

2023—2024 学年高中毕业班阶段性测试(一)

数 学

考生注意:

- 答题前,考生务必将自己的姓名、考生号填写在试卷和答题卡上,并将考生号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。
- 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再涂涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
- 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、单项选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

- $\frac{i}{(1+i)^3} =$
A. $\frac{1}{4} + \frac{1}{4}i$ B. $\frac{1}{4} - \frac{1}{4}i$ C. $-\frac{1}{4} + \frac{1}{4}i$ D. $-\frac{1}{4} - \frac{1}{4}i$
- 已知集合 $A = \{x | \sqrt{x} \geq 1\}$, $B = \{x | x^2 \leq 9\}$, 则 $[-3, +\infty) =$
A. $\complement_{\mathbb{R}}(A \cap B)$ B. $\complement_{\mathbb{R}}(A \cup B)$ C. $A \cap B$ D. $A \cup B$
- 已知圆经过点 $A(4,4)$, $B(-2,4)$, $C(4,-4)$, 则该圆的半径为
A. 4 B. 5 C. 8 D. 10
- 对于任意实数 x , 用 $[x]$ 表示不大于 x 的最大整数, 例如: $[\pi] = 3$, $[0.1] = 0$, $[-2.1] = -3$, 则“ $[x] > [y]$ ”是“ $x > y$ ”的
A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件
- 已知函数 $f(x) = \cos\left(3x - \frac{\pi}{10}\right)$, 若将 $y = f(x)$ 的图象向左平移 $m(m > 0)$ 个单位长度后所得的图象关于坐标原点对称, 则 m 的最小值为
A. $\frac{\pi}{10}$ B. $\frac{\pi}{5}$ C. $\frac{3\pi}{10}$ D. $\frac{8\pi}{15}$
- 位于成都市龙泉驿区的东安湖体育公园是第 31 届世界大学生夏季运动会的核心场馆, 它包含一座综合体育场、一座多功能体育馆、一座游泳跳水馆和一座综合小球馆。现安排包含甲、乙在内的 6 名同学到这 4 个场馆做志愿者, 每人去 1 个场馆, 每个场馆至少安排 1 个人,



则甲、乙两人安排在相同场馆的方法种数为

- A. 96 B. 144 C. 240 D. 360
7. 把过棱锥的顶点且与底面垂直的直线称为棱锥的轴, 过棱锥的轴的截面称为棱锥的轴截面。现有一个正三棱锥、一个正四棱锥、一个正六棱锥, 它们的高相等, 轴截面面积的最大值也相等, 则此正三棱锥、正四棱锥、正六棱锥的体积之比为
A. $1: \frac{\sqrt{3}}{3}: \frac{9}{4}$ B. $1: \frac{\sqrt{3}}{3}: \frac{9}{8}$ C. $1: \frac{\sqrt{3}}{2}: \frac{9}{8}$ D. $1: \frac{\sqrt{3}}{2}: \frac{3}{2}$
8. 若 α, β 为锐角, 且 $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$, 则 $\tan \alpha + \tan \beta$ 的最小值为
A. $2\sqrt{2} - 2$ B. $\sqrt{2} - 1$ C. $2\sqrt{3} - 2$ D. $\sqrt{3} - 1$

二、多项选择题:本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。在每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求, 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分。

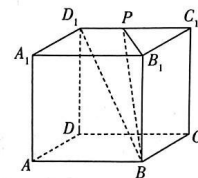
9. 已知一组样本数据 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{10}$ ($x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_{10}$) 中, x_5 与样本平均数相等, $x_6 = 0$ 。则去掉以下哪个数据以后, 新的样本数据的方差一定比原来的样本数据的方差小?
A. x_1 B. x_5 C. x_6 D. x_{10}

10. 已知函数 $f(x) = \frac{e^x}{1-e^x}$, 则

- A. $f(x)$ 在定义域上单调递增
B. $f(x)$ 没有零点
C. 不存在平行于 x 轴且与曲线 $y = f(x)$ 相切的直线
D. $f(x)$ 的图象是中心对称图形

