试卷类型：A

2023年深圳市高三年级第二次调研考试

数　学

本试卷共6页，22小题，满分150分。考试用时120分钟。

注意事项：

1．答题前，考生请务必用黑色字迹钢笔或签字笔将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。用2B铅笔将试卷类型（A）填涂在答题卡相应位置上。将条形码横贴在答题卡右上角“条形码粘贴处”。

2．作答选择题时，选出每小题答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案，答案不能答在试卷上。

3．非选择题必须用黑色字迹钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新的答案；不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答的答案无效。

4．考生必须保持答题卡的整洁。考试结束后，将试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．已知集合 $A=\{2,0\}$，$B=\{2,3\}$，则 $\complement_{A\cup B}(A\cap B)=$

A．$\{0\}$　　B．$\{2\}$　　C．$\{3\}$　　D．$\{0,3\}$

2．已知函数 $f(x)=\begin{cases}3^x, x\leqslant 1,\\ \log_3 x, x>1,\end{cases}$ 则 $f(f(2))=$

A．2　　B．-2　　C．$\frac{1}{2}$　　D．$-\frac{1}{2}$

3．设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $S_{10}=20$，$S_{20}=10$，则 $S_{30}=$

A．0　　B．-10　　C．-30　　D．-40

4．设表面积相等的正方体、正四面体和球的体积分别为 V_1、V_2 和 V_3，则

A．$V_1<V_2<V_3$　　B．$V_2<V_1<V_3$　　C．$V_3<V_1<V_2$　　D．$V_3<V_2<V_1$

5．已知 $\triangle OAB$ 中，$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{CA}$，$\overrightarrow{OD}=2\overrightarrow{DB}$，$AD$ 与 BC 相交于点 M，$\overrightarrow{OM}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$，则有序数对 $(x,y)=$

A．$(\frac{1}{2},\frac{1}{3})$　　B．$(\frac{1}{3},\frac{1}{2})$　　C．$(\frac{1}{2},\frac{1}{4})$　　D．$(\frac{1}{4},\frac{1}{2})$

6. 从 1，2，3，4，5 中随机选取三个不同的数，若这三个数之积为偶数，则它们之和大于 8 的概率为

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{2}{3}$　　C. $\frac{4}{9}$　　D. $\frac{5}{9}$

7. 设椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，直线 l 过点 F_1．若点 F_2 关于 l 的对称点 P 恰好在椭圆 C 上，且 $\overrightarrow{F_1P}\cdot\overrightarrow{F_1F_2}=\frac{1}{2}a^2$，则 C 的离心率为

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{2}{3}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{2}{5}$

8. 已知 $\varepsilon>0$，$x,y\in(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})$，且 $e^{x+\varepsilon}\sin y=e^y\sin x$，则下列关系式恒成立的为

A. $\cos x\leqslant\cos y$　　B. $\cos x\geqslant\cos y$　　C. $\sin x\leqslant\sin y$　　D. $\sin x\geqslant\sin y$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 为了研究 y 关于 x 的线性相关关系，收集了 5 组样本数据（见下表）：

x	1	2	3	4	5
y	0.5	0.8	1	1.2	1.5

假设经验回归方程为 $\hat{y}=\hat{b}x+0.28$，则

A. $\hat{b}=0.24$

B. 当 $x=8$ 时，y 的预测值为 2.2

C. 样本数据 y 的 40%分位数为 0.8

D. 去掉样本点 $(3,1)$ 后，x 与 y 的样本相关系数 r 不变

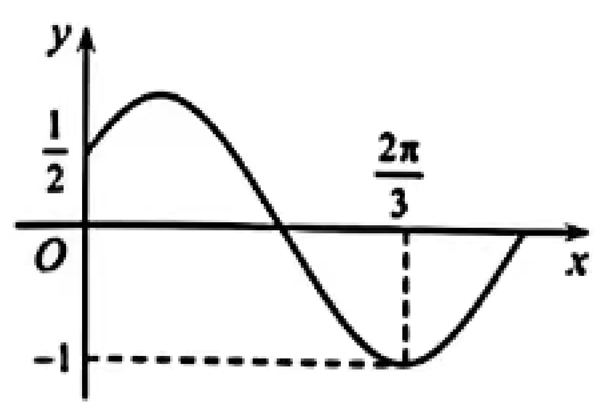
10. 已知 $f(x)$ 是定义在闭区间上的偶函数，且在 y 轴右侧的图象是函数 $y=\sin(\omega x+\varphi)$ $(\omega>0,0<\varphi<\pi)$ 图象的一部分（如图所示），则

