参考答案

一、选择题 8 小题，每小题 5 分，共 40 分

1. 【答案】B

【分析】根据子集的定义即可求解.

【详解】因为 $P\subseteq Q$，则由子集的定义知集合 P 中的任何一个元素都在 Q 中，

而 Q 中元素不一定在 P 中(集合相等或不相等两种情况)，故 B 正确，ACD 错误.

故选：B

2. 【答案】C

【分析】根据一元二次不等式的解法计算可得；

【详解】解：由 $(x+1)(x+3)<0$，解得 $-3<x<-1$，即不等式的解集为 $\{x|-3<x<-1\}$；

故选：C

3. 【答案】A

【分析】根据不等式的性质判断 A；举反例即可判断 B，C，D.

【详解】由 $a,b,c,d\in \mathrm{R}$，且 $a>b,c>d$，可得 $a+c>b+d$，A 正确；

取 $a=3,b=2,c=1,d=0$，满足条件，但 $a-c=b-d$，B 错误；

取 $a=3,b=2,c=-2,d=-3$，满足条件，但 $ac=bd$，$\frac{a}{d}=\frac{b}{c}$，C，D 错误；

故选：A

4. 【答案】B

【分析】

当 $x<0$ 时 $-x>0$ 可将其代入 $x>0$ 时的解析式求出 $f(-x)$，再通过奇偶性将其转化为 $f(x)$ 即可.

【详解】设 $x<0$，则 $-x>0$.

可得 $f(-x)=x+1$，又函数 $f(x)$是奇函数.

$\therefore f(-x)=-f(x)=x+1$，

$\therefore f(x)=-x-1(x<0)$.

故选：B.

5. 【答案】B

【分析】求出两个函数定义域以及化简对应关系. 若两个函数定义域相同且对应关系相同，则这两个函数相同，进而判断答案.

【详解】对 A，$f(x)$ 的定义域为 **R**，$g(x)$ 的定义域为 $[0,+\infty)$，则 A 错误；

对 B，$f(t)$ 和 $g(x)$ 的定义域均为 **R**，且 $g(x)=\sqrt{x^2}=|x|$，则 B 正确；

对 C，$f(x)$ 的定义域为 $\{x\,|\,x\neq 1\}$，$g(x)$ 的定义域为 **R**，则 C 错误；

对 D，$f(x)$ 的定义域为 $\{x\mid x\neq 0\}$，$g(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，则 D 错误.

故选：B.

6. 【答案】D

【分析】由幂函数的区间单调性有 $\begin{cases}m^2-m-5=1\\ m<0\end{cases}$，求参数值即可.

【详解】由题设 $\begin{cases}m^2-m-5=1\\ m<0\end{cases}$，则 $\begin{cases}(m-3)(m+2)=0\\ m<0\end{cases}$，可得 $m=-2$.

故选：D

7. 【答案】B

【分析】根据充分、必要性定义，结合根与系数关系判断条件间的关系即可.

【详解】若方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 有实数根，则 $\Delta=b^2-4ac\geq 0$，即 $b^2\geq 4ac$，但不一定有 $ac<0$，充分性不成立；

若 $ac<0$，则 $\Delta=b^2-4ac>0$，即方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 有实数根，必要性成立；

所以“关于 x 的方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 有实数根”是“$ac<0$”的必要非充分条件.

故选：B

8. 【答案】B

【分析】

由函数的单调性及定义域可得不等式，即可得解.

【详解】因为函数 $y=f(x)$ 在定义域 (-1.1) 上是减函数，且 $f(2a-1)<f(1-a)$，

所以 $\begin{cases}2a-1>1-a\\ -1<2a-1<1\\ -1<1-a<1\end{cases}$,解得 $\frac{2}{3}<a<1$,

所以实数 a 的取值范围是 $\left(\frac{2}{3},1\right)$.

故选：B.

【点睛】本题考查了利用函数单调性解不等式，考查了运算求解能力，属于基础题.

第二部分（非选择题 共 110 分）

二、填空题 6 小题，每小题 5 分，共 30 分

9. 【答案】$\{x\mid -2\leq x\leq 3\}$

【分析】根据并集的概念运算即得.