11. 如图所示, 在棱长为 2 的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, P 是线段 C_1D_1 上的动点, 则下列说法正确的是

- A. 平面 $BB_1P \perp$ 平面 $ABCD$
B. 存在点 P , 使 $BP = 2$
C. 存在点 P , 使直线 B_1P 与 BD_1 所成角的余弦值为 $\frac{2}{3}$
D. 存在点 P , 使点 A, C 到平面 BB_1P 的距离之和为 3



12. 已知双曲线 $E: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的右焦点为 $F(6,0)$, 以坐标原点 O 为圆心, 线段 OF 为半

径作圆与双曲线 E 在第一、二、三、四象限依次交于 A, B, C, D 四点, 若 $\cos \angle AOF = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, 则

- A. $|AC| = |BD| = 12$ B. $\cos \angle AOB = -\frac{4\sqrt{2}}{9}$
C. 四边形 $ABCD$ 的面积为 $32\sqrt{2}$ D. 双曲线 E 的离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{2}$

三、填空题:本题共4小题,每小题5分,共20分.

13. 已知抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 F , 直线 $y = 4$ 与抛物线交于点 M , 且 $|MF| = 4$, 则 $p =$ _____.

14. 在 $\triangle ABC$ 中, $\vec{BD} = \frac{1}{3}\vec{BC}$, E 是线段 AD 上的动点, 设 $\vec{CE} = x\vec{CA} + y\vec{CB} (x, y \in \mathbf{R})$, 则 $2x + 3y =$ _____.

15. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} = 3a_n + 2, a_3 + a_2 = 22$, 则满足 $a_n > 160$ 的最小正整数 $n =$ _____.

16. 已知定义在 \mathbf{R} 上的函数 $f(x)$ 及其导函数 $f'(x)$ 满足 $f'(x) > -f(x)$, 若 $f(\ln 3) = \frac{1}{3}$, 则满足不等式 $f(x) > \frac{1}{e^x}$ 的 x 的取值范围是 _____.

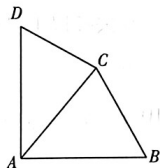
四、解答题:共70分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.

17. (10分)

如图, 在平面四边形 $ABCD$ 中, $\angle BAD = 90^\circ, D = 60^\circ, AC = 4, CD = 3$.

(I) 求 $\cos \angle CAD$;

(II) 若 $AB = \frac{5\sqrt{3}}{2}$, 求 BC .



18. (12分)

记递增的等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 已知 $S_5 = 85$, 且 $a_6 = 7a_1$.

(I) 求 a_n 和 S_n ;

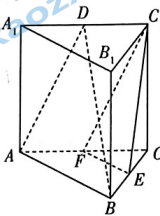
(II) 设 $b_n = \frac{5}{a_n a_{n+1}}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

19. (12分)

如图, 在直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $AC = 2BC = CC_1 = 2$, D, E, F 分别是棱 A_1C_1, BC, AC 的中点, $\angle ACB = 60^\circ$.

(I) 证明: 平面 $ABD \parallel$ 平面 FEC_1 ;

(II) 求直线 AC 与平面 ABD 所成角的正弦值.



20. (12分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 过点 $(2, 3)$, 且 C 的右焦点为 $F(2, 0)$.

(I) 求 C 的离心率;

(II) 过点 F 且斜率为 1 的直线与 C 交于 M, N 两点, P 是直线 $x = 8$ 上的动点, 记直线 PM, PN, PF 的斜率分别为 k_{PM}, k_{PN}, k_{PF} , 证明: $k_{PM} + k_{PN} = 2k_{PF}$.

21. (12分)

小李参加某项专业资格考试, 一共要考 3 个科目, 若 3 个科目都合格, 则考试直接过关; 若都不合格, 则考试不过关; 若有 1 个或 2 个科目合格, 则所有不合格的科目需要进行一次补考, 补考都合格的考试过关, 否则不过关. 已知小李每个科目每次考试合格的概率均为 $p (0 < p < 1)$, 且每个科目每次考试的结果互不影响.

