房山区 2018 年高考第二次模拟测试试卷

数学（文）

本试卷共 5 页，150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题纸上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题纸一并交回。

第一部分（选择题 共 40 分）

一、选择题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

（1）设集合 $A=\{x|x\le 2\}, B=\{x|0<x<3\}$，则 $A\cup B=$

（A）$\{x|x\le 2\}$　　（B）$\{x|x<3\}$

（C）$\{x|2<x<3\}$　　（D）$\{x|2\le x<3\}$

（2）设复数 $\mathrm{i}z=-1+\mathrm{i}$，则复数 z 在复平面内对应的点位于

（A）第一象限　　（B）第二象限　　（C）第三象限　　（D）第四象限

（3）下列函数中，在区间 $(2,+\infty)$ 上为增函数的是

（A）$y=-3^x$　　（B）$y=\dfrac{1}{2-x}$　　（C）$y=-(x-2)^2$　　（D）$y=\log_{\frac{1}{2}}x$

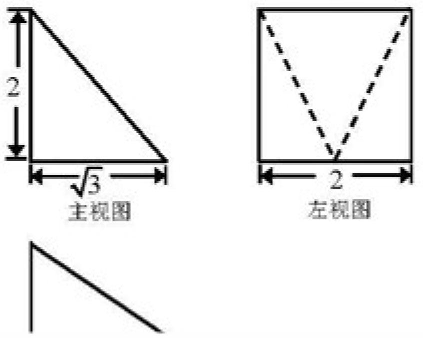
（4）已知实数 x,y 满足 $\begin{cases}x+y-1\ge 0,\\ x\ge 0,\\ y\ge 0,\end{cases}$ 则 $\sqrt{x^2+y^2}$ 的取值范围是

（A）$(0,1)$　　（B）$(0,1]$　　（C）$[1,+\infty)$　　（D）$\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$

（5）将函数 $y=\sin x$ 的图象上所有点的横坐标扩大到原来的 2 倍，纵坐标不变，再把所得的图象上的所有点向右平移 2 个单位长度，得到的图象所对应的函数解析式为

（A）$y=\sin(2x-2)$　　（B）$y=\sin(2x+2)$　　（C）$y=\sin(\frac{1}{2}x+1)$　　（D）$y=\sin(\frac{1}{2}x-1)$

（6）已知某几何体的三视图如图所示，则该几何体的最长棱为



（A）4　　（B）$2\sqrt{2}$　　（C）$\sqrt{7}$　　（D）2

（7）“$x+\dfrac{1}{x}>2$”是“$x>1$”的

（A）充要条件　　（B）充分而不必要条件

（C）必要而不充分条件　　（D）既不充分也不必要条件

（8）正方形$ABCD$的边长为1，点E在边AB上，点F在边BC上，$AE=\dfrac{1}{2},BF=\dfrac{1}{4}$．动点$P$从$E$出发沿直线向$F$运动，每当碰到正方形的边时反弹，反弹时反射角等于入射角，当点P第一次碰到E时，P与正方形的边碰撞的次数为

（A）3　　（B）4　　（C）6　　（D）8

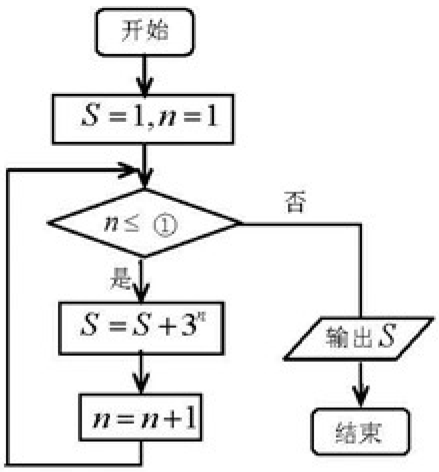
第一部分（非选择题 共110分）

二、填空题共6小题，每小题5分，共30分。

（9）双曲线$\dfrac{y^2}{a^2}-x^2=1$的渐近线为$y=\pm\sqrt{2}x$，则该双曲线的离心率为_____.

（10）若平面向量$\vec{a}=(4,2)$，$\vec{b}=(-2,\ m)$，且$\vec{a}\perp(\vec{a}+\vec{b})$，则实数$m$的值为_____.