A. $f(x)$ 的定义域为 $[-\pi,\pi]$

B. 当 $x=\frac{\pi}{6}$ 时，$f(x)$ 取得最大值

C. 当 $x<0$ 时，$f(x)$ 的单调递增区间为 $[-\frac{2\pi}{3},-\frac{\pi}{6}]$

D. 当 $x<0$ 时，$f(x)$ 有且只有两个零点 $-\frac{5\pi}{12}$ 和 $-\frac{11\pi}{12}$



（第 10 题图）

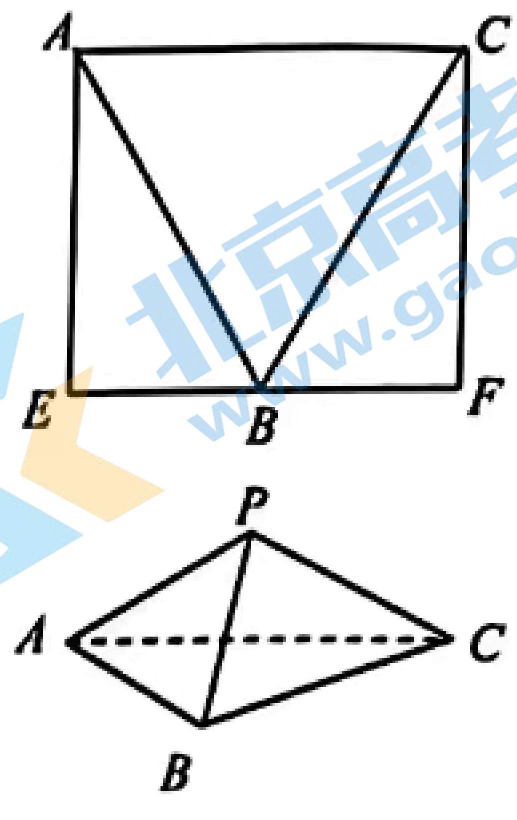
11．如图，在矩形 $AEFC$ 中，$AE=2\sqrt{3}$，$EF=4$，B 为 EF 中点．现分别沿 AB、BC 将 $\triangle ABE$、$\triangle BCF$ 翻折，使点 E、F 重合，记为点 P，翻折后得到三棱锥 $P-ABC$，则

A．三棱锥 $P-ABC$ 的体积为 $\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$

B．直线 PA 与直线 BC 所成角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$

C．直线 PA 与平面 PBC 所成角的正弦值为 $\dfrac{1}{3}$

D．三棱锥 $P-ABC$ 外接球的半径为 $\dfrac{\sqrt{22}}{2}$



（第 11 题图）

12．设抛物线 $C:y=x^2$ 的焦点为 F，过抛物线 C 上不同的两点 A，B 分别作 C 的切线，两条切线的交点为 P，AB 的中点为 Q，则

A．$PQ\perp x$ 轴　　B．$PF\perp AB$

C．$\angle PFA=\angle PFB$　　D．$|AF|+|BF|=2|PF|$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分

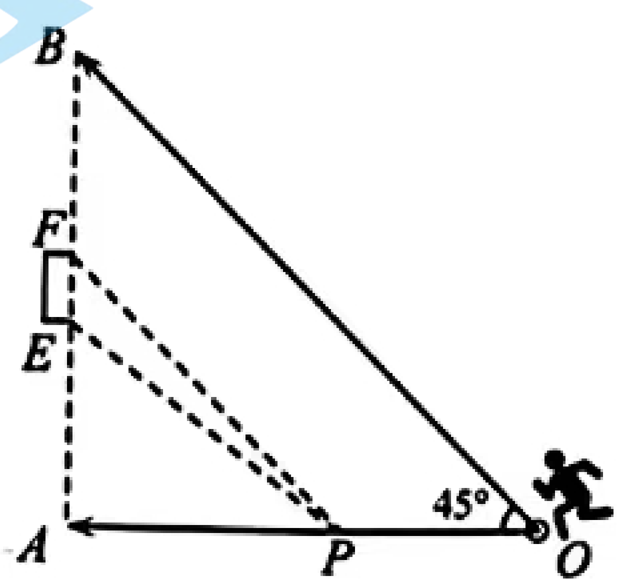
13．已知复数 z 满足 $z^2+z+1=0$，则 $z\cdot\overline{z}=$__________

14．若 $X\sim N(9,2^2)$，则 $P(7<X<13)=$__________（精确到 0.01）．

参考数据：若 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则 $P(|X-\mu|<\sigma)\approx 0.683$，$P(|X-\mu|<2\sigma)\approx 0.955$．

15．已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，若 $f(x+1)-2$ 为奇函数，且 $f(1-x)=f(3+x)$，则 $f(2023)=$__________．

16．足球是一项很受欢迎的体育运动．如图，某标准足球场的底线宽 $AB=72$ 码，球门宽 $EF=8$ 码，球门位于底线的正中位置．在比赛过程中，攻方球员带球运动时，往往需要找到一点 P，使得 $\angle EPF$ 最大，这时候点 P 就是最佳射门位置．当攻方球员甲位于边线上的点 O 处（$OA=AB$，$OA\perp AB$）时，根据场上形势判断，有 $\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$ 两条进攻线路可供选择．若选择线路 $\overrightarrow{OA}$，则甲带球______码时，到达最佳射门位置；若选择线路 $\overrightarrow{OB}$，则甲带球______码时，到达最佳射门位置．



（第 16 题图）

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（10 分）

已知 a,b,c 分别为 $\triangle ABC$ 三个内角 A,B,C 的对边，且 $\sin(A-B)=2\sin C$．

（1）证明：$a^2=b^2+2c^2$；

（2）若 $A=\dfrac{2\pi}{3}$，$a=3$，$\overrightarrow{BC}=3\overrightarrow{BM}$，求 AM 的长度．

18.（12 分）

飞盘运动是一项入门简单，又具有极强的趣味性和社交性的体育运动，目前已经成为了年轻人运动的新潮流．某俱乐部为了解年轻人爱好飞盘运动是否与性别有关，对该地区的年轻人进行了简单随机抽样，得到如下列联表：

性别	飞盘运动		合计
	不爱好	爱好	
男	6	16	22
女	4	24	28
合计	10	40	50

（1）在上述爱好飞盘运动的年轻人中按照性别采用分层抽样的方法抽取 10 人，再从这 10 人中随机选取 3 人访谈，记参与访谈的男性人数为 X，求 X 的分布列和数学期望；

