2024届普通高等学校招生全国统一考试
青桐鸣大联考(高三)
数学参考答案

1. B 【解析】由题意可得 $A\cap B=\{-2,-1\}$，故 $A\cap B$ 的真子集的个数为 $2^2-1=3$.
故选 B.

2. A 【解析】因为 $zi-i=z+1$，则 $-z(1-i)=1+i$，所以 $z=-\frac{1+i}{1-i}=-\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=-i$，故 $|z+1|=|1-i|=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$.
故选 A.

3. B 【解析】由题意得 $|5\boldsymbol{a}+6\boldsymbol{b}|^2=25\boldsymbol{a}^2+60\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+36\boldsymbol{b}^2=61+60\times1\times1\times\cos\frac{\pi}{3}=91$，故 $|5\boldsymbol{a}+6\boldsymbol{b}|=\sqrt{91}$. 故选 B.

4. C 【解析】由题意得 $\frac{1}{10}=2b$，则 $b=\frac{1}{20}$，令 $\frac{1}{2}=\frac{1}{20}\cdot2^{\frac{t}{10}}$，即 $2^{\frac{t}{10}}=10$，解得 $t=\frac{10}{\lg 2}\approx33$.
故选 C.

5. D 【解析】设上、下底面圆的半径分别为 r，R，圆台的高为 h，则由题意可得 $\begin{cases}\frac{\pi r^2}{\pi R^2}=\frac{1}{4},\\2\pi(r+R)=6\pi,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}r=1,\\R=2,\end{cases}$

则 $V=\frac{1}{3}\pi h(1^2+1\times2+2^2)=21\pi$，解得 $h=9$. 故选 D.

6. D 【解析】设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，直线 $l:y=-\left(x-\frac{p}{2}\right)$，

联立 $\begin{cases}y=-\left(x-\frac{p}{2}\right),\\y^2=2px,\end{cases}$ 得 $x^2-3px+\frac{p^2}{4}=0$，

则 $\Delta>0$，$x_1+x_2=3p$，又 l 经过 C 的焦点 $\left(\frac{p}{2},0\right)$，则 $|MN|=x_1+x_2+p=3p+p=32$，解得 $p=8$，故 C 的准线方程为 $x=-4$.
故选 D.

7. C 【解析】由题意可得 $a_n=m(2^n-1)-n^2$，由于数列 $\{a_n\}$ 为单调递增数列，即 $\forall n\in\mathbf{N}^*$，$a_{n+1}-a_n=m(2^{n+1}-1)-(n+1)^2-[m(2^n-1)-n^2]=m\cdot2^n-2n-1>0$，整理得 $m>\frac{2n+1}{2^n}$，令 $b_n=\frac{2n+1}{2^n}$，则 $b_{n+1}-b_n=\frac{2n+3}{2^{n+1}}-\frac{2n+1}{2^n}=\frac{1-2n}{2^{n+1}}<0$，$n\in\mathbf{N}^*$，易得数列 $\{b_n\}$ 单调递减，

故 $b_1=\frac{3}{2}$ 是数列 $\{b_n\}$ 的最大项，则 m 的取值范围为 $\left(\frac{3}{2},+\infty\right)$. 故选 C.

8. C 【解析】$P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=3a=1$，故 $a=\frac{1}{3}$，

易得 $0\leqslant\frac{1}{3}+b\leqslant\frac{2}{3}$，$0\leqslant\frac{1}{3}-b\leqslant\frac{2}{3}$，

则 $-\frac{1}{3}\leqslant b\leqslant\frac{1}{3}$，

故 $E(X)=a+b+2a-2b=1-b$，$D(X)=\frac{1}{3}(1-b)^2+\left(\frac{1}{3}+b\right)b^2+\left(\frac{1}{3}-b\right)(1+b)^2=\frac{2}{3}-b-b^2$，又因为 $b\in\left[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right]$，所以 $D(X)\in\left[\frac{2}{9},\frac{8}{9}\right]$. 故选 C.

