2024 届高三一轮复习联考(二) 全国卷

文科数学参考答案及评分意见

1.B 【解析】$z=(1+i^3)(i+i^2)=(1-i)(i-1)=2i$，所以$\overline{z}=-2i$，故选 B.

2.C 【解析】$\complement_U A=\{1,2,5,6\}$，$(\complement_U A)\cap B=\{2,5\}$.故选 C.

3.C 【解析】根据特称命题：$\exists x_0\in M, p(x_0)$的否定形式是全称命题：$\forall x\in M, \neg p(x)$，可知"$\exists x_0>1, x_0-2\ln x_0\leqslant 1$"的否定为"$\forall x>1, x-2\ln x>1$"，故选 C.

4.B 【解析】$x\in(0,+\infty)$，显然 $f(x)$单调递增，又 $f(1)=\log_2 1-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}<0$，$f(2)=\log_2 2-\frac{1}{4}=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}>0$，$f(1)\cdot f(2)<0$，故零点位于区间$(1,2)$内，故选 B.

5.B 【解析】$a>b>0$，$c>1$，所以 $c^a>c^b$.故选 B.

6.D 【解析】本题为线性规划问题，目标函数的最值在三角形区域的顶点处取得.将 A、B、C 的坐标依次代入目标函数，得 z 的值分别为 24，52，13，因此目标函数 $z=2x+3y$ 在点 B 取得最大值，即$z_{\max}=52$.故选 D.

7.B 【解析】若 $ab\geqslant 1$，则 $a+b\geqslant 2\sqrt{ab}\geqslant 2$，当且仅当 $a=b$，$ab=1$，即 $a=1$，$b=1$ 时，等号成立，因此若不等式 $ab\geqslant 1$ 成立，则不等式 $a+b\geqslant 2$ 成立；反过来，若 $a+b\geqslant 2$ 成立，取 $a=2$，$b=\frac{1}{4}$满足条件，但是 $ab=\frac{1}{2}$，则不等式 $ab\geqslant 1$ 不成立.因此不等式 $a+b\geqslant 2$ 成立是不等式 $ab\geqslant 1$ 成立的必要不充分条件，故选 B.

8.C 【解析】$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}+\frac{1}{\lambda}\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AC}+\left(1+\frac{1}{\lambda}\right)\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AC}+\left(1+\frac{1}{\lambda}\right)(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})=\left(1+\frac{1}{\lambda}\right)\overrightarrow{AB}-\frac{1}{\lambda}\overrightarrow{AC}$，根据$\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$，得$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$，$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}=\left[\left(1+\frac{1}{\lambda}\right)\overrightarrow{AB}-\frac{1}{\lambda}\overrightarrow{AC}\right]\cdot\overrightarrow{AB}=\left(1+\frac{1}{\lambda}\right)\overrightarrow{AB}^2-\frac{1}{\lambda}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=4\left(1+\frac{1}{\lambda}\right)$.又$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}=5$，所以 $4\left(1+\frac{1}{\lambda}\right)=5$，$\lambda=4$，故选 C.

9.C 【解析】根据题意，函数 $f(x)=\frac{1}{e^x-1}+a$，其定义域为$\{x\mid x\neq 0\}$.由 $f(-x)=-f(x)$，即$\left(\frac{1}{e^{-x}-1}+a\right)+\left(\frac{1}{e^x-1}+a\right)=-1+2a=0$，解得 $a=\frac{1}{2}$，故选 C.

10.C 【解析】$a=\sin\theta\cdot\cos\theta$，$b=\sin\theta\cdot\sin\theta$，$c=\frac{1}{\cos\theta}-\cos\theta=\frac{1-\cos^2\theta}{\cos\theta}=\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}=\sin\theta\cdot\tan\theta$.根据$\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{3}$，得 $\tan\theta>1$，$1>\sin\theta>\cos\theta>0$，即$\tan\theta>\sin\theta>\cos\theta$，$\sin\theta\cdot\tan\theta>\sin\theta\cdot\sin\theta>\sin\theta\cdot\cos\theta$，即 $c>b>a$，故选 C.

11.A 【解析】$\triangle ABC$ 的外接圆面积为 4π，所以外接圆半径为 2，不妨设三边 a,b,c 成等比数列，则 $b^2=ac$.又$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{a^2+c^2-ac}{2ac}\geqslant\frac{2ac-ac}{2ac}=\frac{1}{2}$，当且仅当 $a=c$ 时等号成立，所以 $0<B\leqslant\frac{\pi}{3}$，又 $\frac{b}{\sin B}=4$，所以$\triangle ABC$ 的面积$S=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}b^2\sin B=8\sin^3 B\leqslant 8\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3=3\sqrt{3}$，故选 A.