【详解】因为集合 $A=\{x\mid -2\leq x\leq 0\}$，$B=\{x\mid 0<x\leq 3\}$，

所以 $A\cup B=\{x\mid -2\leq x\leq 3\}$.

故答案为：$\{x\,|\,-2\le x\le 3\}$.

10. 【答案】$\{x\,|\,x>-2$ 且 $x\ne -1\}$

【分析】根据题意得到$\begin{cases}x+2>0\\x+1\ne 0\end{cases}$，再解不等式组即可.

【详解】由题知：$\begin{cases}x+2>0\\x+1\ne 0\end{cases}$，解得 $x>-2$ 且 $x\ne -1$.

故答案为：$\{x\,|\,x>-2$ 且 $x\ne -1\}$.

11. 【答案】$\frac{25}{8}$##3.125

【分析】方法一：将函数变形为$y=x(5-2x)=\frac{1}{2}\cdot 2x\cdot(5-2x)$，然后利用基本不等式可求出其最大值，

方法二：将函数变形为$y=2x\left(\frac{5}{2}-x\right)$，然后利用基本不等式可求出其最大值.

【详解】方法一：$y=x(5-2x)=\frac{1}{2}\cdot 2x\cdot(5-2x)$，

$\because 0<x<2$，$\therefore 0<2x<4$，$1<5-2x<5$，

$\therefore y\le\frac{1}{2}\times\left[\frac{2x+(5-2x)}{2}\right]^2=\frac{1}{2}\times\frac{25}{4}=\frac{25}{8}$，当且仅当$2x=5-2x$，即$x=\frac{5}{4}$时取等号.

故当$x=\frac{5}{4}$时，$y_{\max}=\frac{25}{8}$.

方法二：由$0<x<2$知$\frac{5}{2}-x>0$，$\therefore y=2x\left(\frac{5}{2}-x\right)\le 2\left[\frac{x+\left(\frac{5}{2}-x\right)}{2}\right]^2=\frac{25}{8}$，

当且仅当$x=\frac{5}{2}-x$，即$x=\frac{5}{4}$时取等号.

故当$x=\frac{5}{4}$时，$y_{\max}=\frac{25}{8}$.

故答案为：$\frac{25}{8}$

12. 【答案】$(-2,\frac{1}{2})$

【分析】由分式不等式可得$(x+2)(2x-1)<0$，解一元二次不等式求解集.

【详解】由题设$(x+2)(2x-1)<0\Rightarrow -2<x<\frac{1}{2}$，

所以不等式解集为$(-2,\frac{1}{2})$.

故答案为：$(-2,\frac{1}{2})$

13.【答案】$a^{\frac{6}{5}}$

【分析】先把根式转化成指数幂的形式，再利用分数指数幂的运算法则，即可求出结果.

【详解】因为

$$(a^2\cdot\sqrt[5]{a^3})\div(\sqrt{a}\cdot\sqrt[10]{a^9})=(a^2\cdot a^{\frac{3}{5}})\div(a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{\frac{9}{10}})=a^{\frac{13}{5}}\div a^{\frac{7}{5}}=a^{\frac{13}{5}-\frac{7}{5}}=a^{\frac{6}{5}}.$$

故答案为：$a^{\frac{6}{5}}$.

14.【答案】$\{x\,|\,-1\leqslant x\leqslant\frac{1}{3}\}$

【分析】

由偶函数定义域的对称性可求$b=-1$，从而可得$f(x)$在$[-2，0]$上为增函数，在$[0，2]$上为减函数，距离对称轴越远，函数值越小，由此可解不等式.

【详解】解：$\because f(x)$是定义在$[2b，1-b]$上的偶函数，

$\therefore 2b+1-b=0$，

$\therefore b=-1$，

$\because f(x)$在$[-2，0]$上为增函数，

$\therefore f(x)$在$[0，2]$上为减函数，距离对称轴越远，函数值越小，

由$f(x-1)\leqslant f(2x)$可得$|x-1|\geqslant|2x|$，且$-2\leqslant x-1\leqslant 2$，$-2\leqslant 2x\leqslant 2$，

解得$-1\leqslant x\leqslant\frac{1}{3}$，

故不等式的解集为$\{x\,|\,-1\leqslant x\leqslant\frac{1}{3}\}$.

故答案为：$\{x\,|\,-1\leqslant x\leqslant\frac{1}{3}\}$.

