2024 届高三年级 10 月份大联考

数学试题

本试卷共 4 页,22 题。全卷满分 150 分。考试用时 120 分钟。

注意事项:

1. 答题前,先将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上,并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。
2. 选择题的作答:每小题选出答案后,用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
3. 非选择题的作答:用签字笔直接写在答题卡上对应的答题区域内。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
4. 考试结束后,请将本试题卷和答题卡一并上交。

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. $\forall x\in(0,1)$, $\sin x>x-x^2$ 的否定为

A. $\exists x\notin(0,1)$, $\sin x\leqslant x-x^2$ B. $\exists x\in(0,1)$, $\sin x\leqslant x-x^2$

C. $\forall x\notin(0,1)$, $\sin x>x-x^2$ D. $\forall x\in(0,1)$, $\sin x\leqslant x-x^2$

2. 若集合 $M=\{y\mid y=\ln(4-x^2)\}$, $N=[-2,2]$, 则 $M\cap N=$

A. $[-2,2]$ B. $(-2,2)$ C. $(-\infty,2]$ D. $[-2,\ln 4]$

3. 若 $x\in\left(\frac{1}{2},1\right]$, 则 $2x+\frac{1}{2x-1}$ 的最小值为

A. 1 B. 2 C. $2\sqrt{2}$ D. 3

4. 下列函数既是奇函数,又在 $(0,+\infty)$ 上单调递增的是

A. $f(x)=|x|$ B. $f(x)=x^2+1$

C. $f(x)=x^3-x$ D. $f(x)=x^3+x$

5. $\sum\limits_{n=1}^{2\,023}\frac{1}{(n+1)(n+2)}=$

A. $\frac{2\,021}{4\,050}$ B. $\frac{2\,022}{4\,050}$ C. $\frac{2\,023}{4\,050}$ D. $\frac{2\,024}{4\,050}$

6. 碳 14 是碳元素的一种同位素,具有放射性. 活体生物其体内的碳 14 含量大致不变,当生物死亡后,其组织内的碳 14 开始衰变并逐渐消失. 已知碳 14 的半衰期为 5 730 年,即生物死亡 t 年后,碳 14 所剩质量 $C(t)=C_0\left(\frac{1}{2}\right)$, 其中 C_0 为活体组织中碳 14 的质量. 科学家一般利用碳 14 这一特性测定生物死亡年代. 2023 年科学家发现某生物遗体中碳 14 含量约为原始质量的 0.4 倍,依据计算结果可推断该生物死亡的时间约为公元前(参考数据:$\lg 2\approx 0.301\,0$)

A. 5 554 年 B. 5 546 年 C. 7 576 年 D. 7 577 年

7. 命题 p:函数 $y=f(x)$ 的最大值为 M,函数 $y=g(x)$ 的最小值为 m;命题 q:$y=f(x)-g(x)$ 的最大值为 $M-m$. 则 p 是 q 的

A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件

C. 充要条件 D. 既不充分又不必要条件

8. 若函数 $f(x)=3\sin\omega x-\sqrt{3}\cos\omega x(\omega>0)$ 在区间 $[0,2\pi)$ 上恰有 9 个极值点,则 ω 的取值范围为

A. $\left[\frac{13}{3},\frac{29}{6}\right)$ B. $\left(\frac{13}{3},\frac{29}{6}\right]$ C. $\left(\frac{26}{3},\frac{29}{6}\right]$ D. $[3,5)$

二、选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分.

9. 已知 $x>y>1$，则

A. $\lg(x^2-1)>\lg(y^2-1)$　　B. $\sin x>\sin y$

C. $x^3>y^3$　　D. $2^{-x}>2^{-y}$

10. 若函数 $f(x)=x^3e^{|x|}$，则

A. $f(x)$是奇函数　　B. $f(x)$有2个极值点

C. $f(x)$有1个零点　　D. $f(x)$的一条切线方程为 $y=4ex-3e$

11. 已知函数 $f(x)=2\cos(\omega x+\varphi)(\omega>0,\varphi\in[0,\pi])$，则

A. 若 $f(0)=\sqrt{3}$，则 $\varphi=\dfrac{\pi}{3}$

B. 若函数 $y=f(x)$为偶函数，则 $\cos^2\varphi=1$

C. 若 $f(x)$在$[a,b]$上单调，则 $b-a\leqslant\dfrac{\pi}{2\omega}$

D. 若 $\varphi=\dfrac{\pi}{2}$时，且 $f(x)$在$\left[-\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{4}\right]$上单调，则 $\omega\in\left(0,\dfrac{3}{2}\right]$

12. 若 $a=\ln b+1$，$c=e^b-1$，则

A. $a\leqslant b$　　B. $c\leqslant b$　　C. $a<c$　　D. $b<c$

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分.