（2）依据小概率值 $\alpha=0.01$ 的独立性检验，能否认为爱好飞盘运动与性别有关联？如果把上表中所有数据都扩大到原来的 10 倍，在相同的检验标准下，再用独立性检验推断爱好飞盘运动与性别之间的关联性，结论还一样吗？请解释其中的原因．

附：$\chi^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中 $n=a+b+c+d$．

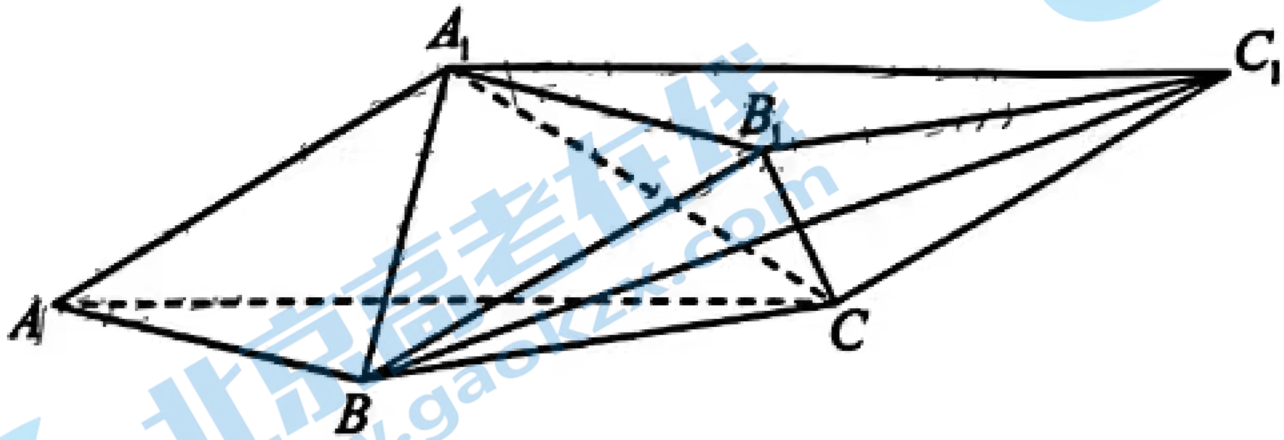
α	0.1	0.01	0.001
x_α	2.706	6.635	10.828

19.（12分）

在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AB=BC=2$，$\angle ABC=\frac{2\pi}{3}$，$A_1C_1\perp A_1B$.

（1）证明：$A_1A=A_1C$；

（2）若 $A_1A=2$，$BC_1=\sqrt{14}$，求平面 A_1CB_1 与平面 BCC_1B_1 夹角的余弦值.



（第19题图）

20.（12分）

已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=3$，$a_na_{n+1}=9\times 2^{2n-1}$，$n\in \mathbf{N}^*$.

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）证明：数列 $\{a_n\}$ 中的任意三项均不能构成等差数列.

21.（12 分）

已知双曲线 $C:x^2-y^2=1$，点 M 为双曲线 C 右支上一点，A、B 为双曲线 C 的左、右顶点，直线 AM 与 y 轴交于点 D，点 Q 在 x 轴正半轴上，点 E 在 y 轴上.

（1）若点 $M(2,\sqrt{3})$，$Q(2,0)$，过点 Q 作 BM 的垂线 l 交该双曲线 C 于 S,T 两点，求 $\triangle OST$ 的面积.

（2）若点 M 不与 B 重合，从下面①②③中选取两个作为条件，证明另外一个成立.

①$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{DE}$；②$BM\perp EQ$；③$|OQ|=2$.

注：若选择不同的组合分别解答，则按第一个解答计分.

22.（12 分）

已知函数 $f(x)=e^{mx-1}-x$.

（1）讨论函数 $f(x)$ 的单调性；

（2）当 $m>0$ 时，函数 $g(x)=f(x)-\dfrac{\ln x+1}{m}+x$ 恰有两个零点.

（i）求 m 的取值范围；

（ii）证明：$g(x)>m^{\frac{1}{m}}-m^{-\frac{1}{m}}$.

2023 年深圳市高三年级第二次调研考试

数学试题参考答案及评分标准

2023．4

本试卷 22 小题，满分 150 分。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	D	A	C	B	D	D	C	A

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

题号	9	10	11	12
答案	ABD	BCD	BD	AC

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13． 1　　14． 0.82　　15． 2　　16． $72-16\sqrt{5}$，$72\sqrt{2}-16\sqrt{5}$

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17．（10 分）

解：（1）∵ $\sin(A-B)=2\sin C=2\sin[\pi-(A+B)]=\sin(A+B)$，……………………1 分

∴ $\sin A\cos B-\cos A\sin B=2(\sin A\cos B+\cos A\sin B)$，

∴ $\sin A\cos B+3\cos A\sin B=0$，……………………………………3 分

由正弦定理和余弦定理得 $a\times\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}+3b\times\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=0$，……………………4 分