三、解答题 6 小题，共 80 分

15.【答案】(1) $A=\{x\,|\,-2<x<3\}$

(2) $\complement_{R}(A\cap B)=\{x\,|\,x\le -2\text{ 或 }x\ge 3\}$，$(\complement_{R}A)\cap B=\{x\,|\,-3<x\le -2\text{ 或 }x=3\}$

【分析】(1) 解出一元二次不等式得到集合 A 即可；

(2) 由集合的交集与补集的运算求解即可.

【小问 1 详解】

因为$A=\{x\,|\,x^2-x-6<0\}$，所以解不等式$x^2-x-6<0$可得：

$-2<x<3$，故集合 $A=\{x|-2<x<3\}$

【小问 2 详解】

由（1）可知：$A=\{x|-2<x<3\}$，又 $B=\{x|-3<x\le 3\}$，

所以 $A\cap B=\{x|-2<x<3\}$，所以 $\complement_{R}(A\cap B)=\{x|x\le -2$ 或 $x\ge 3\}$.

$\complement_{R}A=\{x|x\le -2$ 或 $x\ge 3\}$，$(\complement_{R}A)\cap B=\{x|-3<x\le -2$ 或 $x=3\}$.

16.【答案】（1）最大值为 12，最小值为-4

（2）$a=3$

【分析】（1）配方后利用二次函数的性质求解即可.

（2）根据对称轴的位置，分类讨论，求其最小值并为 1，得到 a 的值.

【小问 1 详解】

当 $a=2$ 时，$f(x)=x^2+2x-3=(x+1)^2-4$，

又 $x\in[-2,3]$，所以 $f(x)_{\min}=f(-1)=-4$，$f(x)_{\max}=f(3)=12$，

所以函数 $f(x)$ 的最大值为 12，最小值为-4.

【小问 2 详解】

$f(x)$ 的对称轴为 $x=-\dfrac{a}{2}$，开口向上，

① 当 $-\dfrac{a}{2}\le 1$，即 $a\ge -2$ 时，

$f(x)_{\min}=f(1)=a-2=1$，即 $a=3$，符合题意；

② 当 $-\dfrac{a}{2}\ge 3$，即 $a\le -6$ 时，

$f(x)_{\min}=f(3)=3a+6=1$，即 $a=-\dfrac{5}{3}$，不符合题意；

③ 当 $1<-\dfrac{a}{2}<3$，即 $-6<a<-2$ 时，

$f(x)_{\min}=f\left(-\dfrac{a}{2}\right)=-\dfrac{a^2}{4}-3=1$，无解，不符合题意；

综上，可得 $a=3$.

17.【答案】将水池的地面设计成边长为 40m 的正方形时总造价最低，最低总造价是 297600 元.

【分析】设底面长为 xm，宽为 ym，由容积为 4800m^3，可得 $y=\dfrac{1600}{x}$，列出水池的总造价关于 x 的函数关系可得 $f(x)=\left(x+\dfrac{1600}{x}\right)\times 720+1600\times 150$，借助均值不等式即得解

【详解】设底面长为 xm，宽为 ym

则 $3xy=4800\therefore y=\dfrac{1600}{x}$

水池的总造价：

$$f(x)=xy\times150+2(3x+3y)\times120=(x+\frac{1600}{x})\times720+1600\times150$$

$$\geq2\sqrt{x\cdot\frac{1600}{x}}\times720+240000=57600+240000=297600\text{（元）}$$

当且仅当 $x=y=40$ 时，等号成立.

所以，将水池的地面设计成边长为 $40m$ 的正方形时总造价最低，最低总造价是 297600 元.

18.【答案】（1）奇函数，证明见解析；

（2）证明见解析；　　（3）无最大值，最小值为 $-\dfrac{1}{2}$.

【分析】（1）应用奇偶性定义证 $f(x)$ 的奇偶性；

（2）应用单调性定义证 $f(x)$ 的单调性；

（3）根据（1）（2）的结论确定区间最值即可.

【小问 1 详解】

函数 $f(x)$ 为奇函数，证明如下：

由 $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$ 知：函数定义域为 R，

$$f(-x)=\frac{-x}{(-x)^2+1}=-\frac{x}{x^2+1}=-f(x),$$

所以 $f(x)$ 为奇函数，得证.

