

# 第 38 届全国中学生物理竞赛预赛试题参考解答

(2020 年 9 月 4 日 9:00-12:00)

一、选择题 (本题 60 分, 含 5 小题, 每小题 12 分。在每小题给出的 4 个选项中, 有的小题只有一项符合题意, 有的小题有多项符合题意。将符合题意的选项前面的英文字母写在答题纸对应小题后面的括号内。全部选对的得 12 分, 选对但不全的得 6 分, 有选错或不答的得 0 分。)

1. D      2. C      3. C      4. C, D      5. B

二、填空题 (本题 100 分, 每小题 20 分, 每空 10 分。请把答案填在答题纸对应题号后面的横线上。只需给出结果, 不需写出求得结果的过程。)

6. 1.7 km/s, 2.4 km/s      7.  $1:\sqrt{3}, \sqrt{3}:2$       8.  $\frac{2P}{7\mu mg}, \frac{5P}{7m}$   
9.  $\frac{4}{5}V, \frac{273}{298}\left(\frac{4}{5}p - p_1\right) + p_2$       10.  $\frac{\lambda}{2\sin\theta}$  或  $\frac{\lambda}{2\theta}$  或  $\frac{\theta}{2\tan\theta}$ , 上凸

三、计算题 (本题 240 分, 共 6 小题, 每小题 40 分。计算题的解答应写出必要的文字说明、方程式和重要的演算步骤, 只写出最后结果的不能得分。有数值计算的, 答案中必须明确写出数值, 有单位的必须写出单位。)

11. 设物块 a、b 之间的正压力大小为  $N_1$ , 物块 b、c 之间的正压力大小为  $N_2$ , 物块 a 的加速度方向向下, 大小为  $a_a$ ; 物块 c 的加速度方向向右, 大小为  $a_c$ ; 物块 b 沿竖直向下的加速度大小为  $a_{b\text{竖直}}$ , 沿水平向左的加速度大小为  $a_{b\text{水平}}$ 。三个物块的质量均为  $m$ 。由牛顿第二定律有

$$mg - N_1 = ma_a \quad \text{①}$$

$$mg + N_1 - N_2 \cos\theta = ma_{b\text{竖直}} \quad \text{②}$$

$$N_2 \sin\theta = ma_{b\text{水平}} \quad \text{③}$$

$$N_2 \sin\theta = ma_c \quad \text{④}$$

物块运动的加速度大小满足约束条件

$$a_a = a_{b\text{竖直}} \quad \text{⑤}$$

$$\tan\theta = \frac{a_{b\text{竖直}}}{a_{b\text{水平}} + a_c} \quad \text{⑥}$$

联立以上各式得

$$a_a = a_{b\text{竖直}} = \frac{4}{4 + \cot^2\theta} g \quad \text{⑦}$$

$$a_c = a_{b\text{水平}} = \frac{2}{4 \tan \theta + \cot \theta} g \quad (8)$$

[或

物块 **b** 的加速度大小为

$$a_b = \sqrt{a_{b\text{竖直}}^2 + a_{b\text{水平}}^2} = \frac{2g \tan \theta}{\sqrt{1 + 4 \tan^2 \theta}} \quad (7)$$

其方向与水平方向的夹角为

$$\alpha = \arctan(2 \tan \theta) \quad (8)$$

]

$$N_1 = \frac{\cot^2 \theta}{4 + \cot^2 \theta} mg \quad (9)$$

$$N_2 = \frac{2 \cos \theta}{3 \sin^2 \theta + 1} mg \quad (10)$$

**评分标准：** 本题 40 分，①②③④⑤⑥⑦⑧⑨⑩式各 4 分。

12.

(1) 由能量守恒得

$$mg \frac{L}{2} \sin 60^\circ = mg \frac{L}{2} \sin 30^\circ + \frac{1}{2} m v_c^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 \quad (1)$$