化简得 $a^2=b^2+2c^2$．……………………………………5 分

（2）（法 1）在△ABC 中，由余弦定理得 $b^2+c^2+bc=9$，……………………6 分

又∵ $b^2+2c^2=a^2=9$，……………………………………7 分

∴ $b=c=\sqrt{3}$，……………………………………8 分

由 $\overrightarrow{BC}=3\overrightarrow{BM}$，得 $BM=\dfrac{a}{3}$，

在△ABM 中，由余弦定理得 $AM^2=c^2+(\dfrac{1}{3}a)^2-2c\times\dfrac{1}{3}a\times\cos B$，

∴ $AM=1$．……………………………………10 分

（法 2）在△ABC 中，由余弦定理得 $b^2+c^2+bc=9$，……………………6 分

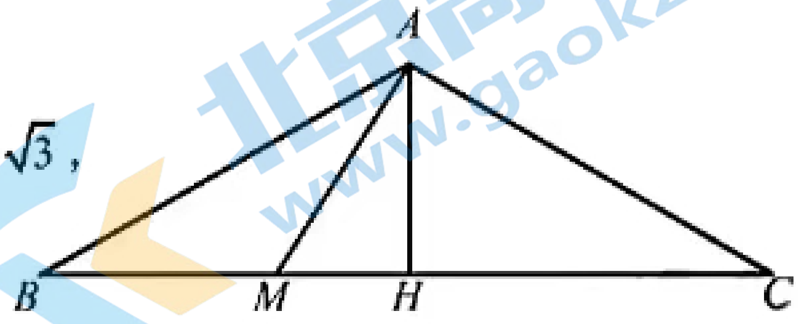
又∵ $b^2+2c^2=a^2=9$，……………………………………7 分

$\therefore b=c=\sqrt{3}$ ………………………………………………………………………… 8 分

由 $\overrightarrow{BC}=3\overrightarrow{BM}$，得 $BM=1$，

过点 A 作 $AH\perp BC$ 于 H，则 $AH=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\tan\angle AMH=\dfrac{AH}{MH}=\sqrt{3}$，

$\because \angle AMH\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，$\therefore \angle AMH=\dfrac{\pi}{3}$，



（第 17 题图）

$\therefore AM=2MH=1$． ………………………………………………………… 10 分

18.（12 分）

解：（1）样本中爱好飞盘运动的年轻人中男性 16 人，女性 24 人，比例为 4：6，按照性别采用分层抽样的方法抽取 10 人，则抽取男性 4 人，女性 6 人． ……………………………… 1 分

随机变量 X 的取值为：0，1，2，3．

$P(X=0)=\dfrac{C_6^3}{C_{10}^3}=\dfrac{1}{6}$， ………………………………………………………… 2 分

$P(X=1)=\dfrac{C_4^1C_6^2}{C_{10}^3}=\dfrac{1}{2}$， ………………………………………………………… 3 分

$P(X=2)=\dfrac{C_4^2C_6^1}{C_{10}^3}=\dfrac{3}{10}$， ………………………………………………………… 4 分

$P(X=3)=\dfrac{C_4^3}{C_{10}^3}=\dfrac{1}{30}$， ………………………………………………………… 5 分

随机变量 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\dfrac{1}{6}$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{3}{10}$	$\dfrac{1}{30}$

随机变量 X 的数学期望 $E(X)=0\times\dfrac{1}{6}+1\times\dfrac{1}{2}+2\times\dfrac{3}{10}+3\times\dfrac{1}{30}=\dfrac{6}{5}$． ………………………… 6 分

（2）零假设为 H_0：爱好飞盘运动与性别无关联． ………………………………………… 7 分

根据列联表中的数据，经计算得到 $\chi^2=\dfrac{50\times(6\times24-4\times16)^2}{10\times40\times22\times28}\approx1.299<6.635=x_{0.01}$， ………… 9 分

根据小概率值 $\alpha=0.01$ 的独立性检验，没有充分证据推断 H_0 不成立，因此可以认为 H_0 成立，即认为爱好飞盘运动与性别无关联． ………………………………………………………… 10 分

列联表中所有数据都扩大到原来的 10 倍后，$\chi^2=\dfrac{500\times(60\times240-40\times160)^2}{100\times400\times220\times280}\approx12.99>6.635=x_{0.01}$，

根据小概率值 $\alpha=0.01$ 的独立性检验，推断 H_0 成立，即认为爱好飞盘运动与性别有关联．

所以，结论不一样，原因是每个数据都扩大为原来的 10 倍，相当于样本量变大为原来的 10 倍，导致推断结论发生了变化． ………………………………………………………… 12 分

19．（12 分）

证明：（1）设 AC 的中点为 O，连接 OA_1，OB，

因为 $AB=BC$，所以 $AC\perp OB$，……………………………………………………………………1 分

又因为 $A_1C_1//AC$，且 $A_1C_1\perp A_1B$，所以 $AC\perp A_1B$，……………………………………2 分

因为 A_1B，$OB\subset$ 平面 OBA_1，且 $A_1B\cap OB=B$，

所以 $AC\perp$ 平面 OBA_1．……………………………………………………………………3 分

因为 $OA_1\subset$ 平面 OBA_1，

所以 $AC\perp OA_1$，……………………………………………………………………………4 分

又因为 O 是 AC 的中点，

所以 $A_1A=A_1C$．………………………………………………………………………………5 分

解：（2）（法 1）在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理求得 $AC=2\sqrt{3}$，则 $A_1C_1=AC=2\sqrt{3}$．

因为 $A_1C_1\perp A_1B$，所以 $A_1B^2+A_1C_1^2=BC_1^2$，解得 $A_1B=\sqrt{2}$．…………………………6 分