13. 若$\{a_n\}$满足：$0<a_{n+1}<a_n<1$（$\forall n\in N^*$），则满足上述条件数列$\{a_n\}$的一个通项公式为________.

14. 已知 $f(x)=\begin{cases}x^2+2x, & x\in[-4,1],\\ -x+4, & x\notin[-4,1],\end{cases}$ $g(x)=f(x)-m$，若 $g(x)$有且只有3个不同的零点，则 m 的取值范围是________.

15. 已知矩形和圆的面积相等，周长分别为 C_1，C_2，则$\dfrac{C_1}{C_2}$的取值范围为________.

16. $A=(a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n)$，$a_i\in\{-1,0,1\}(i=1,2,3,\cdots,n)$为一个有序实数组，$f(A)$表示把$A$中每个$-1$都变为$-1,0$，每个0都变为$-1,1$，每个1都变为$0,1$所得到的新的有序实数组，例如：$A=(-1,0,1)$，则 $f(A)=(-1,0,-1,1,0,1)$. 定义 $A_{k+1}=f(A_k)$，$k=1,2,3,\cdots$，若 $A_1=(-1,1)$，A_n中有b_n项为1，则$\{b_n\}$的前$2n$项和为________.

四、解答题：本题共6小题，共70分. 解答应写出必要的文字说明，证明过程或演算步骤.

17.（本小题满分10分）

已知集合 $A=\{x\mid(x+1)(x-a)<0\}$，$B=[-1,\sqrt{5})$.

(1)若 $a=\sqrt{6}$，求 $\complement_R A$，$A\cap B$ 及 $A\cup B$；

(2)若 $A\subseteq B$，求 a 的取值范围.

18.（本小题满分 12 分）

(1)求方程 $\log_2 x-3\log_x 2+2=0$ 的根；

(2)若 $\forall x\in[2,16]$，$\log_2 x+a\log_x 2+3\geqslant 9$，求 a 的取值范围.

19.（本小题满分 12 分）

已知数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的前 n 项和分别为 S_n，T_n，且满足 $b_n=3^n a_n$，$a_1=1$，$\dfrac{S_n}{n+1}=\dfrac{a_n}{2}$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)若 $T_n>102$，求 n 的取值范围.

20.（本小题满分 12 分）

已知 $\alpha\in(0,\pi)$，$\sin\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，$\tan\left(\alpha-\dfrac{\beta}{2}\right)=-\sqrt{2}$.

(1)求 $\tan\dfrac{\alpha-\beta}{2}$的值；

(2)若 $\beta\in(0,\pi)$，求 $\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}$的值.

21.（本小题满分 12 分）

已知$\triangle ABC$的内角A，B，C的对边分别为a，b，c，D是边BC上一点，$\angle BAD=\alpha$，$\angle CAD=\beta$，$AD=d$，且$2ac\sin\alpha+2ab\sin\beta=3bc$.

(1)若$A=\frac{5\pi}{6}$，证明：$a=3d$；

(2)在(1)的条件下，且$CD=2BD$，求$\cos\angle ADC$的值.

22.（本小题满分 12 分）

已知函数$f(x)=x\ln x$，$g(x)=f(x+1)-\frac{1}{2}ax^2-x$.

(1)函数$f(x)$的导函数是$f'(x)$，求证：$f'(x)\leqslant 2\sqrt{x}-1$；

(2)若函数$g(x)$在$(0,+\infty)$上存在最大值，求a的取值范围.

