}{k}$），则

$$F=4\pi kx_0p_0Ar\cos kx_0\cdot(1+\mathrm{k}\tan\mathrm{kx}_0\cdot\zeta)\cdot\cos\omega t$$

不妨记

$$\zeta=\zeta_0+\zeta_1$$

其中

$$\frac{\omega}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}\zeta_1\mathrm{d}t=0$$

$$\sqrt{\langle\zeta_0^2\rangle}\gg\sqrt{\langle\zeta_1^2\rangle}$$

运动方程

$$m\ddot{\zeta}=F$$

先考虑短周期方程：

$$m\ddot{\zeta}_1=4\pi kx_0p_0Ar\cos kx_0\cdot(1+\mathrm{k}\tan\mathrm{kx}_0\cdot\zeta_0)\cdot\cos\omega t$$

这样

$$\zeta_1=-\frac{1}{m\omega^2}4\pi kx_0p_0Ar\cos kx_0\cdot(1+\mathrm{k}\tan\mathrm{kx}_0\cdot\zeta_0)\cdot\cos\omega t$$

带入长期方程，并对短期求平均：

$$m\ddot{\zeta}_0=-\frac{\mathrm{k}\tan\mathrm{kx}_0}{m\omega^2}(4\pi kx_0p_0Ar\cos kx_0)^2\cdot\mathrm{k}\tan\mathrm{kx}_0\cdot\zeta_0-\frac{\mathrm{k}\tan\mathrm{kx}_0}{m\omega^2}(4\pi kx_0p_0Ar\cos kx_0)^2$$

忽略常数项（这会在第五问考虑），即得

$$\zeta_0=\mathbb{C}\cos\left(\frac{\mathrm{k}\tan\mathrm{kx}_0\cdot 4\pi kx_0p_0Ar\cos kx_0\cdot\sqrt{k\tan kx_0}}{m\omega}t\right)$$

综上所述

$$\zeta=\mathbb{C}\cos\left(\frac{k\tan kx_0\cdot 4\pi kx_0p_0Ar\cos kx_0\cdot\sqrt{k\tan kx_0}}{m\omega}t\right)-\frac{1}{m\omega^2}4\pi kx_0p_0Ar\cos kx_0$$

$$\cdot\left[1+k\tan kx_0\cdot\mathbb{C}\cos\left(\frac{k\tan kx_0\cdot 4\pi kx_0p_0Ar\cos kx_0\cdot\sqrt{k\tan kx_0}}{m\omega}t\right)\right]$$

$$\cdot\cos\omega t$$

（4）

$$\langle F\rangle=-\frac{k\tan kx_0}{m\omega^2}(4\pi kx_0p_0Ar\cos kx_0)^2$$

稳定平衡要求

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\langle F\rangle=-\frac{k}{m\omega^2}(4\pi kx_0p_0Ar)^2\cdot k(\cos kx_0\cos kx_0-\sin kx_0\sin kx_0)<0$$

也即

$$2kx_0\in\left(\left(2s-\frac{1}{2}\right)\pi,\left(2s+\frac{1}{2}\right)\pi\right),s\in\mathbb{Z}$$

（5）根据前几问结论有

$$mg=\frac{k\tan kx_0}{m\omega^2}(4\pi kx_0p_0Ar\cos kx_0)^2$$

$$2kx_0\in\left(\left(2s-\frac{1}{2}\right)\pi,\left(2s+\frac{1}{2}\right)\pi\right),s\in\mathbb{Z}$$

于是

$$x_0=\frac{1}{2k}\left[\arcsin\frac{2m^2\omega^2g}{k(4\pi kx_0p_0Ar)^2}+2s\pi\right]$$

三、加速盒子中的理想气体

下面 import g as a。

（1）玻尔兹曼分布率

$$n=n_0\mathrm{e}^{-\frac{mgh}{k_BT}}$$

带入求解参数n_0有

$$N=\int_0^H nA\mathrm{d}h=n_0A\frac{k_BT}{mg}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{mgH}{k_BT}}\right)$$

故

$$n_0=\frac{Nmg}{Ak_BT}\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-\frac{mgH}{k_BT}}}$$

$$n=\frac{Nmg}{Ak_BT}\frac{\mathrm{e}^{-\frac{mgh}{k_BT}}}{1-\mathrm{e}^{-\frac{mgH}{k_BT}}}$$

（2）

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p=\frac{1}{T}C_p$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T=-\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p=-\frac{Nk_B}{p}$$