12.A 【解析】$f'(x)=ae^x-2x$，根据 $f(x)=ae^x-x^2+b$ 是增函数，得 $f'(x)\geqslant 0$，即 $ae^x-2x\geqslant 0$，$a\geqslant\frac{2x}{e^x}$.令 $g(x)=\frac{2x}{e^x}$，则 $g'(x)=\frac{2e^x(1-x)}{(e^x)^2}=\frac{2(1-x)}{e^x}$，当 $x>1$ 时，$g'(x)<0$，当 $x<1$ 时，$g'(x)>0$，所以 $g(x)$在$(-\infty,1)$上是增函数，在$(1,+\infty)$上是减函数，故 $g(x)$有最大值 $g(1)=\frac{2}{e}$，因此 $a\geqslant\frac{2}{e}$，实数 a 的最小值是$\frac{2}{e}$，即 a 的取值范围

是$\left[\frac{2}{e},+\infty\right)$.故选 A.

13.$-\sqrt{2}$ 【解析】由向量 $\boldsymbol{a}=(2,x)$,$\boldsymbol{b}=(-2x,-2)$,且 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 方向相同,得 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$,且 $\lambda>0$,则$\begin{cases}2=-2x\lambda,\\x=-2\lambda,\end{cases}$解得 $x=-\sqrt{2}$.

14.$\frac{\pi}{3}$ 【解析】根据 $\cos C=\frac{b}{2a}$,以及正弦定理,得 $\cos C=\frac{\sin B}{2\sin A}$,即 $2\sin A\cos C=\sin B$,又 $\sin B=\sin(A+C)=\sin A\cos C+\cos A\sin C$,所以 $2\sin A\cos C=\sin A\cos C+\cos A\sin C$,$\sin A\cos C-\cos A\sin C=0$,$\sin(A-C)=0$,$\because -\pi<A-C<\pi$,$\therefore A=C$,由 $\cos B=\frac{1}{2}$,得 $B=\frac{\pi}{3}$,所以 $A=\frac{\pi}{3}$.

15.2 【解析】设$\{a_n\}$的公比为 q,显然 $q\neq1$,$\frac{S_4}{S_2}=\frac{\frac{a_1(1-q^4)}{1-q}}{\frac{a_1(1-q^2)}{1-q}}=\frac{1-q^4}{1-q^2}=1+q^2=3$,所以 $q^2=2$,$\frac{a_4}{a_2}=\frac{a_2q^2}{a_2}=q^2=2$.

16.$g(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$ 【解析】把函数 $y=f(x)$的图象上所有点的横坐标缩短到原来的$\frac{1}{2}$,纵坐标不变,得到 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$的图象,然后再把所得到的图象上所有点向右平行移动$\frac{\pi}{12}$个单位长度,得到 $y=\sin\left[2\left(x-\frac{\pi}{12}\right)+\frac{\pi}{3}\right]=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$,即 $g(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$.

17.**解**:(1)由 a_n 是 a_n 与 $a_{n+1}-1$ 的等差中项,得 $2a_1=a_2-1$,$a_2=3$, ………………………… 2 分

$2a_2=a_3-1$,$a_3=7$. ………………………… 4 分

(2)$a_{n+1}=2a_n+1$,$(a_{n+1}+1)=2(a_n+1)$. ………………………… 6 分

$a_1=1$,$a_1+1=2\neq0$,

所以$\frac{a_{n+1}+1}{a_n+1}=2$, ………………………… 8 分

因此数列$\{a_n+1\}$是以 2 为首项,2 为公比的等比数列. ………………………… 10 分

从而 $a_n+1=2\cdot2^{n-1}=2^n$,

所以 $a_n=2^n-1$,$n\in\mathbf{N}^*$. ………………………… 12 分

18.**解**:(1)由正弦定理,及 $\sin^2B-\sin^2A=\sin A\sin C$,得 $b^2-a^2=ac$. ………………………… 2 分

根据 $A=\frac{\pi}{6}$以及余弦定理,得 $a^2=b^2+c^2-2bc\times\frac{\sqrt{3}}{2}$,即 $a^2=b^2+c^2-\sqrt{3}bc$. ………………………… 4 分

所以 $ac+c^2-\sqrt{3}bc=0$,$b=\frac{a+c}{\sqrt{3}}$,于是$\left(\frac{a+c}{\sqrt{3}}\right)^2=a^2+ac$,$2a^2+ac-c^2=0$,$(2a-c)(a+c)=0$,

所以 $c=2a$,$b^2=a^2+2a^2=3a^2$,因此 $c^2=a^2+b^2$,$\triangle ABC$ 为直角三角形. ………………………… 6 分