2024 届高三年级 10 月份大联考

数学参考答案及解析

一、选择题

1. B　【解析】由题设知，原命题的否定为：$\exists x\in(0,1)$，$\sin x\leqslant x-x^2$. 故选 B.

2. D　【解析】$M=\{y|y=\ln(4-x^2)\}=(-\infty,\ln 4]$，所以 $M\cap N=[-2,\ln 4]$. 故选 D.

3. D　【解析】因为 $x\in\left(\frac{1}{2},1\right]$，所以 $2x-1\in(0,1]$，所以 $2x+\frac{1}{2x-1}=\left[(2x-1)+\frac{1}{2x-1}\right]+1\geqslant 2\sqrt{(2x-1)\cdot\frac{1}{2x-1}}+1=3$，当且仅当 $2x-1=\frac{1}{2x-1}$，即 $x=1$ 时取等号. 故选 D.

4. D　【解析】对于选项 A、B，函数为偶函数；对于选项 C，函数为奇函数，且 $f'(x)=3x^2-1$，则当 $x\in\left(0,\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$ 时，$f(x)$ 单调递减；对于选项 D，函数为奇函数，且 $f'(x)=3x^2+1$，则当 $x\in\mathbf{R}$ 时，$f'(x)>0$，所以 $f(x)=x^3+x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增. 故选 D.

5. C　【解析】因为 $\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}$，所以 $\sum\limits_{n=1}^{2\,023}\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\sum\limits_{n=1}^{2\,023}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2\,024}-\frac{1}{2\,025}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\,025}=\frac{2\,023}{4\,050}$. 故选 C.

6. A　【解析】由题意知 $C_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5\,730}}=0.4C_0$，所以 $\frac{t}{5\,730}\lg\frac{1}{2}=\lg\frac{4}{10}$，所以 $t=5\,730\times\frac{1-2\lg 2}{\lg 2}\approx 5\,730\times\frac{1-2\times 0.301\,0}{0.301\,0}\approx 7\,577$，所以可推断该生物死亡的时间约为公元前 $7\,577-2\,023=5\,554$ 年. 故选 A.

7. D　【解析】设 $f(x)=-x^2,g(x)=x^2-4x$ 分别存在最大值 $M=0$ 和最小值 $m=-4$，$f(x)-g(x)=-2x^2+4x$ 的最大值为 $2\neq M-m$，所以充分性不成立；反之，若 $f(x)=-2x^2,g(x)=-x^2-2x$，$f(x)-g(x)=-x^2+2x$ 取得最大值为 1，但 $g(x)=-x^2-2x$ 不存在最小值，所以必要性不成立. 故选 D.

8. B　【解析】由已知，$f(x)=2\sqrt{3}\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{6}\right)$，当 $x\in[0,2\pi)$ 时，$\omega x-\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{\pi}{6},2\pi\omega-\frac{\pi}{6}\right)$，因为 $f(x)$ 在区间 $[0,2\pi)$ 上恰有 9 个极值点，所以 $\frac{17\pi}{2}<2\pi\omega-\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{19\pi}{2}$，所以 $\frac{13}{3}<\omega\leqslant\frac{29}{6}$. 故选 B.

二、选择题

9. AC　【解析】由 $x>y$ 可知 $x^2-1>y^2-1$，再根据对数函数的单调性可知 A 选项正确. 同理可得 C 选项正确. 由 $x>y$ 可得 $-x<-y$，由指数函数的单调性可得 D 选项错误. 对于 B 选项：由于正弦函数在定义域内并不是单调的，所以 $\sin x$ 与 $\sin y$ 的大小关系无法确定，故 B 选项错误. 故选 AC.

10. ACD　【解析】A 选项，由题意，$f(-x)=(-x)^3e^{|-x|}=-x^3e^{|x|}=-f(x)$，故 $f(x)$ 是奇函数，故 A 正确；当 $x\geqslant 0$ 时，$f'(x)\geqslant 0$，故此时 $f(x)$ 单调递增，又 $f(x)$ 是奇函数，所以当 $x<0$ 时，$f(x)$ 单调递增，$f(x)$ 在 $x=0$ 处图象不间断，因此 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，且 $f(0)=0$，故 $f(x)$ 有 1 个零点，无极值点，故 B 错误，C 正确；D 选项，由题意设 $f(x)$ 在 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线斜率 $k=f'(x_0)=4e$，解得 $x_0=1$ 或 $x_0=-1$，因此 $f(x)$ 在这两点处的切

线方程分别为 $y=4ex-3e$，$y=4ex+3e$，故 D 正确.

故选 ACD.