于是

$$\mathrm{d}S=\frac{1}{T}C_p\mathrm{d}T-\frac{Nk_B}{p}\mathrm{d}p$$

$$S=\int\mathrm{d}S=C_p\ln T-Nk_B\ln p$$

（3）初态熵

$$S_0=C_p\ln T_0-Nk_B\ln\left(\frac{N}{AH}k_BT_0\right)$$

末态熵

$$S_1=C_p\ln T_0-Ak_B\int_0^H n\ln(nk_BT_0)\,\mathrm{d}h$$

硬算肯定是没有出路的，采取近似：

$$n=\frac{Nmg}{Ak_BT}\frac{\mathrm{e}^{-\frac{mgh}{k_BT}}}{1-\mathrm{e}^{-\frac{mgH}{k_BT}}}=\frac{N}{AH}\frac{mgH}{k_BT}\frac{1-\frac{mgh}{k_BT}+\frac{1}{2}\left(\frac{mgh}{k_BT}\right)^2}{\frac{mgH}{k_BT}-\frac{1}{2}\left(\frac{mgH}{k_BT}\right)^2+\frac{1}{6}\left(\frac{mgH}{k_BT}\right)^3}$$
$$=\frac{N}{AH}\left[1-\frac{mgh}{k_BT}+\frac{1}{2}\left(\frac{mgh}{k_BT}\right)^2+\frac{1}{2}\frac{mgH}{k_BT}+\frac{1}{12}\left(\frac{mgH}{k_BT}\right)^2-\frac{1}{2}\frac{mgh}{k_BT}\frac{mgH}{k_BT}\right]$$

$$Ak_B\int_0^H n\ln\left(nk_BT_0\right)\mathrm{d}h$$
$$=Nk_B\frac{k_BT}{mgH}\int_0^H\left[1-\frac{mgh}{k_BT}+\frac{1}{2}\frac{mgH}{k_BT}\right]$$
$$\cdot\left(\left[-\frac{mgh}{k_BT}+\frac{1}{2}\frac{mgH}{k_BT}+\frac{1}{2}\left(\frac{mgh}{k_BT}\right)^2+\frac{1}{12}\left(\frac{mgH}{k_BT}\right)^2-\frac{1}{2}\frac{mgh}{k_BT}\frac{mgH}{k_BT}\right]\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2}\left[-\frac{mgh}{k_BT}+\frac{1}{2}\frac{mgH}{k_BT}\right]^2\right)\mathrm{d}\frac{mgh}{k_BT}=-\frac{1}{12}Nk_B\frac{mgH}{k_BT}$$

于是

$$\Delta S=-\frac{1}{12}Nk_B\frac{mgH}{k_BT}$$

（4）和环境没有热交换，所以总熵变就是盒子里的熵变。

（5）二者均为

$$\Delta S=\frac{1}{12}Nk_B\frac{mgH}{k_BT}$$

四、肥皂泡

注意肥皂泡有两面！始终有

$$p-p_0=\frac{4\gamma}{R}$$

初态

$$p-p_0=\frac{4\gamma}{R_0}$$

末态

$$\left(\frac{R_0}{R_1}\right)^3p-p_0+\frac{1}{2}\epsilon_0\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{R_1^2}\right)^2=\frac{4\gamma}{R_1}$$

解上述方程得

$$Q=4\pi\epsilon_0R_1^2\sqrt{\frac{2}{\epsilon_0}\left(\frac{4\gamma}{R_1}\left[1-\left(\frac{R_0}{R_1}\right)^2\right]+p_0\left[1-\left(\frac{R_0}{R_1}\right)^3\right]\right)}$$

五、等离子体振荡

（1）设某处电子位移$\vec{u}$，则

$$\rho=ne\nabla\cdot\vec{u}$$
$$\vec{j}=-ne\dot{\vec{u}}$$

电子运动方程

$$m_e\ddot{\vec{u}}=-e\vec{E}$$

麦克斯韦方程组

$$\nabla\cdot\vec{E}=\frac{\rho}{\epsilon}$$
$$\nabla\cdot\vec{B}=0$$

$$\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}$$

$$\nabla\times\vec{B}=\mu\vec{j}+\mu\epsilon\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}$$

后两个方程消去$\vec{B}$有

$$\nabla\times\left(\nabla\times\vec{E}\right)+\mu\frac{\partial}{\partial t}\vec{j}+\mu\epsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E}=0$$