在 $Rt\triangle AOA_1$ 和 $Rt\triangle AOB$ 中，可知 $A_1O=OB=1$．

在 $\triangle OBA_1$ 中，$OA_1^2+OB^2=A_1B^2$，因此 $A_1O\perp OB$，……………………………………7

由（1）知，$A_1O\perp AC$，且 AC，$OB\subset$ 平面 ABC，且 $AC\cap OB=O$，

所以 $A_1O\perp$ 平面 ABC．………………………………………………………………………8 分

以 $\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{OA_1}$ 所在直线分别为 x 轴，y 轴，z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，则 $A_1(0,0,1)$，

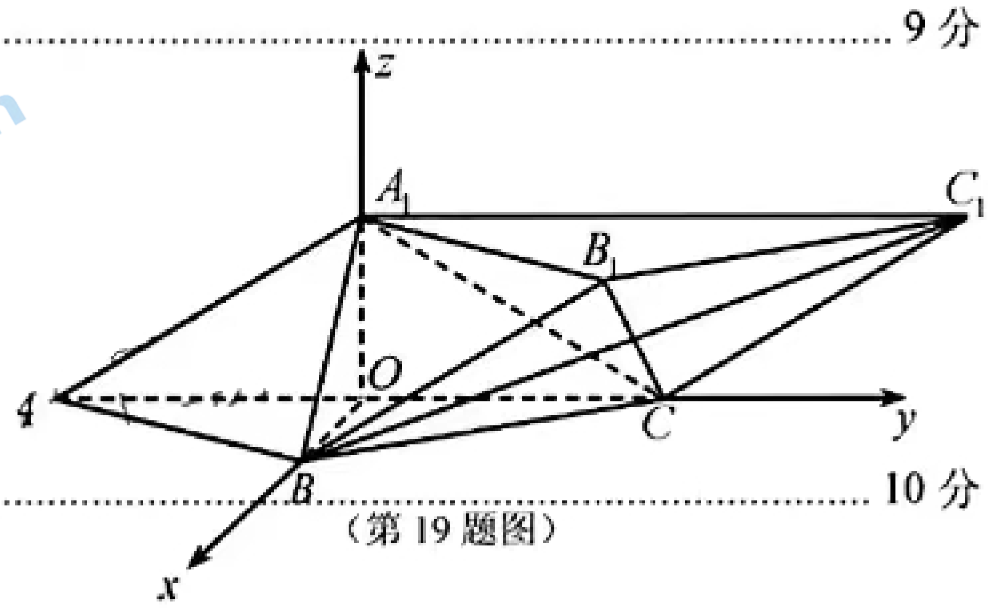
$B(1,0,0)$，$C(0,\sqrt{3},0)$，$A(0,-\sqrt{3},0)$．所以 $\overrightarrow{A_1B_1}=\overrightarrow{AB}=(1,\sqrt{3},0)$，$\overrightarrow{A_1C}=(0,\sqrt{3},-1)$，$\overrightarrow{BC}=(-1,\sqrt{3},0)$，

$\overrightarrow{BB_1}=\overrightarrow{AA_1}=(0,\sqrt{3},1)$．……………………………………………………………9 分

设平面 A_1CB_1 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{A_1B_1}=0\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{A_1C}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}x_1+\sqrt{3}y_1=0\\ \sqrt{3}y_1-z_1=0\end{cases}$

令 $x_1=\sqrt{3}$，得 $\boldsymbol{m}=(\sqrt{3},\ -1,\ -\sqrt{3})$，……………………………………10 分



（第 19 题图）

设平面 BCC_1B_1 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_2,y_2,z_2)$，

则 $\begin{cases} \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BC}=0 \\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BB_1}=0 \end{cases}$，即 $\begin{cases} -x_2+\sqrt{3}y_2=0 \\ \sqrt{3}y_2+z_2=0 \end{cases}$，

令 $x_2=\sqrt{3}$，得 $\boldsymbol{n}=(\sqrt{3},1,-\sqrt{3})$． ....11 分

设平面 A_1CB_1 与平面 BCC_1B_1 夹角为 θ，则 $\cos\theta=\dfrac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{5}{7}$，

所以平面 A_1CB_1 与平面 BCC_1B_1 夹角的余弦值为 $\dfrac{5}{7}$． .... 12 分

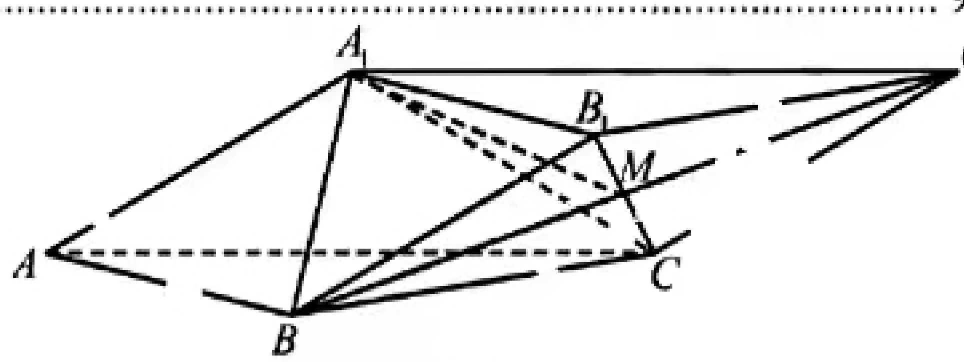
（法 2）设 BC_1 与 B_1C 相交于点 M．同（法 1）可求得 $A_1B_1=A_1C=B_1C_1=CC_1=2$， .... 7 分