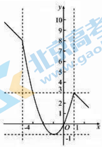
11. BD 【解析】A：若 $f(0)=\sqrt{3}$，则 $2\cos\varphi=\sqrt{3}$，所以 $\cos\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2}$，因为 $\varphi\in[0,\pi]$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{6}$，所以 A 错误；B：若函数 $y=f(x)$ 为偶函数，则 $\varphi=0$ 或 $\varphi=\pi$，所以 $\cos^2\varphi=1$，所以 B 正确；C：若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调，则 $b-a\leqslant\frac{T}{2}=\frac{\pi}{\omega}$，但不一定小于 $\frac{\pi}{2\omega}$，所以 C 错误；D：若 $\varphi=\frac{\pi}{2}$，则 $f(x)=-2\sin\omega x$，当 $x\in\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{4}\right]$ 时，$\omega x\in\left[-\frac{\pi}{3}\omega,\frac{\pi}{4}\omega\right]$，因为 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{4}\right]$ 上单调，所以 $\begin{cases}-\frac{\pi}{3}\omega\geqslant-\frac{\pi}{2},\\ \frac{\pi}{4}\omega\leqslant\frac{\pi}{2},\end{cases}$ 解得，$\omega\in\left(0,\frac{3}{2}\right]$，所以 D 正确. 故选 BD.

12. ACD 【解析】$a-b=\ln b-b+1$，构造函数 $f(x)=\ln x-x+1$，$f'(x)=\frac{1}{x}-1$，所以 $f(x)$ 在 $(0,1]$ 单调递增，在 $(1,+\infty)$ 单调递减，所以 $f(x)\leqslant f(1)=0$，$a\leqslant b$，$c-b=e^b-b-1$，构造函数 $g(x)=e^x-x-1$，$g'(x)=e^x-1$，因为 $x>0$ 时，$g'(x)>0$，所以 $g(x)$ 单调递增，所以 $g(x)>g(0)=0$，所以 $c>b$. 故选 ACD.

三、填空题

13. $a_n=\left(\frac{2}{3}\right)^n$ $\left(a_n=\cos\frac{n}{n+1}\right)$ 【解析】因为 $0<a_{n+1}<a_n<1$（$\forall n\in\mathbf{N}^*$），所以满足上述条件数列 $\{a_n\}$ 的一个通项公式可以为 $a_n=\left(\frac{2}{3}\right)^n$ 或 $a_n=\cos\frac{n}{n+1}$.（答案符合条件即可）

14. $(-1,3)$ 【解析】如图，作出 $y=f(x)$ 的图象，与直线 $y=m$，若 $g(x)$ 有且只有 3 个不同的零点，则 m 的取值范围是 $(-1,3)$，故答案为 $(-1,3)$.



15. $\left[\frac{2\sqrt{\pi}}{\pi},+\infty\right)$ 【解析】设矩形长为 a，宽为 b，设圆的半径为 r，则 $\pi r^2=ab$，所以 $\frac{C_1}{C_2}=\frac{2(a+b)}{2\pi r}=\frac{a+b}{\pi r}\geqslant\frac{2\sqrt{ab}}{\pi r}=\frac{2\sqrt{\pi r^2}}{\pi r}=\frac{2\sqrt{\pi}}{\pi}$，当且仅当 $a=b=r\sqrt{\pi}$ 时，等号成立. 故答案为 $\left[\frac{2\sqrt{\pi}}{\pi},+\infty\right)$.

16. $\frac{2^{2n+1}-2}{3}$ 【解析】因为 $A_1=(-1,1)$，依题意得，$A_2=(-1,0,0,1)$，$A_3=(-1,0,-1,1,-1,1,0,1)$，显然，A_1 中有 2 项，其中 1 项为 -1，1 项为 1，A_2 中有 4 项，其中 1 项为 -1，1 项为 1，2 项为 0，A_3 中有 8 项，其中 3 项为 -1，3 项为 1，2 项为 0，由此可得 A_n 总共有 2^n 项，其中 1 和 -1 的项数相同，设 A_n 中有 c_n 项为 0，所以 $2b_n+c_n=2^n$，从而 $2b_{n-1}+c_{n-1}=2^{n-1}$ $(n\geqslant2)$ ①，因为 $f(A)$ 表示把 A 中每个 -1 都变为 $-1,0$，每个 0 都变为 $-1,1$，每个 1 都变为 $0,1$ 所得到的新的有序实数组，则 $b_n=b_{n-1}+c_{n-1}$ $(n\geqslant2)$ ②，①+②得，$b_n+b_{n-1}=2^{n-1}$ $(n\geqslant2)$ ③，所以 $b_{n+1}+b_n=2^n$ ④，④－③得，$b_{n+1}-b_{n-1}=2^{n-1}$ $(n\geqslant2)$，所以当 n 为奇数时，$b_n=(b_n-b_{n-2})+(b_{n-2}-b_{n-4})+\cdots+(b_3-b_1)+b_1=2^{n-2}+2^{n-4}+\cdots+2^1+1=\frac{2-2^n}{1-4}+1=\frac{2^n+1}{3}$，当 n 为偶数时，因为 $b_n+b_{n-1}=2^{n-1}$ $(n\geqslant2)$，所以 $b_n=2^{n-1}-b_{n-1}=$