式中  $I$  为杆绕其质心的转动惯量

$$I = \frac{1}{12} mL^2 \quad (2)$$

$v_c$  为杆的质心  $C$  的速度， $\omega$  为杆的转动角速度

$$v_c = \omega \frac{L}{2} \quad (3)$$

联立以上各式，解得

$$v_c = \sqrt{\frac{3(\sqrt{3}-1)}{8}} gL \quad (4)$$

(2) 整个杆在恒磁场的横截面内运动，且可视为整个杆以其质心  $C$  的速度  $v_c$  平动与以角速度  $\omega$  绕其质心  $C$  的转动，后者对感应电动势的贡献相互抵消。因此仅考虑杆的平动即可。取直角绝缘导轨的交点为原点，水平与竖直方向的导轨分别为  $x$  轴和  $y$  轴。杆的质心的坐标为

$$x_c = \frac{L}{2} \sin \theta \quad (5)$$

$$y_c = \frac{L}{2} \cos \theta \quad (6)$$

式中  $\theta$  为杆在时刻  $t$  与竖直导轨所成的角度。于是有

$$v_{cx} = \omega \frac{L}{2} \cos \theta \quad (7)$$

$$v_{cy} = -\omega \frac{L}{2} \sin \theta \quad (8)$$

即杆的质心 C 的速度方向由下式确定

$$\tan \alpha \equiv \frac{v_{Cy}}{v_{Cx}} = -\tan \theta \quad (9)$$

即杆的质心 C 的速度方向斜向下，且与水平方向夹角为  $\theta$ ，对于本题有  $\theta = 60^\circ$ 。于是杆两端的感应电动势为

$$\xi = BLv_C \cos 60^\circ = \frac{BLv_C}{2} = \frac{BL}{4} \sqrt{\frac{3(\sqrt{3}-1)}{2}} gL \quad (10)$$

电动势的方向从杆的上端指向下端（即下端为正极）。

**评分标准：**本题 40 分。第（1）问 16 分，①②③④式各 4 分；第（2）问 24 分，⑤⑥⑦⑧⑨⑩式各 4 分。

13. 由对称性知，每个小朋友运动情况是一样的，以小朋友 1 为例

（1）在从小朋友 1 到小朋友的 2 连线方向上，小朋友 1 相对于小朋友 2 的速度分量为

$$v_r = v - v \cos 60^\circ = \frac{v}{2} \quad (1)$$

小朋友 1 追上 2 的时间为

$$t = \frac{l}{v_r} = \frac{2l}{v} \quad (2)$$

（2）从  $t_0$  时刻开始，直至追上前面的小朋友，每个小朋友所跑的路程为

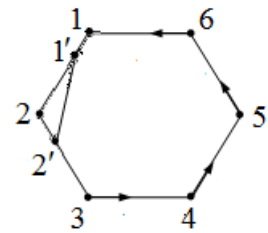
$$s = vt = 2l \quad (3)$$

（3）取小朋友 1 的运动轨迹为自然坐标系，其切向加速度为

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = 0 \quad (4)$$

如解题图 13a 所示，设经  $dt$  时间小朋友 1 运动到 1' 点，小朋友 2 运动到 2' 点，小朋友 1 的速度方向变为从 1' 点指向 2' 点，转过的角度为  $d\theta$ 。由余弦定理得

$$\begin{aligned} l_{1'2'} &= \sqrt{l_{12}^2 + (vdt)^2 - 2l_{12}vdt \cos 120^\circ} \\ &= \sqrt{(l - vdt)^2 + (vdt)^2 - 2(l - vdt)vdt \cos 120^\circ} \\ &= \sqrt{(l - vdt)^2 + (vdt)^2 + (l - vdt)vdt} \\ &= \sqrt{l^2 - 2lvdt + 2(vdt)^2 + lvdt - (vdt)^2} \\ &= \sqrt{l^2 - lvdt + (vdt)^2} \\ &\approx l - \frac{1}{2}vdt \end{aligned} \quad (5)$$



解题图 13a

由正弦定理得

$$\frac{l_{1'2'}}{\sin 120^\circ} = \frac{vdt}{\sin(d\theta)} = \frac{vdt}{d\theta} \quad (6)$$

式中  $d\theta$  为  $\Delta 1'2'2$  中两边  $l_{1'2'}$  与  $l_{1'2}$  之间的夹角。小朋友 1 运动的角速度为

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{v \sin 120^\circ}{l_{1'2'}} = \frac{\sqrt{3}v}{2\left(l - \frac{1}{2}vdt\right)} \approx \frac{\sqrt{3}v}{2l} \quad (7)$$

小朋友 1 运动的法向加速度为

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \omega v = \frac{\sqrt{3}v^2}{2l} \quad (8)$$

则小朋友 1 的加速度大小为

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \frac{\sqrt{3}v^2}{2l} \quad (9)$$