(2)由 $c=2$,以及由(1)得 $c=2a$,$b=\sqrt{3}a$,$\angle C=90°$,可得 $a=1$,$b=\sqrt{3}$. ………………………… 8 分

设 $CD=x(0\leqslant x<\sqrt{3})$,则 $BD=\sqrt{x^2+1}$,$AD=\sqrt{3}-x$,且由$\triangle ABD$ 的周长为$\frac{7+3\sqrt{3}}{3}$,

得$\sqrt{x^2+1}+\sqrt{3}-x+2=\frac{7+3\sqrt{3}}{3}$,$\sqrt{x^2+1}=x+\frac{1}{3}$,解得 $x=\frac{4}{3}$, ………………………… 10 分

所以 $CD=\frac{4}{3}$,$\triangle BCD$ 面积为$\frac{1}{2}BC\times CD=\frac{1}{2}\times1\times\frac{4}{3}=\frac{2}{3}$. ………………………… 12 分

19.解：(1)由 $S_n=n^2+2n$……①，$n=1$ 时，$a_1=S_1=3$，…………………………………………………… 2 分

$n>1$ 时，$S_{n-1}=(n-1)^2+2(n-1)$……②，

①－②得 $a_n=n^2+2n-(n-1)^2-2(n-1)=2n+1$，…………………………………………………… 4 分

当 $n=1$ 时，$a_1=3$，符合上式，所以数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=2n+1$，$n\in\mathbf{N}^*$． …………………… 6 分

(2)由已知 $S_n=n(n+2)$，$\dfrac{1}{S_n}=\dfrac{1}{n(n+2)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+2}\right)$，…………………………………………… 8 分

$$T_n=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{4}-\frac{1}{6}+\cdots\cdots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$=\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2}\right)=\dfrac{3}{4}-\dfrac{2n+3}{2(n+1)(n+2)}$． ………………………………………… 12 分

20.解：(1)当 $a=2$ 时，$f(x)=x(\ln x-2)$，$f'(x)=\ln x-1$，…………………………………………………… 1 分

$f'(x)=0$ 时，$x=\mathrm{e}$，…………………………………………………………………………………………… 2 分

当 $x\in(0,\mathrm{e})$时，$f'(x)<0$，函数 $y=f(x)$单调递减，当 $x\in(\mathrm{e},+\infty)$时，$f'(x)>0$，函数 $y=f(x)$单调递增，

…… 4 分

所以 $x=\mathrm{e}$ 是函数 $y=f(x)$的极小值点，无极大值点. …………………………………………………… 5 分

(2)当 $x\geqslant 1$ 时，$f(x)\geqslant-\ln x-2$ 恒成立，即当 $x\geqslant 1$ 时，$(x+1)\ln x-ax+2\geqslant 0$ 恒成立， ……………… 6 分

设 $F(x)=(x+1)\ln x-ax+2$，则 $F(1)=2-a\geqslant 0$，$\therefore a\leqslant 2$，……………………………………………… 7 分

$F'(x)=\ln x+\dfrac{1}{x}+1-a$，设 $g(x)=\ln x+\dfrac{1}{x}+1-a$，

$g'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{x-1}{x^2}$，………………………………………………………………………………… 8 分

$\because x\geqslant 1$，$\therefore g'(x)\geqslant 0$，$g(x)$在$[1,+\infty)$上单调递增，$g(1)=2-a$，$F'(x)\geqslant F'(1)=2-a\geqslant 0$，……………… 10 分

$\therefore F'(x)=g(x)\geqslant 0$，$\therefore F(x)$在$[1,+\infty)$是增函数，$\therefore F(x)\geqslant F(1)=2-a$，若 $F(x)\geqslant 0$ 恒成立，则 $a\leqslant 2$，

所以 $x\geqslant 1$ 时，$f(x)\geqslant\ln x-2$ 恒成立，a 的取值范围为$(-\infty,2]$. …………………………………… 12 分

21.解：(1)$f(x)$，$g(x)$的定义域为 $x\in(0,+\infty)$，

设函数 $f(x)$的零点为 x_0，$x_0>0$，则 $x_0+\ln x_0=0$，$\ln x_0=-x_0$，$\mathrm{e}^{-x_0}=x_0$，$\mathrm{e}^{x_0}=\dfrac{1}{x_0}$，……………………… 3 分

$g(x_0)=\mathrm{e}^{x_0}\ln x_0+a=\dfrac{1}{x_0}\times(-x_0)+a=-1+a$，因为函数 $f(x)$的零点是函数 $g(x)$的零点，所以 $g(x_0)=0$，

因此 $a=1$. ……… 6 分

(2)由(1)知 $g(x)=\mathrm{e}^x\ln x+1$，$g'(x)=\mathrm{e}^x\ln x+\mathrm{e}^x\cdot\dfrac{1}{x}=\mathrm{e}^x\left(\ln x+\dfrac{1}{x}\right)$，令 $h(x)=\ln x+\dfrac{1}{x}$，则 $h'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{x-1}{x^2}$，令 $h'(x)>0$，得 $x>1$，令 $h'(x)<0$，则 $0<x<1$，所以 $h(x)$在$(0,1)$是减函数，在$(1,+\infty)$是增函数.