(I) 记“小李恰有 1 个科目需要补考”的概率为 $f(p)$, 求 $f(p)$ 的最大值点 p_0 .

(II) 以 (I) 中确定的 p_0 作为 p 的值.

(i) 求小李这项资格考试过关的概率;

(ii) 若每个科目每次考试要缴纳 20 元的费用, 将小李需要缴纳的费用记为 X 元, 求 $E(X)$.

22. (12分)

已知函数 $f(x) = \frac{me^x}{\sin x}, m \in \mathbf{R}$ 且 $m \neq 0$.

(I) 若当 $x \in (0, \pi)$ 时, $f(x) \geq 1$ 恒成立, 求 m 的取值范围;

(II) 若 $\exists x_1, x_2 \in (0, \pi)$ 且 $x_1 \neq x_2$, 使得 $f(x_1) = f(x_2)$, 求证: $x_1 + x_2 > \frac{\pi}{2}$.

数学·答案

一、单项选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.

1. 答案 B

命题意图 本题考查复数的基本运算.

$$\text{解析 } \frac{i}{(1+i)^3} = \frac{i}{(1+i)^2(1+i)} = \frac{i}{2i(1+i)} = \frac{1}{2+2i} = \frac{2-2i}{(2+2i)(2-2i)} = \frac{2-2i}{8} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}i.$$

2. 答案 D

命题意图 本题考查集合的运算与不等式的解法.

$$\text{解析 } \text{因为 } A = \{x | \sqrt{x} \geq 1\} = \{x | x \geq 1\}, B = \{x | x^2 \leq 9\} = \{x | -3 \leq x \leq 3\}, \text{ 则 } A \cup B = [-3, +\infty).$$

3. 答案 B

命题意图 本题考查圆的方程与性质.

$$\text{解析 } \text{作图易知 } \angle BAC = 90^\circ, \text{ 所以该圆的直径为 } |BC| = \sqrt{(4+2)^2 + (-4-4)^2} = 10, \text{ 所以半径为 } 5.$$

4. 答案 A

命题意图 本题考查充分条件与必要条件的判断.

解析 若 $[x] > [y]$, 则必有 $[x] > y \geq [y]$, 又 $x \geq [x]$, 所以 $x > y$, 充分性成立; 若 $x > y$, 取 $x = 1.2, y = 1.1$, 可知 $[x] = [y]$, 所以必要性不成立. 所以“ $[x] > [y]$ ”是“ $x > y$ ”的充分不必要条件.

5. 答案 B

命题意图 本题考查三角函数的图象与性质.

$$\text{解析 } f(x) = \cos\left(3x - \frac{\pi}{10}\right) \text{ 的图象向左平移 } m \text{ 个单位长度后, 得到的图象对应函数 } g(x) = \cos\left[3(x+m) - \frac{\pi}{10}\right] = \cos\left(3x + 3m - \frac{\pi}{10}\right), \text{ 因为 } y = g(x) \text{ 的图象关于坐标原点对称, 所以 } 3m - \frac{\pi}{10} = k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbf{Z}), \text{ 即 } m = \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{5} (k \in \mathbf{Z}), \text{ 因为 } m > 0, \text{ 故当 } k = 0 \text{ 时, } m \text{ 取得最小值 } \frac{\pi}{5}.$$

6. 答案 C

命题意图 本题考查排列组合的应用.

解析 先将 6 名同学分成 4 组: 一种方式是甲、乙组成一组, 再从另外 4 人中任选 2 人组成一组, 其余的一人一组; 另一种方式是甲、乙与另外 4 人中的 1 人组成一组, 其余的一人一组. 再把 4 组人分到 4 个场馆, 所以安排方法种数为 $(C_4^2 + C_4^1)A_4^4 = 240$.

7. 答案 C

命题意图 本题考查简单几何体的结构特征及相关计算.