（11）阅读如图所示的程序框图，为使输出的数据为40，则①处应填的数字为_____.



（12）如果直线$y=kx-1$与圆$x^2+y^2+kx+my-4=0$交于M,N两点，且MN关于直线$x+y=0$对称，则$m+k=$_____.

（13）在锐角ΔABC中，a，b，c分别为角A，B，C所对的边，且满足$b=2a\sin B$，则$\angle A=$_____.

（14）已知集合$\{a,b,c\}=\{2,3,4\}$，且下列三个关系：$a\ne3,b=3,c\ne4$有且只有一个正确，则函数

$f(x)=\begin{cases}2^x,x>b,\\(x-c)^2+a,x\le b,\end{cases}$ 的值域是_____.

三、解答题共 6 小题，共 80 分。解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程。

（15）（本小题13分）

已知等差数列$\{a_n\}$满足$a_1+a_2=10$，$a_4-a_3=2$．

（Ⅰ）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（Ⅱ）设等比数列$\{b_n\}$满足$b_2=a_3$，$b_3=a_7$．问：b_5与数列$\{a_n\}$的第几项相等？

（16）（本小题13分）

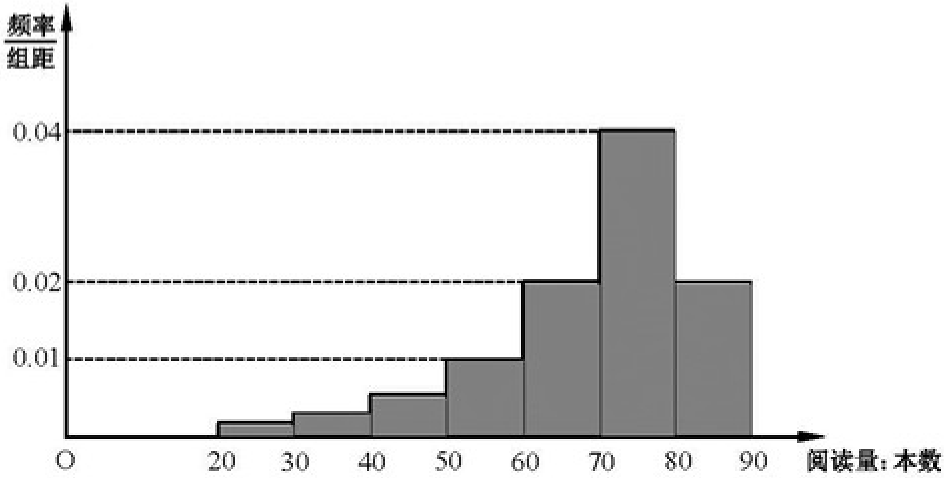
已知函数$f(x)=\sin x-a\cos x$的一个零点是$\dfrac{\pi}{4}$．

（Ⅰ）求实数a的值；

（Ⅱ）设$g(x)=f(x)\cdot f(-x)+2\sqrt{3}\sin x\cos x$，若$x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$，求$g(x)$的值域．

（17）（本小题13分）

1995年联合国教科文组织宣布每年的4月23日为世界读书日，主旨宣言为“希望散居在全球各地的人们，都能享受阅读带来的乐趣，都能尊重和感谢为人类文明作出巨大贡献的文学、文化、科学思想的大师们，都能保护知识产权。”为了解大学生课外阅读情况，现从某高校随机抽取100名学生，将他们一年课外阅读量（单位：本）的数据，分成7组$[20,30)$，$[30,40)$，…，$[80,90)$，并整理得到如下频率分布直方图：



（Ⅰ）估计其阅读量小于60本的人数；

（Ⅱ）已知阅读量在$[20,30)$，$[30,40)$，$[40,50)$内的学生人数比为$2:3:5$. 为了解学生阅读课外书的情况，现从阅读量在$[20,40)$内的学生中随机2人进行座谈，求2人分别在不同组的概率；

（Ⅲ）假设同一组中的每个数据可用该组区间的中点值代替，试估计100名学生该年课外书阅读量的平均数在第几组（只需写出结论）.