…… 8 分

所以 $h(x)$有最小值 $h(1)=1>0$，即 $h(x)>0$，

于是 $g'(x)=\mathrm{e}^x h(x)>0$，所以 $g(x)$在$(0,+\infty)$是增函数，

由 $g\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)=\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}\ln\dfrac{1}{\mathrm{e}}+1=1-\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}<1-\mathrm{e}^0=0$，$g(1)=1>0$，所以 $g(x)$有唯一零点. ……………………… 12 分

22.解：(1)$\rho=\dfrac{1-m}{\cos\theta-m\sin\theta}$可化为 $\rho\cos\theta-\rho m\sin\theta=1-m$，把 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$ 代入，得 $x-my-1+m=0$，

所以曲线 C_1 的直角坐标方程为 $x-my-1+m=0(m\neq 1)$. ………………………………………………………… 5 分

(2)把 $\begin{cases}x=4t^2\\y=4t\end{cases}$ 代入 $x-my-1+m=0$,得 $4t^2-4mt-1+m=0$,$\Delta=16m^2-16(-1+m)=16(m^2-m+1)=16\left[\left(m-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]>0$,设 $A(4t_1^2,4t_1)$,$B(4t_2^2,4t_2)$,所以 $t_1+t_2=m$,$t_1\cdot t_2=\frac{m-1}{4}$,$k_1=\frac{1}{t_1}$,$k_2=\frac{1}{t_2}$,

$|k_1-k_2|=\left|\frac{1}{t_1}-\frac{1}{t_2}\right|=\left|\frac{t_2-t_1}{t_1t_2}\right|=\frac{\sqrt{(t_1+t_2)^2-4t_1t_2}}{|\quad|}=\frac{4\sqrt{m^2-m+1}}{|m-1|}=4\sqrt{\frac{m^2-m+1}{(m-1)^2}}$.

令 $m-1=n$,则 $m=n+1$,$|k_1-k_2|=4\sqrt{\frac{n^2+n+1}{n^2}}=4\sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{1}{n}+1}=4\sqrt{\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\geqslant 2\sqrt{3}$.

当 $\frac{1}{n}=-\frac{1}{2}$,即 $n=-2$,$m=-1$ 时,此时 $|k_1-k_2|$ 有最小值 $2\sqrt{3}$. ………………………………………… 10 分

23.(1)**解**:$a=2b+c\geqslant 2\sqrt{2bc}$,又 $abc=1$,所以 $bc=\frac{1}{a}$,于是 $a\geqslant 2\sqrt{\frac{2}{a}}$, ……………………………………………… 2 分

两边平方,得 $a^2\geqslant\frac{8}{a}$,$a^3\geqslant 8$,$a\geqslant 2$,当 $2b=c$ 时,等号成立,a 有最小值 2. ……………………………………… 5 分

(2)**证明**:由 $abc=1$,得 $\frac{1}{bc}+\frac{2}{ac}+\frac{1}{ab}=\frac{abc}{bc}+\frac{2abc}{ac}+\frac{abc}{ab}=a+2b+c=a+b+b+c$, ……………………………… 6 分

[illegible] $b+c\geqslant 2\sqrt{bc}$,所以 $a+b+b+c\geqslant 2\sqrt{ab}+2\sqrt{bc}$,

根据 $abc=1$,得 $ab=\frac{1}{c}$,$bc=\frac{1}{a}$, ………………………………………………………………………………… 8 分

所以 $2\sqrt{ab}+2\sqrt{bc}=\frac{2}{\sqrt{c}}+\frac{2}{\sqrt{a}}$,

因此有 $a+b+b+c\geqslant\frac{2}{\sqrt{c}}+\frac{2}{\sqrt{a}}$,于是 $\frac{1}{bc}+\frac{2}{ac}+\frac{1}{ab}\geqslant\frac{2}{\sqrt{a}}+\frac{2}{\sqrt{c}}$,当且仅当 $a=b=c$ 时,等号成立. ………… 10 分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 50W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数千场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。

推荐大家关注北京高考在线网站官方微信公众号：京考一点通，我们会持续为大家整理分享最新的高中升学资讯、政策解读、热门试题答案、招生通知等内容！