解析 设 3 个正棱锥的高均为 h , 轴截面面积的最大值均为 S . 设正三棱锥的底面边长为 a , 当轴截面与底面的一条棱垂直时, 轴截面面积最大, 所以 $S = \frac{\sqrt{3}}{4}ah$, 可得正三棱锥的体积为 $V_1 = \frac{1}{3}Sa = \frac{4\sqrt{3}S^2}{9h}$. 设正四棱锥的底面进入北京高考在线网站: <http://www.gaokzx.com/> 获取更多高考资讯及各类测试试题答案!

对角线长为 $2b$, 当轴截面经过底面的一条对角线时, 轴截面面积最大, 所以 $S = bh$, 可得正四棱锥的体积为 $V_2 = \frac{2}{3}Sb = \frac{2S^2}{3h}$. 设正六棱锥的底面边长为 c , 当轴截面经过底面的两个相对的顶点时, 轴截面面积最大, 所以 $S = ch$, 可得正六棱锥的体积为 $V_3 = \frac{1}{3} \times \frac{3\sqrt{3}}{2}c^2h = \frac{\sqrt{3}S^2}{2h}$. 所以正三棱锥、正四棱锥、正六棱锥的体积之比为 $\frac{4\sqrt{3}}{9} : \frac{2}{3} : \frac{\sqrt{3}}{2}$, 即 $1 : \frac{\sqrt{3}}{2} : \frac{9}{8}$.

8. 答案 A

命题意图 本题考查和角的正切公式的应用.

解析 因为 $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = 1$, 所以 $(1 + \tan \alpha)(1 + \tan \beta) = 1 + \tan \alpha + \tan \beta + \tan \alpha \tan \beta = 1 + (1 - \tan \alpha \tan \beta) + \tan \alpha \tan \beta = 2$, 所以 $(1 + \tan \alpha)(1 + \tan \beta) \leq \left(\frac{1 + \tan \alpha + 1 + \tan \beta}{2}\right)^2$, 即 $2 \leq \frac{(\tan \alpha + \tan \beta + 2)^2}{4}$, 得 $(\tan \alpha + \tan \beta + 2)^2 \geq 8$, 显然 $\tan \alpha + \tan \beta + 2 > 0$, 所以 $\tan \alpha + \tan \beta + 2 \geq 2\sqrt{2}$, 当且仅当 $\tan \alpha = \tan \beta = \sqrt{2} - 1$ 时等号成立, 所以 $\tan \alpha + \tan \beta$ 的最小值为 $2\sqrt{2} - 2$.

二、多项选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 每小题全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 答案 AD

命题意图 本题考查样本的平均数与方差.

解析 根据方差的意义, 可知去掉最大值和最小值都可以使样本数据的方差变小, 故 x_1 和 x_{10} 符合条件; 去掉 x_5 , 样本平均数不变, 则根据方差的计算公式可知方差变大, 故 x_5 不符合条件; 去掉 x_6 , 样本方差的变化情况无法确定, 也不符合条件.

10. 答案 BCD

命题意图 本题考查函数的性质综合.

解析 对于 A, $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, 当 $x < 0$ 时, $0 < e^x < 1$, 则 $f(x) > 0$, 当 $x > 0$ 时, $e^x > 1$, 则 $f(x) < 0$, 显然 $f(x)$ 在定义域上不是单调递增, 故 A 错误;

对于 B, 令 $f(x) = 0$, 得 $e^x = 0$, 无解, 所以 $f(x)$ 没有零点, 故 B 正确;

对于 C, 求导得 $f'(x) = \frac{e^x}{(1 - e^x)^2}$, 令 $f'(x) = 0$, 得 $e^x = 0$, 无解, 所以不存在平行于 x 轴且与曲线 $y = f(x)$ 相切的直线, 故 C 正确;

对于 D, $f(-x) = \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} = \frac{1}{e^x - 1}$, 注意到 $f(x) + f(-x) = -1$, 所以 $f(x)$ 的图象关于点 $(0, -\frac{1}{2})$ 中心对称, 故 D 正确.