（18）（本小题14分）

如图1，正六边形$ABCDEF$的边长为2，O为中心，G为AB的中点. 现将四边形$DEFC$沿CF折起到四边形D_1E_1FC的位置，使得平面$ABCF\perp$平面D_1E_1FC，如图2.

（Ⅰ）证明：$D_1F\perp$平面E_1OG；

（Ⅱ）求几何体$E_1\text{-}OFAG$的体积；

（Ⅲ）在直线AB上是否存在点H，使得$D_1H//$平面E_1OG？如果存在，求出AH的长；如果不存在，请说明理由.

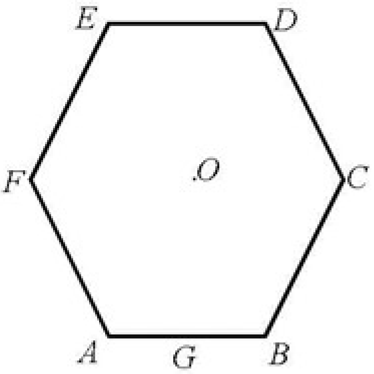


图1

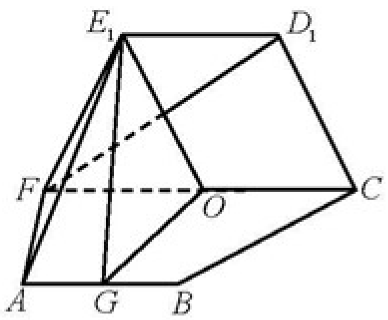


图2

（19）（本小题14分）

椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\dfrac{1}{2}$，$O$为坐标原点，$F$是椭圆$C$的右焦点，$A$为椭圆$C$上一点，且$AF\perp x$轴，$\Delta AFO$的面积为$\dfrac{3}{4}$.

（Ⅰ）求椭圆C的方程；

（Ⅱ）过C上一点$P(x_0,y_0)(y_0\neq 0)$的直线l：$\dfrac{x_0x}{a^2}+\dfrac{y_0y}{b^2}=1$与直线$AF$相交于点$M$，与直线$x=4$

相交于点N．证明：当点P在C上移动时，$\dfrac{|MF|}{|NF|}$恒为定值，并求此定值．

（20）（本小题13分）

已知函数$f(x)=\dfrac{1}{x}-a\ln x(a\in\mathbf{R})$．

（Ⅰ）当$a=-1$时，

（i）求$f(x)$在$(1,f(1))$处的切线方程；

（ii）设$g(x)=xf(x)-1$，求函数$g(x)$的极值；

（Ⅱ）若函数$f(x)$在区间$\left[\dfrac{1}{e^2},+\infty\right)$有两个的零点，求实数$a$的取值范围．

房山区2018年高考第二次模拟测试试卷

数学（文科）

参考答案

一、选择题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

题号	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
答案	B	A	B	D	D	B	C	C

二、填空题共6小题，每小题5分，共30分。

（9）$\dfrac{\sqrt{6}}{2}$　（10）-6　（11）3　（12）0　（13）$\dfrac{\pi}{6}$　（14）$[3,+\infty)$

三、解答题共6小题，共80分。解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程。

（15）（本小题13分）

解：（Ⅰ）设等差数列$\{a_n\}$的公差为d.

因为$a_4-a_3=2$，所以$d=2$.

又因为$a_1+a_2=10$，所以$2a_1+d=10$，故$a_1=4$.

所以$a_n=4+2(n-1)=2n+2\ \ (n=1,2,\text{L})$.　　…………6分

（Ⅱ）设等比数列$\{b_n\}$的公比为q.

因为$b_2=a_3=8$，$b_3=a_7=16$，

所以$q=2$，$b_1=4$.

所以$b_5=4\times 2^{5-1}=64$.

由$64=2n+2$得$n=31$.

所以b_5与数列$\{a_n\}$的第31项相等.　　…………13分

（16）（本小题13分）

（Ⅰ）解：依题意，得$f(\dfrac{\pi}{4})=0$，　　…………1分

即 $\sin\dfrac{\pi}{4}-a\cos\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}a}{2}=0$，　　…………3分

解得 $a=1$.　　…………5分

（Ⅱ）解：由（Ⅰ）得 $f(x)=\sin x-\cos x$.