注意到

$$\frac{\partial}{\partial t}\vec{j}=-ne\ddot{\vec{u}}=\frac{ne^2}{m_e}\vec{E}$$

$$\nabla\times\left(\nabla\times\vec{E}\right)=\nabla\left(\nabla\cdot\vec{E}\right)-(\nabla\cdot\nabla)\vec{E}=\nabla^2\vec{E}$$

于是就有

$$\nabla^2\vec{E}=\frac{ne^2\mu}{m_e}\vec{E}+\mu\epsilon\ddot{\vec{E}}$$

（2）带入行波解，则

$$\nabla\times\mapsto \mathrm{i}\vec{k}\times$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\mapsto \mathrm{i}\omega$$

于是

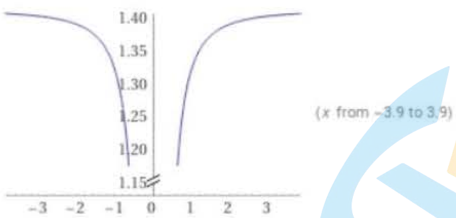
$$-k^2=\frac{ne^2\mu}{m_e}-\mu\epsilon\omega^2$$

（3）等离子体

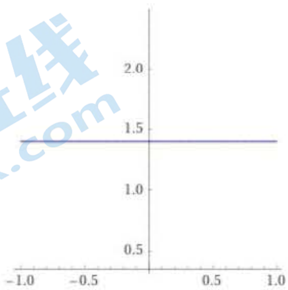
$$k=\sqrt{\mu\epsilon\omega^2-\frac{ne^2\mu}{m_e}}$$

$$\frac{\omega}{k}=\sqrt{\mu\epsilon-\frac{ne^2\mu}{m_e}\omega^{-2}}$$

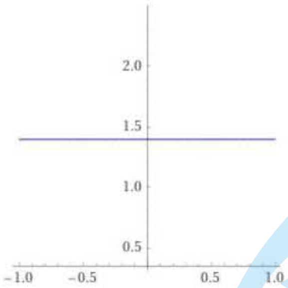
示意图



普通不导电介质



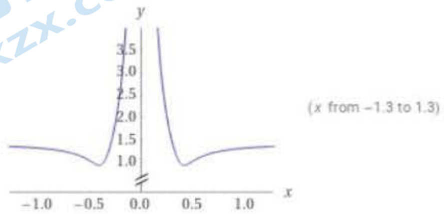
导电介质只不过是有虚部



（*）直接带入平面波解求色散关系：

$$-k^2=\frac{ne^2\mu}{m_e}-\frac{i}{\omega}\frac{ne^2\eta}{m_e^2}-\mu\epsilon\omega^2$$

$$\frac{\omega}{k}=\sqrt[4]{\left(\mu\epsilon-\frac{ne^2\mu}{m_e}\omega^{-2}\right)^2+\left(\frac{ne^2\eta}{m_e^2}\omega^{-3}\right)^2}$$



六、矩阵光学

（1）

$$\hat{R}=\begin{pmatrix}1 & \frac{n_2}{n_1}\frac{n_1-n_2}{R}\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

（2）

$$\hat{T}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ l & 1\end{pmatrix}$$

（3）

$$\hat{L}=\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{n}\frac{n-1}{R_2}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ d & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & n\frac{1-n}{R_1}\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1+\frac{n-1}{n}\frac{d}{R_2} & -\left(1+\frac{n-1}{n}\frac{d}{R_2}\right)\frac{n(n-1)}{R_1}+\frac{n-1}{n}\frac{1}{R_2}\\ d & 1-n(n-1)\frac{d}{R_1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}l_{11} & l_{12}\\ l_{21} & l_{22}\end{pmatrix}$$

（4）像方焦面到后球面距离记作x_1，则

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ x_1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}l_{11} & l_{12}\\ l_{21} & l_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha\\ 0\end{pmatrix}$$

于是

$$x_1=-\frac{l_{22}}{l_{12}}$$

$$f=\frac{y}{\alpha}=\frac{1}{l_{12}}$$

这样，像方主面距后球面

$$x_1-f=-\frac{l_{22}+1}{l_{12}}$$

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 50W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数千场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。

推荐大家关注北京高考在线网站官方微信公众号：京考一点通，我们会持续为大家整理分享最新的高中升学资讯、政策解读、热门试题答案、招生通知等内容!