9. CD 【解析】A 选项，这五名同学成绩的平均数为 $\frac{68+72+76+80+84}{5}=76$，A 错误；

关注北京高考在线官方微信：京考一点通（微信号:bjgkzx)，获取更多试题资料及排名分析信息。

B 选项，将五名同学的成绩按从小到大排列：68，72，76，80，84，则这五名同学成绩的中位数为 76，B 错误；

C 选项，$5\times75\%=3.75$，故成绩从小到大排列后，第 4 个数即为上四分位数，即 80，C 正确；

D 选项，五名同学成绩的方差为 $\frac{1}{5}[(68-76)^2+(72-76)^2+(76-76)^2+(80-76)^2+(84-76)^2]=32$，D 正确.

故选 CD.

10. BD 【解析】由题意可得 $\frac{b^2+1}{ab}=\frac{b^2+1}{(2-2b)b}=\frac{b^2+1}{2(b-b^2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{b+1}{b-b^2}-1\right)$，

令 $b+1=t$，则 $1<t<2$，$\frac{b+1}{b-b^2}=\frac{t}{(t-1)-(t-1)^2}=\frac{t}{-t^2+3t-2}=\frac{1}{3-\left(t+\frac{2}{t}\right)}$，且 $t+\frac{2}{t}\in[2\sqrt{2},3)$，故 $\frac{b+1}{b-b^2}\in[3+2\sqrt{2},+\infty)$，所以 $\frac{b^2+1}{ab}\in[1+\sqrt{2},+\infty)$. 故选 BD.

11. ABC 【解析】由题可得 $|AM|\in[1,2]$，故点 M 在以 A 为圆心、半径分别为 1，2 的两圆之间(包含边界)，Ω 为内径为 1，外径为 2 的圆环，A 正确；直线 $x-ay+2=0$ 过定点 $(-2,0)$，故 M 到直线 $x-ay+2=0$ 的距离最大时为 M 与点 $(-2,0)$ 的距离，则 $d_{\max}=3+2=5$，B 正确；当 OM 恰与圆 $(x-1)^2+y^2=1$ 相切时，$|OM|$ 最大，此时直线 OM 与 y 轴重合，故 $|OM|_{\max}=\sqrt{3}$，C 正确；$\angle MBO=\frac{\pi}{4}$，则直线 BM：$y=-(x+1)$ 或 $y=x+1$，直线 $y=x+1$ 与直线 $y=-(x+1)$ 有无数点在 Ω 上，故符合的 M 点有无数个，故 D 错误. 故选 ABC.

12. 1 120 【解析】$(2-x^{-\frac{1}{2}})^8$ 的展开式的通项为 $T_{r+1}=C_8^r2^{8-r}(-1)^rx^{-\frac{r}{2}}$，故令 $r=4$ 可得含 $\frac{1}{x^2}$ 项的系数为 $C_8^4\times2^4\times(-1)^4=1\ 120$.

13. $-\frac{5\sqrt{2}}{2}$ 【解析】由 $\tan\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$，可得 $\tan2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=2\sqrt{2}$，故 $\tan3\alpha=\tan(\alpha+2\alpha)=\frac{\tan\alpha+\tan2\alpha}{1-\tan\alpha\cdot\tan2\alpha}=-\frac{5\sqrt{2}}{2}$.

14. $\sqrt[3]{2}$ 【解析】设三个圆锥的高分别为 h_1，h_2，h_3，母线与轴线的夹角为 θ，

则 $V=\frac{1}{3}\pi(h\tan\theta)^2\cdot h=\frac{\pi}{3}\tan^2\theta\cdot h^3$，由 $V_1=V_2+V_3$，得 $h_1^3=h_2^3+h_3^3$，

同理由 $aS_1=S_2+S_3$ 可得 $ah_1^2=h_2^2+h_3^2$，

则 $\frac{a^3h_1^6}{h_1^6}=\frac{(h_2^2+h_3^2)^3}{(h_2^3+h_3^3)^2}=a^3$，

则 $a^3=\frac{\left[1+\left(\frac{h_3}{h_2}\right)^2\right]^3}{\left[1+\left(\frac{h_3}{h_2}\right)^3\right]^2}$.