$g(x)=f(x)\cdot f(-x)+2\sqrt{3}\sin x\cos x$　　…………6分

$=(\sin x-\cos x)(-\sin x-\cos x)+\sqrt{3}\sin 2x$ …………7 分

$=(\cos^2 x-\sin^2 x)+\sqrt{3}\sin 2x$ …………8 分

$=\cos 2x+\sqrt{3}\sin 2x$ …………9 分

$=2\sin(2x+\frac{\pi}{6})$. …………10 分

由 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 得 $\frac{\pi}{6}\le 2x+\frac{\pi}{6}\le\frac{7\pi}{6}$

当 $2x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$ 即 $x=\frac{\pi}{6}$ 时，$g(x)$ 取得最大值 2， …………11 分

当 $2x+\frac{\pi}{6}=\frac{7\pi}{6}$ 即 $x=\frac{\pi}{2}$ 时，$g(x)$ 取得最小值-1. …………12 分

所以 $g(x)$ 的值域是 $[-1,2]$ …………13 分

(17) 解：（I）100-100×10×（0.04+0.02×2）=20（人） …………4 分

（II）由已知条件可知：

$[20,50)$ 内人数为：100-100×（0.04+0.02+0.02=0.01）=10

$[20,\ 30)$ 人数为 2 人，$[30,\ 40)$ 人数为 3 人，$[40,50)$ 人数为 5 人.

设 $[20,\ 30)$ 2 人为 a, b, $[30,\ 40)$ 3 人为 c, d, e

设事件 A 为“两人分别在不同组”

从 $[20,\ 40)$ 内的学生中随机选取 2 人包含（a, b）, (a, c), (a, d), (a, e), (b, c),

(b, d), (b, e), (c, d), (c, e), (d, e) 共 10 个基本事件，而事件 A 包含

(a, c), (a, d), (a, e), (b, c), (b, d), (b, e) 共 6 个基本事件

所以 $P(A)=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$ …………10 分

（III）第五组 …………13 分

（18）（I）证明:图（1）中 $OG\perp CF$

$\therefore$ 图（2）中，$OG\perp CF$

又面 $CD_1E_1F\perp$ 面 $ABCF$，面 $CD_1E_1F\cap$ 面 $ABCF=CF$

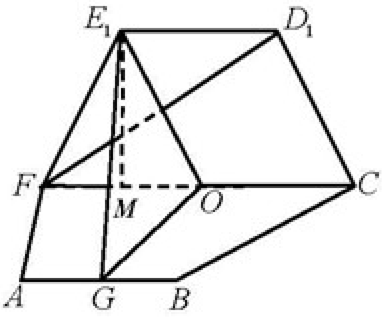
$\therefore OG\perp$ 面 CD_1E_1F

$\because D_1F\subset$ 面 CD_1E_1F $\therefore OG\perp D_1F$

又O为CF的中点$\therefore OF \underline{\underline{//}} D_1E_1$，又$E_1D_1=E_1F$ $\therefore$四边形E_1D_1OF为菱形

$\therefore D_1F\perp OE_1$

QOG I OE_1=O $\therefore D_1F\perp$面E_1OG　　　　…………5 分



（II）图二中，过E_1作$E_1M\perp FO$，垂足为M

Q$OG\perp$面CD_1E_1F，$E_1M\subset$面CD_1E_1F $\therefore E_1M\perp OG$

QOG I $FO=O$ $\therefore E_1M\perp$面$AGOF$ $\therefore E_1M$为E_1-$OFAG$的高，E_1M=$2\sin 60^\circ=\sqrt{3}$

$S_{四OFAG}=(1+2)\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$ $\therefore V=\frac{1}{3}Sh=\frac{3}{2}$　　　　…………10 分