11. 答案 AC

命题意图 本题考查空间位置关系的判断.

解析 对于 A, 因为 $BB_1 \perp$ 平面 $ABCD$, 所以平面 $BB_1P \perp$ 平面 $ABCD$, 故 A 正确;

对于 B, 当点 P 与 C_1 重合时, BP 取最小值 $2\sqrt{2}$, 故不存在点 P , 使 $BP = 2$, 故 B 错误;

对于 C, 当点 P 与 C_1 重合时, 直线 B_1P 与 BD_1 所成角等于 $\angle BD_1A_1$, $\cos \angle BD_1A_1 = \frac{A_1D_1}{BD_1} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 当点 P 与 D_1 重

进入北京高考在线网站: <http://www.gaokzx.com/> 获取更多高考资讯及各类测试试题答案!

合时,直线 B_1P 与 BD_1 所成角等于 $\angle BD_1B_1$, $\cos \angle BD_1B_1 = \frac{B_1D_1}{BD_1} = \frac{\sqrt{6}}{3}$, 所以直线 B_1P 与 BD_1 所成角的余弦值的

的取值范围是 $\left[\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right]$, 而 $\frac{2}{3} \in \left[\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right]$, 故 C 正确;

对于 D, 当点 P 与 D_1 重合时, 点 A, C 到平面 BB_1P 的距离之和最大, 最大值为 $AC = 2\sqrt{2} < 3$, 故不存在满足条件的点 P , 故 D 错误.

12. 答案 ACD

命题意图 本题考查双曲线的方程与性质.

解析 对于 A, 由对称性可知 AC 和 BD 是圆 O 的两条直径, 所以 $|AC| = |BD| = 12$, 故 A 正确;

对于 B, 由条件得 $\cos \angle AOD = \cos 2 \angle AOF = 2 \times \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2 - 1 = \frac{7}{9}$, 而 $\angle AOD$ 与 $\angle AOB$ 互补, 所以 $\cos \angle AOB =$

$-\cos \angle AOD = -\frac{7}{9}$, 故 B 错误;

对于 C, 由已知得 $\sin \angle AOD = \sqrt{1 - \left(\frac{7}{9}\right)^2} = \frac{4\sqrt{2}}{9}$, 所以四边形 $ABCD$ 的面积为 $\frac{1}{2} \times |AC| \times |BD| \sin \angle AOD =$

$32\sqrt{2}$, 故 C 正确;

对于 D, 记双曲线的半焦距为 c ($c > 0$), 联立 $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \\ x^2 + y^2 = a^2 + b^2 = c^2, \end{cases}$ 解得 $y = \pm \frac{c^2 - a^2}{c}$, 则 $\sin \angle AOF = \frac{c^2 - a^2}{c^2}$, 再

由已知可得 $\sin \angle AOF = \sqrt{1 - \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2} = \frac{1}{3}$, 所以 $\frac{c^2 - a^2}{c^2} = \frac{1}{3}$, 所以 $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{6}}{2}$, 故 D 正确.

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 答案 4

命题意图 本题考查抛物线的方程与性质.

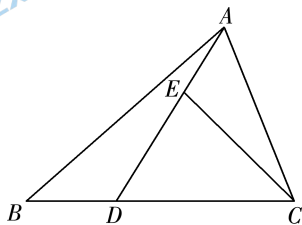
解析 把 $y = 4$ 代入抛物线方程 $y^2 = 2px$ ($p > 0$), 得 $M\left(\frac{8}{p}, 4\right)$, 根据抛物线的定义有 $|MF| = \frac{p}{2} + \frac{8}{p} = 4$, 解得

$p = 4$.

14. 答案 2

命题意图 本题考查平面向量的线性运算.

解析 如图所示, 由题意知 $\vec{CE} = x\vec{CA} + \frac{3}{2}y\vec{CD}$, 因为 A, E, D 三点共线, 所以 $x + \frac{3}{2}y = 1$, 所以 $2x + 3y = 2$.