$2^{n-1}-\frac{2^{n-1}+1}{3}=\frac{2^n-1}{3}$，所以 $b_n=\begin{cases}\frac{2^n+1}{3}, n\text{为奇数}, \\ \frac{2^n-1}{3}, n\text{为偶数}.\end{cases}$ 当 n 为奇数时，$b_n+b_{n+1}=\frac{2^n+1}{3}+\frac{2^{n+1}-1}{3}=2^n$，所以 $\{b_n\}$ 的前 $2n$ 项和为 $\frac{2-2^{2n-1}\times 4}{1-4}=\frac{2^{2n+1}-2}{3}$．故答案为 $\frac{2^{2n+1}-2}{3}$.

四、解答题

17.**解**：(1) $A=\{x|-1<x<\sqrt{6}\}$，　　（1分）

$\complement_{R}A=(-\infty,-1]\cup[\sqrt{6},+\infty)$，　　（2分）

$A\cap B=\{x|-1<x<\sqrt{5}\}$，　　（3分）

$A\cup B=\{x|-1\leqslant x<\sqrt{6}\}$.　　（4分）

(2)当 $a=-1$ 时，$A=\varnothing$，显然 $A\subseteq B$ 成立；　　（5分）

当 $a<-1$ 时，$A=(a,-1)$，显然 $A\subseteq B$ 不成立；　　（6分）

当 $a>-1$ 时，$A=(-1,a)$，　　（7分）

因为 $A\subseteq B$，$B=[-1,\sqrt{5})$，所以 $a\leqslant\sqrt{5}$，即此时 $-1<a\leqslant\sqrt{5}$.　　（9分）

综上，$-1\leqslant a\leqslant\sqrt{5}$.　　（10分）

18.**解**：(1)设 $t=\log_2 x$，则 $t-\frac{3}{t}+2=0$，即 $t^2+2t-3=0$，得 $t_1=-3$，$t_2=1$，

所以方程的根为：$x_1=\frac{1}{8}$，$x_2=2$.　　（5分）

(2)设 $t=\log_2 x$，$g(t)=t+\frac{a}{t}+3$，$t\in[1,4]$，

由题意可得 $t+\frac{a}{t}+3\geqslant 9$，即 $a\geqslant -t^2+6t$ 在 $t\in[1,4]$ 时恒成立．

而 $y=-t^2+6t$ 在 $[1,3)$ 上单调递增，在 $(3,4]$ 上单调递减，

所以当 $t=3$ 时，$y=-t^2+6t$ 取最大值为 9，所以 $a\in[9,+\infty)$.　　（12分）

19.**解**：(1)因为 $\frac{S_n}{n+1}=\frac{a_n}{2}$，所以 $S_n=\frac{(n+1)a_n}{2}$，$S_{n-1}=\frac{na_{n-1}}{2}$，　　（1分）

两个等式相减得，$S_n-S_{n-1}=\frac{(n+1)a_n}{2}-\frac{na_{n-1}}{2}$ $(n\geqslant 2)$，　　（2分）

所以 $a_n=\frac{(n+1)a_n}{2}-\frac{na_{n-1}}{2}$ $(n\geqslant 2)$，所以 $\frac{a_n}{n}=\frac{a_{n-1}}{n-1}$ $(n\geqslant 2)$，