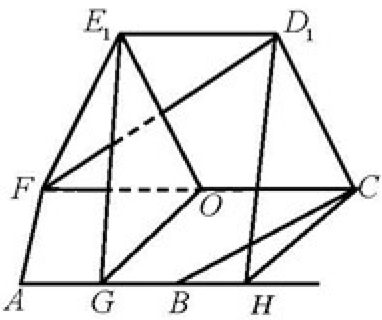
（III）过C作$CH\perp AB$，交AB的延长线于点H

$\therefore CH \underline{\underline{//}}$ OG

又$OE_1//CD_1, CD_1$ I $CH=C$

$\therefore$面D_1CH//面E_1OG

Q$D_1H\subset$面D_1CH $\therefore D_1H$//面E_1OG



Q四边形$OGHC$为矩形$\therefore GH$=CO=2 $\therefore AH$=3　　　　…………14 分

（19）（I）设$F(c,0)$，$A(c,d)$则$\frac{c^2}{a^2}+\frac{d^2}{b^2}=1$

又$\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$　$\therefore |d|=\frac{\sqrt{3}}{2}b$，因$\Delta AFO$ 的面积为$\frac{3}{4}$

$\therefore \frac{1}{2}c|d|=\frac{1}{2}cg\frac{\sqrt{3}}{2}b=\frac{3}{4}, bc=\sqrt{3}$

由$\begin{cases}a^2-b^2=c^2\\a=2c\\bc=\sqrt{3}\end{cases}$ 得$\begin{cases}a=2\\b=\sqrt{3}\\c=1\end{cases}$

所以C的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$　　　　…………5 分

（Ⅱ）由(1)知直线 l 的方程为 $\frac{x_0x}{4}+\frac{y_0y}{3}=1$ $(y_0\neq0)$，即 $y=\frac{12-3x_0x}{4y_0}$ $(y_0\neq0)$.

因为直线 AF 的方程为 $x=1$，所以直线 l 与 AF 的交点为 $M(1,\frac{12-3x_0}{4y_0})$，

直线 l 与直线 $x=4$ 的交点为 $N(4,3-3x_0)$，

则 $\frac{|MF|^2}{|NF|^2}=\frac{(\frac{12-3x_0}{4y_0})^2}{9+(\frac{3-3x_0}{y_0})^2}=\frac{(4-x_0)^2}{16y_0^2+16(1-x_0)^2}$

又 $P(x_0, y_0)$ 是 C 上一点，则 $\frac{x_0^2}{4}+\frac{y_0^2}{3}=1$. $y_0^2=3-\frac{3x_0^2}{4}$

代入上式得

$\frac{|MF|^2}{|NF|^2}==\frac{(4-x_0)^2}{48-12x_0^2+16-32x_0+16x_0^2}=\frac{(4-x_0)^2}{4(x_0^2-8x_0+16)}=\frac{1}{4}g\frac{(4-x_0)^2}{(4-x_0)^2}=\frac{1}{4}$

所以 $\frac{|MF|}{|NF|}=\frac{1}{2}$，为定值. …………14 分

（20）（Ⅰ）解：$a=-1$，$f(x)=\frac{1}{x}-\ln x$，$f(1)=1$，$f'(x)=\frac{-1}{x^2}+\frac{1}{x}$.

$\therefore k=f'(1)=0$.

故所求切线方程为：$y=1$ …………4 分

(Ⅱ) 解：$g(x)=x\ln x$,函数定义域为：$\{x|x>0\}$

$g'(x)=\ln x+1$，$x_0=\frac{1}{e}$

x	$(0,\frac{1}{e})$	$\frac{1}{e}$	$(\frac{1}{e},+\infty)$
$g'(x)$	−		+
$g(x)$	]	极小值	Z

故 $g(x)$ 的极小值为 $-\frac{1}{e}$，无极大值. …………9 分

(III)解法 1：令 $f(x)=\frac{1}{x}-a\ln x=0$，解得：$\frac{1}{a}=x\ln x$（显然 $a\neq0$）

问题等价于函数 $y=\frac{1}{a}$ 与函数 $y=x\ln x$ 的图像有两个不同交点.