因此，$C_1M\perp B_1C$，$A_1M\perp B_1C$，所以 $\angle A_1MC_1$ 是平面 A_1CB_1 与平面 BCC_1B_1 的夹角（或其补角），

.... 9 分

因为 $A_1M=C_1M=\dfrac{\sqrt{14}}{2}$，$A_1C_1=2\sqrt{3}$，

在 $\triangle A_1MC_1$ 中，由余弦定理可得，



（第 19 题图）

$\cos\angle A_1MC_1=\dfrac{A_1M^2+C_1M^2-A_1C_1^2}{2A_1M\times C_1M}=-\dfrac{5}{7}$， ....11 分

所以平面 A_1CB_1 与平面 BCC_1B_1 夹角的余弦值为 $\dfrac{5}{7}$． .... 12 分

20．（12 分）

解：（1）由 $a_na_{n+1}=9\times2^{2n-1}$，得 $a_{n+1}a_{n+2}=9\times2^{2n+1}$， .... 1 分

以上两式相比，得 $\dfrac{a_{n+2}}{a_n}=4$， .... 2 分

由 $a_1\times a_2=18$，$a_1=3$，得 $a_2=6$， .... 3 分

所以，数列 $\{a_{2n-1}\}$ 是首项为3，公比 4 为的等比数列，$a_{2n-1}=3\times4^{n-1}=3\times2^{(2n-1)-1}$， .... 4 分

数列 $\{a_{2n}\}$ 是首项为6，公比为 4 的等比数列，$a_{2n}=6\times4^{n-1}=3\times2^{2n-1}$， .... 5 分

综上，数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=3\times2^{n-1}$，$n\in\mathbf{N}$． .... 6 分

（2）假设数列 $\{a_n\}$ 中存在三项数列 a_m，a_k，a_p（其中 $m<k<p$）成等差数列，

则 $a_m+a_p=2a_k$， .... 7 分

由（1）得 $3\times2^{m-1}+3\times2^{p-1}=6\times2^{k-1}$，即 $2^{m-1}+2^{p-1}=2^k$， .... 8 分

两边同时除以 2^{m-1}，得 $1+2^{p-m}=2^{k-m+1}$，（*）

$\because m<k<p$，且 $m,k,p\in\mathbf{N}^*$，$\therefore k-m+1,\ p-m\in\mathbf{N}^*$，

$\therefore$（*）式左边为奇数，右边为偶数

$\therefore$（*）等式不成立，假设不成立.

所以，数列 $\{a_n\}$ 中得任意三项均不能构成等差数列. .... 12 分

21.（12 分）

解：（1）（法 1）因为点 $M(2,\sqrt{3})$，$B(1,0)$，

直线 BM 的斜率 $k_{BM}=\dfrac{\sqrt{3}-0}{2-1}=\sqrt{3}$，

所以，垂线 l 的方程为 $x=-\sqrt{3}y+2$， .... 1 分

设点 $S(x_1,y_1)$，$T(x_2,y_2)$，

联立 $\begin{cases}x=-\sqrt{3}y+2\\x^2-y^2=1\end{cases}$，得 $2y^2-4\sqrt{3}y+3=0$， .... 2 分

则 $\Delta=(-4\sqrt{3})^2-4\times2\times3=24$，$\begin{cases}y_1+y_2=2\sqrt{3}\\y_1y_2=\dfrac{3}{2}\end{cases}$， .... 3 分

即 $|ST|=\sqrt{1+t^2}\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=2\sqrt{6}$， .... 4 分

原点 O 到直线 l 的距离为 $d=1$，

所以，$\triangle OST$ 的面积为 $\dfrac{1}{2}\times|ST|\times d=\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{6}\times1=\sqrt{6}$. .... 5 分

（法 2）因为点 M 的坐标为 $M(2,\sqrt{3})$，点 B 的坐标为 $B(1,0)$ 直线 BM 的斜率，

$k_{BM}=\dfrac{\sqrt{3}-0}{2-1}=\sqrt{3}$，所以垂线 l 的方程为 $x=-\sqrt{3}y+2$， .... 1 分

设点 $S(x_1,y_1)$，$T(x_2,y_2)$，

联立 $\begin{cases}x=-\sqrt{3}y+2\\x^2-y^2=1\end{cases}$，得 $2x^2+4x-7=0$， .... 2 分

则 $\Delta=4^2+4\times2\times7=72$，$\begin{cases}x_1+x_2=-2\\x_1x_2=-\dfrac{7}{2}\end{cases}$， .... 3 分

即 $|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=3\sqrt{2}$， .... 4 分

垂线 l 与 y 轴的交点为 $(0,\dfrac{2\sqrt{3}}{3})$，

所以，$\triangle OST$ 的面积为 $\frac{1}{2}\times|x_1-x_2|\times\frac{2\sqrt{3}}{3}=\frac{1}{2}\times3\sqrt{2}\times\frac{2\sqrt{3}}{3}=\sqrt{6}$. .... 5 分