【小问 2 详解】

令 $x_1>x_2\geq1$，则 $f(x_1)-f(x_2)=\dfrac{x_1}{x_1^2+1}-\dfrac{x_2}{x_2^2+1}=\dfrac{x_1x_2^2+x_1-x_2x_1^2-x_2}{(x_1^2+1)(x_2^2+1)}$，

所以 $f(x_1)-f(x_2)=\dfrac{x_1x_2(x_2-x_1)-(x_2-x_1)}{(x_1^2+1)(x_2^2+1)}=\dfrac{(x_1x_2-1)(x_2-x_1)}{(x_1^2+1)(x_2^2+1)}$，

而 $x_1x_2>1$，$x_2-x_1<0$，$(x_1^2+1)(x_2^2+1)>0$，则 $f(x_1)-f(x_2)<0$，

所以 $f(x_1)<f(x_2)$，故函数 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上是减函数，得证.

【小问 3 详解】

由（1）（2）知：$f(x)$ 在 $(-\infty,-1]$ 上是减函数，

且 $f(x)=\dfrac{1}{x+\frac{1}{x}}$，易知 x 趋向 $-\infty$ 时函数值趋向于 0，

所以 $f(x)_{\min}=f(-1)=\dfrac{-1}{(-1)^2+1}=-\dfrac{1}{2}$，无最大值.

19.【答案】(1) $a<2\sqrt{2}$；

(2) 答案见解析.

【分析】(1)当 $x\in[1,5]$ 时将原不等式变形为 $a<x+\dfrac{2}{x}$，根据基本不等式计算即可；

(2)不等式化为 $(x-2)(ax+1)>0$，讨论 a 的取值，从而求出对应不等式的解集.

【小问 1 详解】

不等式 $f(x)>3ax$ 即为：$x^2+2ax+2>3ax$，

当 $x\in[1,5]$ 时，不等式可变形为：$a<\dfrac{x^2+2}{x}=x+\dfrac{2}{x}$，

因为 $x+\dfrac{2}{x}\geq 2\sqrt{x\cdot\dfrac{2}{x}}=2\sqrt{2}$，

当且仅当 $x=\sqrt{2}$ 时取等号，所以 $\left(x+\dfrac{2}{x}\right)_{\min}=2\sqrt{2}$，

所以实数 a 的取值范围是 $a<2\sqrt{2}$.

【小问 2 详解】

不等式 $(a+1)x^2+x>x^2+2ax+2$，

等价于 $ax^2+(1-2a)x-2>0$，即 $(x-2)(ax+1)>0$，

①当 $a=0$ 时，不等式整理为 $x-2>0$，解得 $x>2$；

当 $a\neq 0$ 时，方程 $(x-2)(ax+1)=0$ 的两根为 $x_1=-\dfrac{1}{a}$，$x_2=2$，

②当 $a>0$ 时，可得 $-\dfrac{1}{a}<0<2$，解不等式 $(x-2)(ax+1)>0$ 得 $x<-\dfrac{1}{a}$ 或 $x>2$；

③当 $-\dfrac{1}{2}<a<0$ 时，因为 $-\dfrac{1}{a}>2$，解不等式 $(x-2)(ax+1)>0$ 得 $2<x<-\dfrac{1}{a}$；

④当 $a=-\dfrac{1}{2}$ 时，因为 $-\dfrac{1}{a}=2$，不等式 $(x-2)(ax+1)>0$ 的解集为 $\varnothing$；

⑤当 $a<-\dfrac{1}{2}$ 时，因为 $-\dfrac{1}{a}<2$，解不等式 $(x-2)(ax+1)>0$ 得 $-\dfrac{1}{a}<x<2$；

综上所述，不等式的解集为：

①当 $a=0$ 时，不等式解集为 $(2,+\infty)$；

②当 $a>0$ 时，不等式解集为 $(-\infty,-\dfrac{1}{a})\cup(2,+\infty)$；

③当 $-\dfrac{1}{2}<a<0$ 时，不等式解集为 $\left(2,-\dfrac{1}{a}\right)$；

④当 $a=-\dfrac{1}{2}$ 时，不等式解集为 $\varnothing$；

⑤当 $a<-\dfrac{1}{2}$ 时，不等式解集为 $\left(-\dfrac{1}{a},2\right)$.