令 $f(x)=\frac{(1+x^2)^3}{(1+x^3)^2}$，$x\in(0,+\infty)$，得 $f'(x)=\frac{6x(1+x^2)^2\cdot(1-x)}{(1+x^3)^3}$，令 $f'(x)>0$，解得 $x\in(0,1)$；令 $f'(x)<0$，解得 $x\in(1,+\infty)$，故 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，所以 $f(x)_{\max}=f(1)=2$，

故 $a^3\leqslant2$，故 $a_{\max}=\sqrt[3]{2}$.

15. 解：(1)当 $a=0$ 时，$f(x)=-x\sin x$，

则 $f'(x)=-\sin x-x\cos x$， (1 分)

则 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\pi}{2}$， (2 分)

关注北京高考在线官方微信： 京考一点通 (微信号:bjgkzx)， 获取更多试题资料及排名分析信息。

$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1$, （3 分）

所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $\left(\frac{\pi}{2},f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$ 处的切线方程为 $y=-x$. （5 分）

(2) 当 $a=1$ 时, $f(x)=\ln(x+1)-x\sin x$, （6 分）

则 $f'(x)=\frac{1}{x+1}-\sin x-x\cos x$, （7 分）

当 $x\in(-1,0]$ 时, $\frac{1}{x+1}>0$, $-\sin x\geqslant 0$, $-x\cos x\geqslant 0$, （9 分）

则 $f'(x)>0$,

故 $f(x)$ 在 $x\in(-1,0]$ 上单调递增. （11 分）

又因为 $f(0)=0$, （12 分）

所以 $f(x)$ 在 $x\in(-1,0]$ 上的零点个数为 1. （13 分）

16. **解**:(1)完善 2×2 列联表如下:

	对计算机专业感兴趣	对计算机专业不感兴趣	合计
男同学	40	10	50
女同学	30	20	50
合计	70	30	100

（3 分）

则 $\chi^2=\frac{100\times(40\times20-10\times30)^2}{50\times50\times30\times70}=\frac{100}{21}\approx 4.762<6.635$, （5 分）

故根据小概率值 $\alpha=0.01$ 的独立性检验,不能认为该校学生是否对计算机专业感兴趣与性别有关. （7 分）

(2)由(1)知,对计算机专业感兴趣的样本频率为 $\frac{70}{100}=0.7$, （9 分）

设抽取的 30 名学生中对计算机专业感兴趣的学生的人数为 X,所以随机变量 $X\sim B(30,0.7)$, （11 分）

故 $E(X)=30\times0.7=21$, （13 分）

$D(X)=30\times0.7\times(1-0.7)=6.3$. （15 分）

17. **解**:(1)证明:由题可知 $AB/\!/CD$, $AB\not\subset$ 平面 PCD, $CD\subset$ 平面 PCD,

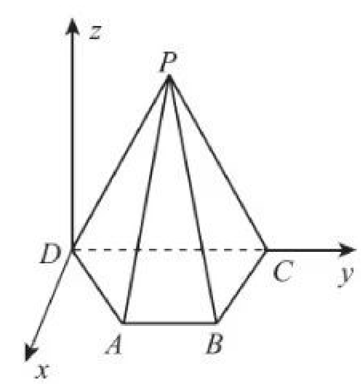
$\therefore AB/\!/$ 平面 PCD. （2 分）

又 $AB\subset$ 平面 PAB,平面 $PAB\cap$ 平面 $PCD=l$, $\therefore l/\!/AB$. （4 分）

又 $l\not\subset$ 平面 $ABCD$, $AB\subset$ 平面 $ABCD$,

$\therefore l/\!/$ 平面 $ABCD$. （6 分）

(2)以 D 为原点,平面 $ABCD$ 内垂直于 DC 的直线为 x 轴, DC 所在直线为 y 轴,垂直于平面 $ABCD$ 的直线为 z 轴,建立如图所示的空间直角坐标系,