（2）①②作为条件，③作为结论

令点 $D(0,y_D)$，$M(x_0,y_0)(x_0>1)$，

由题意得 $B(1,0)$，$A(-1,0)$，

$\because A,D,M$ 三点共线，

$\therefore \frac{y_0}{x_0+1}=y_D$，............ 7 分

又 $\because \overrightarrow{OD}=\overrightarrow{DE}$，

$\therefore$ 点 E 的坐标为 $E(0,\frac{2y_0}{x_0+1})$，............ 8 分

$\therefore$ 直线 BM 的斜率 $k_{BM}=\frac{y_0}{x_0-1}$，

$\because BM\perp EQ$，

$\therefore k_{EQ}=-\frac{1}{k_{BM}}=\frac{1-x_0}{y_0}$

设点 $Q(x_Q,0)$，

$\because$ 直线 EQ 的斜率 $k_{EQ}=\frac{1-x_0}{y_0}=\frac{\frac{2y_0}{x_0+1}}{-x_Q}$，............ 10 分

$\therefore x_Q=\frac{2y_0^2}{x_0^2-1}=\frac{2y_0^2}{y_0^2}=2$，

$\therefore |OQ|=2$. .... 12 分

①③作为条件，②作为结论

令点 $D(0,y_D)$，$M(x_0,y_0)(x_0>1)$，

由已知点 B 的坐标为 $B(1,0)$，$A(-1,0)$，

$\because A,D,M$ 三点共线，

$\therefore \frac{y_0}{x_0+1}=y_D$，............ 7 分

又 $\because \overrightarrow{OD}=\overrightarrow{DE}$，

$\therefore$ 点 E 的坐标为 $E(0,\frac{2y_0}{x_0+1})$，............ 8 分

又 $\because |OQ|=2$，点 Q 在 x 轴正半轴上，$\therefore Q(2,0)$，

$\therefore k_{EQ}=\frac{\frac{2y_0}{x_0+1}}{-2}=-\frac{y_0}{x_0+1}$，............ 10 分

又$\because k_{BM}=\dfrac{y_0}{x_0-1}$，

$\therefore k_{BM}k_{EQ}=-\dfrac{y_0}{(x_0-1)}\cdot\dfrac{y_0}{(x_0+1)}=-\dfrac{{x_0}^2-1}{{x_0}^2-1}=-1$，

$\therefore BM\perp EQ$. .... 12 分

②③作为条件，①作为结论

令点 $D(0,y_D)$，$B(1,0)$，$M(x_0,y_0)(x_0>1)$，不妨设 $y_0>0$，

$\because A,D,M$ 三点共线，

$y_D=\dfrac{y_0}{x_0+1}>0$，且 ${y_D}^2=\dfrac{y_0^2}{(x_0+1)^2}=\dfrac{x_0^2-1}{(x_0+1)^2}=\dfrac{x_0-1}{x_0+1}$， .... 8 分

$\because$ 点 Q 在 x 轴正半轴上且 $|OQ|=2$，$\therefore$ 点 $Q(2,0)$，

$\because BM\perp EQ$，

$\therefore k_{EQ}=-\dfrac{1}{k_{BM}}=\dfrac{1-x_0}{y_0}$， .... 10 分

又$\because k_{EQ}=\dfrac{y_E-0}{0-2}$，

$\therefore y_E=\dfrac{2(x_0-1)}{y_0}>0$，且 ${y_E}^2=\dfrac{4(x_0-1)^2}{y_0^2}=\dfrac{4(x_0-1)^2}{x_0^2-1}=\dfrac{4(x_0-1)}{x_0+1}$，

$\therefore y_E=2y_D$，即 $\overline{OD}=\overline{DE}$. .... 12 分

22.（12 分）

解：（1）设 $f(x)=e^{mx-1}-x$，$f'(x)=me^{mx-1}-1$， .... 1 分

当 $m\leqslant 0$ 时，$f'(x)=me^{mx-1}-1<0$，

$\therefore f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减； .... 2 分

当 $m>0$ 时，设 $F(x)=me^{mx-1}-1$，$F'(x)=m^2e^{mx-1}>0$，

$\therefore f'(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，

$\therefore$ 当 $x\in(-\infty,\dfrac{1-\ln m}{m})$，$f'(x)<0$，$f(x)$ 在区间 $(-\infty,\dfrac{1-\ln m}{m})$ 上单调递减；

当 $f(x)$ 在 $x\in(\dfrac{1-\ln m}{m},+\infty)$，$f'(x)>0$，$f(x)$ 在区间 $(\dfrac{1-\ln m}{m},+\infty)$ 上单调递增. .... 3 分

（2）（i）$g(x)=e^{mx-1}-\dfrac{\ln x+1}{m}(m>0)$，$g'(x)=me^{mx-1}-\dfrac{1}{mx}=\dfrac{m^2xe^{mx-1}-1}{mx}$，

设 $h(x)=m^2xe^{mx-1}-1$，则 $h'(x)=m^2(mx+1)e^{mx-1}$，

$\because h'(x)>0$，$\therefore h(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

由（1）可知当 $m=1$ 时，则 $f(x)\geqslant f(\frac{1-\ln m}{m})=\frac{\ln m}{m}=\frac{\ln 1}{1}=0$，即 $e^{x-1}\geqslant x$， …………………………4 分

$\therefore h(m^{-\frac{3}{2}}+1)=m^2\cdot(m^{-\frac{3}{2}}+1)\cdot e^{m\cdot(m^{-\frac{3}{2}}+1)-1}-1\geqslant m^2\cdot(m^{-\frac{3}{2}}+1)\cdot m(m^{-\frac{3}{2}}+1)-1$，

$\therefore h(m^{-\frac{3}{2}}+1)>m^2\cdot m^{-\frac{3}{2}}\cdot m\cdot m^{-\frac{3}{2}}-1=0$