20.【答案】(1) E 不是，F 是

(2) 不存在，理由见解析

(3) $\{1,2,3\}$

【分析】(1) 根据新定义计算即可判断；

(2) 若存在符合题意的实数 z，根据题意可得 $\begin{cases} z^2=xy \\ x+y=xy \\ x+y+z=xyz \end{cases}$，求解 z 后，检验 x,y，进而可判断；

(3) 不妨设 A 中所有元素满足 $a_1<a_2<\cdots<a_n$，从而可得 $a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$，进而可得 $a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_{n-1}<n$，再分 $n=2$、$n=3$、$n\geq 4$ 三种情况求解即可.

【小问 1 详解】

因为 $1\times 2\neq 1+2$，所以 E 不是"谐调集"，

因为 $(-1)\times 0\times 1=(-1)+0+1$，所以 F 是"谐调集"；

【小问 2 详解】

若存在符合题意的实数 z，则 $\begin{cases} z^2=xy \\ x+y=xy \\ x+y+z=xyz \end{cases}$，

所以 $z^2+z=z^3$，即 $z(z^2-z-1)=0$，解得 $z=0$ 或 $z=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ 或 $z=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$，

当 $z=0$ 时，则 $x=0$，$y=0$，不符合题意；

当 $z=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ 时，$x+y=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$，$xy=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$，

由此，x、y 是方程 $t^2-\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}t+\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}=0$ 的实数解.

但 $\Delta=\left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^2-4\left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)=\dfrac{\sqrt{5}-5}{2}<0$，方程无实数解，所以不符合题意；

当 $z=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ 时，同理 $z=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$，可得不符合题意，

综上，不存在符合题意的实数 z；

【小问 3 详解】

不妨设 A 中所有元素满足 $a_1<a_2<\cdots<a_n$，

则 $a_1\times a_2\times\cdots\times a_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$，

于是，$a_1\times a_2\times\cdots\times a_{n-1}=\dfrac{a_1}{a_n}+\dfrac{a_2}{a_n}+\cdots+\dfrac{a_{n-1}}{a_n}+1<1+1+\cdots+1=n$，

即 $a_1\times a_2\times\cdots\times a_{n-1}<n$，

当 $n=2$ 时，则 $a_1<2$，$\therefore a_1=1$，但 $1\cdot a_2=1+a_2$ 无解，所以不存在符合题意的"谐调集"，

当 $n=3$ 时，则 $a_1a_2<3$，$\therefore a_1=1$，$a_2=2$，$1\times2\times a_3=1+2+a_3$，$\therefore a_3=3$，

当 $n\geq4$ 时，$\because a_1$，a_2，$\cdots$，a_n 均为正整数，$\therefore a_1\geq1$，$a_2\geq2$，$\cdots$，$a_n\geq n$.

$\therefore a_1\times a_2\times\cdots\times a_{n-1}\geq1\times2\times\cdots\times(n-1)\geq(n-2)(n-1)$，

又 $n>a_1\times a_2\times\cdots\times a_{n-1}$，$\therefore n>(n-2)(n-1)$，即 $n^2-4n+2<0$，

但当 $n\geq4$ 时，$n^2-4n+2=n(n-4)+2>0$，矛盾.

所以不存在符合题意的"谐调集"

综上，符合题意的"谐调集"为 $\{1,2,3\}$.

【点睛】关键点睛：

本题第三问关键是能够由 $a_1\times a_2\times\cdots\times a_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$，结合正整数的特点得到

$a_1\times a_2\times\cdots\times a_{n-1}=\dfrac{a_1}{a_n}+\dfrac{a_2}{a_n}+\cdots+\dfrac{a_{n-1}}{a_n}+1<1+1+\cdots+1=n$，再分 $n=2$、$n=3$、$n\geq4$ 三种情况求解.

北京高一高二高三期中试题下载

京考一点通团队整理了【**2023 年 10-11 月北京各区各年级期中试题&答案汇总**】专题，及时更新最新试题及答案。

通过【**京考一点通**】公众号，对话框回复【**期中**】或者点击公众号底部栏目<**试题专区**>，进入各年级汇总专题，查看并下载电子版试题及答案！