设等腰梯形 $ABCD$ 的高为 $a(a>0)$,则 $D(0,0,0)$, $A\left(a,\frac{1}{2},0\right)$, $B\left(a,\frac{3}{2},0\right)$, $C(0,2,0)$, $P(0,1,\sqrt{3})$, （9 分）

设 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$ 为平面 PAD 的法向量,则

$$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DA}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DP}=0,\end{cases} \text{即} \begin{cases}ax+\frac{1}{2}y=0,\\ y+\sqrt{3}z=0,\end{cases}$$

令 $y=-1$ 得 $\boldsymbol{n}=\left(\frac{1}{2a},-1,\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ 为平面 PAD 的一个法向量. （11 分）

又 $l/\!/AB$,则可得直线 l 的一个平行向量 $\boldsymbol{m}=(0,1,0)$, （13 分）

设 θ 为 l 与平面 PAD 的夹角,

由 $\sin\theta=|\cos\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}\rangle|=\frac{1}{|\boldsymbol{n}|\times1}=\frac{1}{2}$,

关注北京高考在线官方微信: 京考一点通 (微信号:bjgkzx), 获取更多试题资料及排名分析信息。

解得 $a=\frac{\sqrt{6}}{8}$. (14 分)

$\therefore V_{P\text{-}ABCD}=\frac{1}{3}\times\sqrt{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{6}}{8}\times(1+2)=$

$\frac{3\sqrt{2}}{16}$. (15 分)

18. **解**:(1)由题意可得 $|AB|=4=2a$,

则 $a=2$, (1 分)

又点 $\left(1,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 在 C 上,所以 $\frac{1}{4}+\frac{3}{4b^2}=1$,

解得 $b=1$, (3 分)

故椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$. (5 分)

(2)证明:由(1)可得,$A(-2,0)$,$B(2,0)$,

易知直线 AE 与直线 BF 的斜率一定存在且不为 0,

设直线 AE 的方程为 $y=t(x+2)(t\neq0)$, (6 分)

直线 BF 的方程为 $y=-3t(x-2)$. (7 分)

由 $\begin{cases}y=t(x+2),\\ \frac{x^2}{4}+y^2=1,\end{cases}$

得 $(4t^2+1)x^2+16t^2x+16t^2-4=0$,

所以 $x_Ax_E=\frac{16t^2-4}{4t^2+1}$, (9 分)

故 $x_E=\frac{-8t^2+2}{4t^2+1}$,则 $y_E=\frac{4t}{4t^2+1}$,

故 $E\left(\frac{-8t^2+2}{4t^2+1},\frac{4t}{4t^2+1}\right)$. (10 分)

由 $\begin{cases}y=-3t(x-2),\\ \frac{x^2}{4}+y^2=1,\end{cases}$

得 $(36t^2+1)x^2-144t^2x+144t^2-4=0$,

所以 $x_Bx_F=\frac{144t^2-4}{36t^2+1}$, (12 分)

故 $x_F=\frac{72t^2-2}{36t^2+1}$,则 $y_F=\frac{12t}{36t^2+1}$,

故 $F\left(\frac{72t^2-2}{36t^2+1},\frac{12t}{36t^2+1}\right)$. (13 分)

若直线 EF 过定点,则根据椭圆的对称性可知直线 EF 所过定点必在 x 轴上,

设定点为 $P(x_0,0)$.