15. 答案 5

命题意图 本题考查递推数列.

进入北京高考在线网站: <http://www.gaokzx.com/> 获取更多高考资讯及各类测试试题答案!

解析 由 $\begin{cases} a_3 = 3a_2 + 2, \\ a_3 + a_2 = 22, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a_2 = 5, \\ a_3 = 17, \end{cases}$ 又 $a_2 = 3a_1 + 2$, 所以 $a_1 = 1$. 另一方面由 $a_{n+1} = 3a_n + 2$, 可得 $a_{n+1} + 1 =$

$3(a_n + 1)$, 所以 $\{a_n + 1\}$ 是首项为 $a_1 + 1 = 2$, 公比为 3 的等比数列, 所以 $a_n = 2 \times 3^{n-1} - 1$, 易知 $\{a_n\}$ 是递增数列, 又 $a_4 = 2 \times 27 - 1 = 53, a_5 = 2 \times 81 - 1 = 161$, 所以满足 $a_n > 160$ 的最小正整数 $n = 5$.

16. 答案 $(\ln 3, +\infty)$

命题意图 本题考查利用导数研究函数性质.

解析 由题意, 对任意 $x \in \mathbf{R}$, 都有 $f'(x) > -f(x)$ 成立, 即 $f'(x) + f(x) > 0$. 构造函数 $g(x) = e^x f(x)$, 则 $g'(x) = f'(x)e^x + f(x)e^x = e^x [f'(x) + f(x)] > 0$, 所以函数 $g(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递增. 不等式 $f(x) > \frac{1}{e^x}$ 即 $e^x f(x) > 1$, 即 $g(x) > 1$. 因为 $f(\ln 3) = \frac{1}{3}$, 所以 $g(\ln 3) = e^{\ln 3} f(\ln 3) = 3 \times \frac{1}{3} = 1$. 故当 $x > \ln 3$ 时, $g(x) > g(\ln 3) = 1$, 所以不等式 $g(x) > 1$ 的解集为 $(\ln 3, +\infty)$, 即所求的 x 的取值范围为 $(\ln 3, +\infty)$.

四、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.

17. 命题意图 本题考查正弦定理和余弦定理的应用.

解析 (I) 在 $\triangle ACD$ 中, 由正弦定理得 $\frac{CD}{\sin \angle CAD} = \frac{AC}{\sin D}$, 即 $\frac{3}{\sin \angle CAD} = \frac{4}{\sin 60^\circ}$, (2 分)

所以 $\sin \angle CAD = \frac{3\sqrt{3}}{8}$ (3 分)

由题设知 $\angle CAD < 90^\circ$, 所以 $\cos \angle CAD = \sqrt{1 - \left(\frac{3\sqrt{3}}{8}\right)^2} = \frac{\sqrt{37}}{8}$ (5 分)

(II) 由题设及 (I) 知, $\cos \angle BAC = \sin \angle CAD = \frac{3\sqrt{3}}{8}$, (7 分)

在 $\triangle ABC$ 中, 由余弦定理得

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \cos \angle BAC = \frac{75}{4} + 16 - 2 \times \frac{5\sqrt{3}}{2} \times 4 \times \frac{3\sqrt{3}}{8} = \frac{49}{4}$, (9 分)

所以 $BC = \frac{7}{2}$ (10 分)

18. 命题意图 本题考查等差数列的性质以及数列求和.

解析 (I) 设 $\{a_n\}$ 的公差为 $d (d > 0)$.