**评分标准：** 本题 40 分，第（1）问 8 分，①②式各 4 分；第（2）问 4 分，③式 4 分；第（3）问 28 分，④⑤式各 6 分，⑥⑦⑧⑨式各 4 分。

14.  $P$  点到主光轴的距离为  $h = 0.30 \text{ cm}$ 。 $P$  点经凹透镜成像在  $P_2$  点，物距（即  $P$  点到主光轴的投影  $P_1$  到  $O$  点的距离） $s_1 = -32.00 \text{ cm}$ ，像方焦距  $f_1' = -20.00 \text{ cm}$ ，设像距为  $s_1'$ ，由成像公式有

$$\frac{1}{s_1'} - \frac{1}{s_1} = \frac{1}{f_1'} \quad (1)$$

可得

$$s_1' = -12.31 \text{ cm} \quad (2)$$

横向放大率

$$\beta_1 = \frac{s_1'}{s_1} = 0.3847 \quad (3)$$

$P_2$  点经凹面镜成像在  $P_3$  点，物距  $s_2 = s_1' - 40.00 \text{ cm} = -52.31 \text{ cm}$ ，曲率半径  $r = -10.00 \text{ cm}$ ，物距设为  $s_2'$ ，由成像公式有

$$\frac{1}{s_2'} + \frac{1}{s_2} = \frac{2}{r} \quad (4)$$

可得

$$s_2' = -5.53 \text{ cm} \quad (5)$$

横向放大率

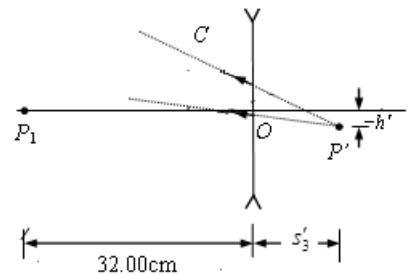
$$\beta_2 = -\frac{s_2'}{s_2} = -0.1057 \quad (6)$$

如解题图 14a， $P_3$  点经凹透镜成像在  $P'$  点，物距

$$s_3 = s_2' + 40.00 \text{ cm} = 34.47 \text{ cm}，$$

像方焦距  $f_3' = 20.00 \text{ cm}$ ，像距设为  $s_3'$ ，

由成像公式有



解题图 14a

$$\frac{1}{s'_3} - \frac{1}{s_3} = \frac{1}{f'_3} \quad (7)$$

可得

$$s'_3 = 12.66 \text{ cm} \quad (8)$$

横向放大率

$$\beta_3 = \frac{s'_3}{s_3} = 0.3673 \quad (9)$$

$P'$ 点到主光轴的距离为

$$h' = h\beta_1\beta_2\beta_3 = -0.0045 \text{ cm} \quad (10)$$

即像点  $P'$  在  $P$  点右方 44.66cm, 光轴下方 0.0045cm 处,

$$\text{所成像为虚像。} \quad (11)$$

**评分标准:** 本题 40 分, ①②③④⑤⑥⑦⑧⑨各 4 分, ⑩⑪各 2 分。若用成像作图法按比例求解并用刻度尺量出相应距离, 结果正确的, 同样给分。

15.

(1) 考虑 A 室。在竖直状态下, 由状态方程得,

$$p_A V_1 = \frac{m}{\mu_1} RT \quad (1)$$

式中  $R$  为普适气体常量。由力学平衡条件得

$$p_A + \frac{Mg}{S} = p \quad (2)$$

根据题意, 这里的  $p$  实际上是水蒸气在温度  $T$  下的饱和蒸汽压。

在水平状态下, 由状态方程得,

$$p'_A V'_1 = \frac{m}{\mu_1} RT \quad (3)$$

式中  $p'_A$  和  $V'_1$  分别为 A 室在水平状态下的压强和容积。由力学平衡条件得

$$p'_A = p \quad (4)$$

由以上各式得, A 室容积减少了

$$\Delta V \equiv V_1 - V'_1 = V_1 - \frac{mRT}{\mu_1 p} = V_1 - \frac{p_A V_1}{p} = \frac{Mg}{pS} V_1 \quad (5)$$

(2) 考虑 B 室。在竖直情况下, 由状态方程得,

$$p V_2 = \frac{m_1}{\mu_2} RT \quad (6)$$

式中  $m_1$  为水蒸气的质量。在水平情况下, 由状态方程得,

$$p(V_2 + \Delta V) = \frac{m_2}{\mu_2} RT \quad (7)$$

式中  $m_2$  为水蒸气的质量。联立以上三个方程得

$$m_1 = \frac{\mu_2 p V_2}{RT} \quad (8)$$

$$m_2 = \frac{\mu_2 p (V_2 + \Delta V)}{RT} = \frac{\mu_2 p (V_2 + \frac{Mg}{pS} V_1)}{RT} \quad (9)$$