则 $k_{PE}=k_{PF}=\frac{\frac{4t}{4t^2+1}}{\frac{2-8t^2}{4t^2+1}-x_0}=\frac{\frac{12t}{36t^2+1}}{\frac{72t^2-2}{36t^2+1}-x_0}$, (15 分)

即 $\frac{4t}{2-8t^2-x_0(4t^2+1)}=\frac{12t}{72t^2-2-x_0(36t^2+1)}$,

所以 $6-24t^2-3x_0(4t^2+1)=72t^2-2-x_0(36t^2+1)$,

化简可得 $(x_0-4)(12t^2-1)=0$,

故 $x_0=4$,

即直线 EF 过定点 $(4,0)$. (17 分)

19. **解**:(1)①因为 $A(1,2,1)$,$B(0,-1,1)$,

则 $\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&2&1\\0&-1&1\end{vmatrix}=2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{0}+(-1)\boldsymbol{k}-\boldsymbol{0}-\boldsymbol{j}-(-1)\boldsymbol{i}=3\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}=(3,-1,-1)$. (1 分)

②证明:设 $A(x_1,y_1,z_1)$,$B(x_2,y_2,z_2)$,

则 $\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}=y_1z_2\boldsymbol{i}+z_1x_2\boldsymbol{j}+x_1y_2\boldsymbol{k}-x_2y_1\boldsymbol{k}-z_2x_1\boldsymbol{j}-y_2z_1\boldsymbol{i}=(y_1z_2-y_2z_1,z_1x_2-z_2x_1,x_1y_2-x_2y_1)$, (2 分)

将 x_2 与 x_1 互换,y_2 与 y_1 互换,z_2 与 z_1 互换,

可得 $\overrightarrow{OB}\times\overrightarrow{OA}=(y_2z_1-y_1z_2,z_2x_1-z_1x_2,x_2y_1-x_1y_2)$, (3 分)

故 $\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OB}\times\overrightarrow{OA}=(0,0,0)=\boldsymbol{0}$. (4 分)

(2)证明:因为 $\sin\angle AOB=\sqrt{1-\cos^2\angle AOB}=\sqrt{1-\frac{(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})^2}{|\overrightarrow{OA}|^2|\overrightarrow{OB}|^2}}=$

关注北京高考在线官方微信: 京考一点通 (微信号:bjgkzx), 获取更多试题资料及排名分析信息。

$\dfrac{\sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2|\overrightarrow{OB}|^2-(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})^2}}{|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|}$，（5 分）

故 $S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\cdot\sin\angle AOB=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2|\overrightarrow{OB}|^2-(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})^2}$，（6 分）

故要证 $S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}|$，

只需证 $|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}|=\sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2|\overrightarrow{OB}|^2-(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})^2}$，

即证 $|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}|^2=|\overrightarrow{OA}|^2|\overrightarrow{OB}|^2-(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})^2$.（7 分）

由(1)$\overrightarrow{OA}=(x_1,y_1,z_1)$，$\overrightarrow{OB}=(x_2,y_2,z_2)$，$\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}=(y_1z_2-y_2z_1,z_1x_2-z_2x_1,x_1y_2-x_2y_1)$，

故 $|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}|^2=(y_1z_2-y_2z_1)^2+(z_1x_2-z_2x_1)^2+(x_1y_2-x_2y_1)^2$，（8 分）

又 $|\overrightarrow{OA}|^2=x_1^2+y_1^2+z_1^2$，（9 分）

$|\overrightarrow{OB}|^2=x_2^2+y_2^2+z_2^2$，（10 分）

$(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})^2=(x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2)^2$，（11 分）

则 $|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}|^2=|\overrightarrow{OA}|^2|\overrightarrow{OB}|^2-(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})^2$ 成立，

故 $S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}|$.（13 分）

(3)证明：由(2)$S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}|$，

得$(\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB})^2=|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}|^2=\frac{1}{2}|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}|\cdot 2|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}|=S_{\triangle AOB}\cdot 2|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}|$，（16 分）

故$(\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB})^2=\frac{1}{3}S_{\triangle AOB}\cdot|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}|\times 6$，

故$(\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB})^2$的几何意义表示以$\triangle AOB$为底面、$|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}|$为高的三棱锥体积的6倍.（17 分）

关注北京高考在线官方微信： 京考一点通（微信号:bjgkzx）， 获取更多试题资料及排名分析信息。