因为 $a_1=1$，所以 $\frac{a_n}{n}=\frac{a_1}{1}=1$ $(n\geqslant 2)$，　　（4分）

所以 $a_n=na_1=n$ $(n\geqslant 2)$，经验证，当 $n=1$ 时，$a_1=1$ 成立，所以 $a_n=n$ $(n\in\mathbf{N}^*)$.　　（5分）

(2)因为 $b_n=3^n a_n=3^n\cdot n$，所以 $T_n=3^1\times 1+3^2\times 2+3^3\times 3+\cdots+3^n\cdot n$　①，　　（6分）

所以 $3T_n=3^2\times 1+3^3\times 2+3^4\times 3+\cdots+3^{n+1}\cdot n$　②，　　（7分）

①－②，得 $-2T_n=3+3^2+3^3+\cdots+3^n-3^{n+1}\cdot n$，　　（8分）

即 $-2T_n=\frac{3-3^{n+1}}{1-3}-n\cdot 3^{n+1}$，

所以 $T_n=\frac{(2n-1)3^{n+1}+3}{4}$.　　（9分）

因为 $T_n=\frac{(2n-1)3^{n+1}+3}{4}$ 是关于 n 的增函数，且 $T_3=102$，

所以 $T_n>102$，所以 $n\geqslant 4$ $(n\in\mathbf{N}^*)$.　　（12分）

20.**解**：(1)因为 $\alpha\in(0,\pi)$，所以 $\frac{\alpha}{2}\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，　　（1分）

所以 $\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{1-\sin^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{1}{3}$，$\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=2\sqrt{2}$，　　（3分）

因为 $\tan\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)=-\sqrt{2}$，

所以 $\tan\frac{\alpha-\beta}{2}=\tan\left[\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)-\frac{\alpha}{2}\right]=$

$\frac{\tan\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)-\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)\tan\frac{\alpha}{2}}=\frac{-\sqrt{2}-2\sqrt{2}}{1+(-\sqrt{2}\times2\sqrt{2})}=\sqrt{2}$.

(6分)

(2) 因为 $\sqrt{2}=\tan\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{\tan\frac{\alpha}{2}-\tan\frac{\beta}{2}}{1+\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}}=$

$\frac{2\sqrt{2}-\tan\frac{\beta}{2}}{1+2\sqrt{2}\tan\frac{\beta}{2}}$,所以 $\tan\frac{\beta}{2}=\frac{\sqrt{2}}{5}$.

因为 $\sin^2\frac{\beta}{2}+\cos^2\frac{\beta}{2}=1,\beta\in(0,\pi)$,所以 $\sin\frac{\beta}{2}=\frac{\sqrt{6}}{9},\cos\frac{\beta}{2}=\frac{5\sqrt{3}}{9}$. (8分)

又 $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

所以 $\sin\frac{\alpha+\beta}{2}=\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}\times\frac{5\sqrt{3}}{9}+\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{6}}{9}=\frac{11\sqrt{6}}{27}$. (12分)

21. 解:(1)在△ABD中,由正弦定理得,$\frac{\sin\alpha}{BD}=\frac{\sin B}{AD}$,

则 $\sin\alpha=\frac{BD\sin B}{d}$.

在△ACD中,由正弦定理得,$\frac{\sin\beta}{CD}=\frac{\sin C}{d}$,

则 $\sin\beta=\frac{CD\sin C}{d}$. (2分)

因为 $2ac\sin\alpha+2ab\sin\beta=3bc$,所以 $\frac{\sin\alpha}{b}+\frac{\sin\beta}{c}=\frac{3}{2a}$. (3分)

所以 $\frac{\sin\alpha}{b}+\frac{\sin\beta}{c}=\frac{BD\sin B}{bd}+\frac{CD\sin C}{cd}=\frac{BD\sin A}{ad}+\frac{CD\sin A}{ad}=\frac{\frac{1}{2}(BD+CD)}{ad}=\frac{\frac{1}{2}a}{ad}=\frac{1}{2d}$, (5分)

所以 $\frac{1}{2d}=\frac{3}{2a}$,所以 $a=3d$. (6分)

(2)由 $CD=2BD$,得 $CD=\frac{2a}{3},BD=\frac{a}{3}$.