又 $\because h(0)=-1$，由零点存在性定理可知，

存在 $x_1\in(0,m^{-\frac{3}{2}}+1)$，使得 $h(x_1)=0$，即 $mx_1e^{mx_1-1}=\frac{1}{m}$，（*）

$\therefore g(x)$ 在区间 $(0,x_1)$ 上单调递减，在区间 $(x_1,+\infty)$ 上单调递增， ……………………………………5 分

当 $m\geqslant 1$ 时，由（*）可知 $g(x_1)=e^{mx_1-1}-\frac{\ln x_1+1}{m}=\frac{1-mx_1(\ln x_1+1)}{m^2x_1}$，且 $mx_1e^{mx_1-1}=\frac{1}{m}\leqslant 1$，

设 $\varphi(x)=xe^{x-1}$，$\varphi'(x)=(x+1)e^{x-1}>0$，则 $\varphi(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

$\because \varphi(1)=1$，$\therefore mx_1\leqslant 1$，又由 $m\geqslant 1$ $\therefore x_1\leqslant\frac{1}{m}\leqslant 1$，

$\therefore 1-mx_1(\ln x_1+1)\geqslant 1-mx_1\geqslant 0$，即 $g(x)\geqslant g(x_1)\geqslant 0$，与条件矛盾， ……………………………6 分

当 $0<m<1$ 时，$g(1)=e^{m-1}-\frac{1}{m}$，

设 $G(x)=e^{x-1}-\frac{1}{x}$，$G'(x)=e^{x-1}+\frac{1}{x^2}>0$，

$\therefore G(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

$\therefore G(x)<G(1)=0$，即 $g(1)<0$，

$\because e^{x-1}\geqslant x$，$\therefore x-1\geqslant\ln x$，即 $\sqrt{x}-1\geqslant\ln\sqrt{x}$，$\therefore 2\sqrt{x}-2\geqslant\ln x$，

则 $g(x)\geqslant mx-\frac{2\sqrt{x}-2+1}{m}>mx-\frac{2\sqrt{x}}{m}$，$\therefore g(\frac{4}{m^4})>m\cdot\frac{4}{m^4}-\frac{2\frac{2}{m^2}}{m}=0$，且 $\frac{4}{m^4}>1$，

当 $0<m<1$ 时，$mx_1e^{mx_1-1}=\frac{1}{m}>1$，

$\therefore$ 由 $\varphi(x)$ 的单调性可知 $mx_1>1$，且 $x_1>\frac{1}{m}>1$，

$\therefore g(x)$ 在区间 $(1,x_1)$ 上单调递减，在区间 $(x_1,+\infty)$ 上单调递增， ……………………………………7 分

$\therefore$ 由零点存在性定理可知，$g(x)$ 在区间 $(1,\frac{4}{m^4})$ 上存在唯一零点，

$g(\frac{1}{e})=e^{\frac{m}{e}-1}-\frac{\ln\frac{1}{e}+1}{m}=e^{\frac{m}{e}-1}>0$，且 $\frac{1}{e}<1$，

$\therefore$由零点存在性定理可知，$g(x)$在区间$(\frac{1}{e},1)$上存在唯一零点，

$\therefore$当$0<m<1$时，$g(x)$恰有两个零点. .... 8 分

（2）（ii）$\because mx_1e^{mx_1-1}=\frac{1}{m}$，即$2\ln m+\ln x_1+mx_1-1=0$，

$\therefore g(x_1)=e^{mx_1-1}-\frac{\ln x_1+1}{m}=\frac{1}{m^2x_1}+x_1+\frac{2\ln m}{m}-\frac{2}{m}$， .... 9 分

由基本不等式可得，$g(x_1)=\frac{1}{m^2x_1}+x_1+\frac{2\ln m}{m}-\frac{2}{m}\geqslant 2\sqrt{\frac{1}{m^2x_1}\cdot x_1}+\frac{2\ln m}{m}-\frac{2}{m}=\frac{2\ln m}{m}$，

由$mx_1e^{mx_1-1}=\frac{1}{m}$，可知若$x_1=\frac{1}{m}$，则$m=1$，与$0<m<1$矛盾，

则$x_1\neq\frac{1}{m}$，

$\therefore g(x)\geqslant g(x_1)>\frac{2\ln m}{m}$， .... 10 分

要证$g(x)>m^{\frac{1}{m}}-m^{-\frac{1}{m}}$，即证$g(x_1)>m^{\frac{1}{m}}-m^{-\frac{1}{m}}$，

设$H(x)=2\ln x-x+\frac{1}{x}$，

则$H'(x)=\frac{2}{x}-1-\frac{1}{x^2}=\frac{-x^2+2x-1}{x^2}=\frac{-(x-1)^2}{x^2}\leqslant 0$，

$\therefore H(x)$在区间$(0,+\infty)$上单调递减，

$\therefore$当$0<x<1$，$H(x)>H(1)=0$， .... 11 分

$\because 0<m<1$，

$\therefore 0<m^{\frac{1}{m}}<1$，

$\therefore \frac{2\ln m}{m}=2\ln m^{\frac{1}{m}}>m^{\frac{1}{m}}-m^{-\frac{1}{m}}$，

又$g(x)\geqslant g(x_1)>\frac{2\ln m}{m}$，

$\therefore g(x)>m^{\frac{1}{m}}-m^{-\frac{1}{m}}$. .... 12 分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 ‘’ 精益求精、专业严谨 ‘’ 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。