$g'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x}f(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x^2}$

令 $g'(x)=0$ 得 $x=1$，当 x 变化时，$g'(x)$ 和 $g(x)$ 的变化如下表

x	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	↘	0	↗

由上表可知 $g(x)$ 的单调递减区间为 $(0,1)$，单调递增区间为 $(1,+\infty)$，

最小值为 $g(1)=0$。 ……………10 分

（III）若 $g(a)-g(x)<\frac{1}{a}$ 对任意 $x>0$ 成立，则 $g(a)-g(x)_{\min}<\frac{1}{a}$

即 $\ln a<1$，解得 $0<a<e$ ……………13 分

（19）（Ⅰ）设 $F(c,0)$，$A(c,d)$ 则 $\frac{c^2}{a^2}+\frac{d^2}{b^2}=1$

又 $\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$ $\therefore |d|=\frac{\sqrt{3}}{2}b$

因 ΔAFO 的面积为 $\frac{3}{4}$

$\therefore \frac{1}{2}c|d|=\frac{1}{2}cg\frac{\sqrt{3}}{2}b=\frac{3}{4},bc=\sqrt{3}$

由 $\begin{cases}a^2-b^2=c^2\\a=2c\\bc=\sqrt{3}\end{cases}$ 得 $\begin{cases}a=2\\b=\sqrt{3}\\c=1\end{cases}$

所以 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ …………5 分

（Ⅱ）由(1)知直线 l 的方程为 $\frac{x_0x}{4}+\frac{y_0y}{3}=1$ $(y_0\neq0)$，即 $y=\frac{12-3x_0x}{4y_0}$ $(y_0\neq0)$.

因为直线 AF 的方程为 $x=1$，所以直线 l 与 AF 的交点为 $M(1,\frac{12-3x_0}{4y_0})$，

直线 l 与直线 $x=4$ 的交点为 $N(4,3-3x_0)$，

由(Ⅱ)可知：$g(\frac{1}{e^2})=-\frac{2}{e^2}$，$g(\frac{1}{e})=-\frac{1}{e}$，$\begin{cases}\frac{1}{a}>-\frac{1}{e}\\ \frac{1}{a}\le-\frac{2}{e^2}\end{cases}$，解得：$-\frac{e^2}{2}\le a<-e$

故实数 a 的取值范围是$\left[-\frac{e^2}{2},-e\right)$.　　　　…………13 分

(III)解法 2：$f'(x)=-\frac{1}{x^2}-\frac{a}{x}=-\frac{ax+1}{x^2}$

（1）$a=0$ 时，$f(x)=\frac{1}{x}$ 在$\left[\frac{1}{e^2},+\infty\right)$上是减函数，$f(x)$不能有两个零点；

（2）$a>0$ 时，$ax+1>0$，所以 $f'(x)=-\frac{ax+1}{x^2}<0$ 在$\left[\frac{1}{e^2},+\infty\right)$恒成立，

所以 $f(x)$在$\left[\frac{1}{e^2},+\infty\right)$上是减函数，$f(x)$不能有两个零点；

（3）$a<0$ 时，令 $f'(x)=-\frac{ax+1}{x^2}=0,\ x=-\frac{1}{a}$

$f(x),f'(x)$变化情况如下表：

x	$\left(0,-\frac{1}{a}\right)$	$-\frac{1}{a}$	$\left(-\frac{1}{a},+\infty\right)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	Z	极大值	]

（i）$-\frac{1}{a}\le\frac{1}{e^2}$ 时，即 $a\le-e^2$，$f(x)$ 在$\left[\frac{1}{e^2},+\infty\right)$上是增函数，

所以 $f(x)$不能有两个零点；

（ii）$-\frac{1}{a}>\frac{1}{e^2}$ 时，$-e^2<a<0$ $f(x)$在$\left[\frac{1}{e^2},-\frac{1}{a}\right)$上是减函数，

$f(x)$在$\left[-\frac{1}{a},+\infty\right)$上是增函数. Q $f(1)=0$

所以若 $f(x)$ 在$\left[\frac{1}{e^2},+\infty\right)$有两个零点只需：

$$\begin{cases}f\left(-\frac{1}{a}\right)<0\\ f\left(\frac{1}{e^2}\right)\ge0\end{cases}\quad\text{即：}\quad\begin{cases}-a-a\ln\left(-\frac{1}{a}\right)<0\\ e^2-a\ln\frac{1}{e^2}\ge0\end{cases}$$

解得$\begin{cases} a<-e \\ a\geq -\dfrac{e^2}{2} \end{cases}$ 所以$-\dfrac{e^2}{2}\leq a<-e$

综上可知a的范围是$\left[-\dfrac{e^2}{2},-e\right)$ ……………13分