由能量守恒得，B 室从外界吸收的热量（汽化热）满足

$$Q = L(m_2 - m_1) + p\Delta V \quad (10)$$

将⑤⑧⑨式代入⑩式得

$$Q = \left( \frac{\mu_2 L}{RT} + 1 \right) \frac{Mg}{S} V_1 \quad (11)$$

由①②式得

$$T = \frac{\mu_1 V_1}{mR} \left( p - \frac{Mg}{S} \right) \quad (12)$$

由⑪⑫式得

$$Q = \left( \frac{\mu_2}{\mu_1} \frac{mL}{pS - Mg} + \frac{V_1}{S} \right) Mg \quad (13)$$

**评分标准：** 本题 40 分，第（1）问 20 分，①②③④⑤式各 4 分；第（2）问 20 分，⑥⑦式各 4 分，⑧⑨式各 2 分，⑩⑬式各 4 分。

16.

（1）考虑图 16b。由运算放大器两个输入端的电势相等以及正向输入端接地，有

$$U_+ = U_- = 0 \quad (1)$$

由于没有电流流入或流出运算放大器，通过  $R_1$  和  $R_f$  的电流  $I$  应相等

$$\frac{U_{in} - U_-}{R_1} = \frac{U_- - U_{out}}{R_f} \quad (2)$$

由①②式得

$$U_{out} = -\frac{R_f}{R_1} U_{in} \quad (3)$$

（2）考虑图 16c。  $U_+$  和  $U_-$  分别满足

$$U_+ = \frac{R_3}{R_2 + R_3} U_{in2} \quad (4)$$

$$U_- = \frac{U_{in1} - U_{out}}{R_1 + R_f} R_f + U_{out} = \frac{R_f}{R_1 + R_f} U_{in1} + \frac{R_1}{R_1 + R_f} U_{out} \quad (5)$$

由④⑤式和  $U_+ = U_-$  得，输出电压  $U_{out}$  与输入信号  $U_{in1}$  和  $U_{in2}$  之间的关系为

$$\frac{R_1}{R_1 + R_f} U_{out} = \frac{R_3}{R_2 + R_3} U_{in2} - \frac{R_f}{R_1 + R_f} U_{in1}$$

或

$$U_{out} = \frac{R_1 + R_f}{R_2 + R_3} \frac{R_3}{R_1} U_{in2} - \frac{R_f}{R_1} U_{in1} \quad (6)$$

将题给条件

$$U_{\text{out}} = U_{\text{in}2} - U_{\text{in}1}$$

代入⑥式有

$$\frac{R_1}{R_1 + R_f}(U_{\text{in}2} - U_{\text{in}1}) = \frac{R_3}{R_2 + R_3}U_{\text{in}2} - \frac{R_f}{R_1 + R_f}U_{\text{in}1}$$

输入电压  $U_{\text{in}1}$  和  $U_{\text{in}2}$  相互独立, 故

$$\frac{R_1}{R_1 + R_f} = \frac{R_3}{R_2 + R_3}$$

$$\frac{R_1}{R_1 + R_f} = \frac{R_f}{R_1 + R_f}$$

或

$$R_1 = R_f \quad (7)$$

$$R_2 = R_3 \quad (8)$$

(3) 考虑图 16b。由运算放大器两个输入端的电势相等以及正向输入端接地, 有

$$U_+ = U_- = 0 \quad (9)$$

由于没有电流流入或流出运算放大器, 所以通过  $R_1$  和  $C$  的电流  $I$  相等:

$$\frac{U_{\text{in}} - U_-}{R_1} = C \left( \frac{dU_-}{dt} - \frac{dU_{\text{out}}}{dt} \right) \quad (10)$$

由以上两式得

$$\frac{dU_{\text{out}}}{dt} = -\frac{U_{\text{in}}}{CR_1} = -\frac{U_0}{CR_1} \text{sign}(U_{\text{in}}) \quad (11)$$

式中

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} +1, & \text{当 } x > 0 \\ -1, & \text{当 } x < 0 \end{cases}$$

可见,  $t-U_{\text{out}}$  是斜率分段为常数的折线, 即解题图 16a 所示的三角波形电压



解题图 16a

**评分标准:** 本题 40 分, 第 (1) 问 12 分, ①②③式各 4 分; 第 (2) 问 16 分, ④⑤⑥式各 4 分, ⑦⑧式各 2 分; 第 (3) 问 12 分, ⑨⑩⑪⑫式各 4 分。