在△ABD中,由余弦定理得,$\cos\angle ADB=\frac{BD^2+d^2-AB^2}{2BD\cdot d}=\frac{2a^2-9c^2}{2a^2}$, (7分)

在△ACD中,由余弦定理得,$\cos\angle ADC=\frac{CD^2+d^2-AC^2}{2CD\cdot d}=\frac{5a^2-9b^2}{4a^2}$, (8分)

∵ $\angle ADB+\angle ADC=180°$,$\cos\angle ADB=-\cos\angle ADC$,即 $\frac{2a^2-9c^2}{2a^2}=-\frac{5a^2-9b^2}{4a^2}$,

整理可得,$a^2-b^2=2c^2$. (9分)

在△ABC中,由余弦定理得,$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$,则 $-\frac{c^2}{2bc}=-\frac{c}{2b}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$,

∴ $c=\sqrt{3}b$,∴ $a^2-b^2=6b^2$,即 $a=\sqrt{7}b$. (11分)

所以 $\cos\angle ADC=\frac{5a^2-9b^2}{4a^2}=\frac{35b^2-9b^2}{28b^2}=\frac{13}{14}$.

(12分)

22. 解:(1) $f'(x)=\ln x+1$,其中 $x\in(0,+\infty)$,

令 $m(x)=\ln x^2-2x+2$,可得 $m'(x)=\frac{2}{x}-2=\frac{2(1-x)}{x}$, (1分)

当 $x\in(0,1)$时,可得 $m'(x)>0$,$m(x)$单调递增,

当 $x\in(1,+\infty)$时,可得 $m'(x)<0$,$m(x)$单调递减,

所以 $m(x)\leqslant m(1)=0$,所以 $m(\sqrt{x})=\ln x-2\sqrt{x}+2\leqslant0$. (3分)

即 $\ln x+1\leqslant2\sqrt{x}-1$,即 $f'(x)\leqslant2\sqrt{x}-1$. (4分)

(2) $g(x)=(x+1)\ln(x+1)-\frac{1}{2}ax^2-x$,其中 $x\in(0,+\infty)$.

可得,$g'(x)=\ln(x+1)+1-ax-1=\ln(x+1)-ax$.

令 $\varphi(x)=g'(x)=\ln(x+1)-ax$，可得 $\varphi'(x)=\frac{1}{x+1}-a$。 （5分）

①当 $a\leqslant 0$ 时，$\varphi'(x)>0$，$\varphi(x)=g'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $g'(x)>g'(0)=0$，

所以函数 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以函数 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上不存在最大值； （6分）

②当 $a\geqslant 1$ 时，$\varphi'(x)=\frac{1}{x+1}-a<1-a\leqslant 0$，

可得 $\varphi(x)=g'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，

所以 $g'(x)<g'(0)=0$，

所以函数 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，

所以函数 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上不存在最大值；（7分）

③当 $0<a<1$ 时，由 $\varphi'(x)=\frac{1}{x+1}-a=0$，可得 $x=\frac{1}{a}-1>0$，

所以当 $x\in\left(0,\frac{1}{a}-1\right)$ 时，$\varphi'(x)>0$，所以 $\varphi(x)=g'(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{a}-1\right)$ 上单调递增，

当 $x\in\left(\frac{1}{a}-1,+\infty\right)$ 时，$\varphi'(x)<0$，$\varphi(x)=g'(x)$ 在 $\left(\frac{1}{a}-1,+\infty\right)$ 上单调递减。 （8分）

因为 $g'(0)=0$，所以 $g'\left(\frac{1}{a}-1\right)>0$，又当 $x\to+\infty$ 时，$g'(x)=\ln(x+1)-ax\to-\infty$，

所以由零点的存在性定理，存在 $x_0\in\left(\frac{1}{a}-1,+\infty\right)$，使得 $\varphi(x_0)=0$。 （10分）

所以，当 $x\in(0,x_0)$ 时，$\varphi(x)>0$，即 $g'(x)>0$，

当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$\varphi(x)<0$，即 $g'(x)<0$，

所以 $g(x)$ 在 $(0,x_0)$ 单调递增，在 $(x_0,+\infty)$ 单调递减，

此时 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上存在最大值 $g(x_0)$，符合题意，

综上所述，实数 a 的取值范围是 $(0,1)$。 （12分）

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 50W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数千场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。

推荐大家关注北京高考在线网站官方微信公众号：京考一点通，我们会持续为大家整理分享最新的高中升学资讯、政策解读、热门试题答案、招生通知等内容！