因为 $S_5 = 5a_3 = 85$, 所以 $a_3 = 17$, (2 分)

由 $a_6 = 7a_1$ 得 $17 + 3d = 7(17 - 2d)$, 解得 $d = 6$, (3 分)

所以 $a_1 = 5, a_n = a_3 + (n-3)d = 17 + (n-3) \times 6 = 6n - 1$, (5 分)

$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{n(5 + 6n - 1)}{2} = 3n^2 + 2n$ (7 分)

(II) 由 (I) 得, $b_n = \frac{5}{a_n a_{n+1}} = \frac{5}{(6n-1)(6n+5)} = \frac{5}{6} \left(\frac{1}{6n-1} - \frac{1}{6n+5} \right)$, (9 分)

所以 $T_n = \frac{5}{6} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{11} + \frac{1}{11} - \frac{1}{17} + \cdots + \frac{1}{6n-7} - \frac{1}{6n-1} + \frac{1}{6n-1} - \frac{1}{6n+5} \right)$

$= \frac{5}{6} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6n+5} \right) = \frac{n}{6n+5}$ (12 分)

19. 命题意图 本题考查面面平行的证明以及线面角的计算.

解析 (I) 在 $\triangle ABC$ 中, 因为 E, F 分别是 BC, AC 的中点,

所以 $AB \parallel EF$ (1分)

因为 $AC \parallel A_1C_1, AF = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}A_1C_1 = DC_1$,

所以四边形 AFC_1D 为平行四边形, 所以 $AD \parallel FC_1$, (3分)

又因为 $AD \cap AB = A, FE \cap FC_1 = F$, (4分)

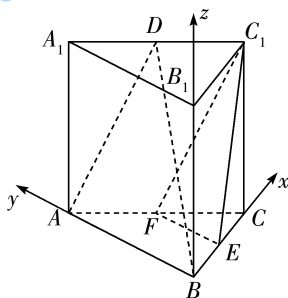
所以平面 $ABD \parallel$ 平面 FEC_1 (5分)

(II) 因为 $AC = 2, CB = 1, \angle ACB = 60^\circ$, 由余弦定理可得 $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cos \angle ACB = 3$,

所以 $AB^2 + BC^2 = AC^2$, 从而 $AB \perp BC$.

以 B 为坐标原点, $\vec{BC}, \vec{BA}, \vec{BB}_1$ 的方向分别为 x 轴, y 轴, z 轴的正方向, 建立如图所示的空间直角坐标系 $B-xyz$.

..... (6分)



故 $B(0,0,0), A(0,\sqrt{3},0), D\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 2\right), C(1,0,0)$.

从而 $\vec{BA} = (0, \sqrt{3}, 0), \vec{BD} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 2\right), \vec{AC} = (1, -\sqrt{3}, 0)$ (7分)

设平面 ABD 的法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$, 由 $\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \vec{BA} = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \vec{BD} = 0, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} \sqrt{3}y = 0, \\ \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y + 2z = 0, \end{cases}$ (9分)

取 $x = 4$, 则 $\mathbf{n} = (4, 0, -1)$ 为平面 ABD 的一个法向量, (10分)

所以 $\cos \langle \mathbf{n}, \vec{AC} \rangle = \frac{\mathbf{n} \cdot \vec{AC}}{|\mathbf{n}| \cdot |\vec{AC}|} = \frac{4}{\sqrt{17} \times 2} = \frac{2\sqrt{17}}{17}$, (11分)

所以直线 AC 与平面 ABD 所成角的正弦值为 $\frac{2\sqrt{17}}{17}$ (12分)

20. 命题意图 本题考查椭圆的方程与性质, 椭圆与直线的位置关系.

解析 (I) 由 $F(2,0)$ 得 C 的半焦距为 $c = 2$, (1分)

所以 $a^2 = b^2 + 4$, (2分)

又 C 过点 $(2,3)$,

所以 $\frac{4}{b^2 + 4} + \frac{9}{b^2} = 1$, 解得 $b^2 = 12$, (3分)

所以 $a^2 = 16, a = 4$ (4分)

进入北京高考在线网站: <http://www.gaokzx.com/> 获取更多高考资讯及各类测试试题答案!

故 C 的离心率为 $\frac{c}{a} = \frac{1}{2}$ (5 分)

(II) 由 (I) 可知 C 的方程为 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$. 设 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2), P(8, y_0)$.

由题意可得直线 MN 的方程为 $y = x - 2$, (6 分)

联立 $\begin{cases} y = x - 2, \\ \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1, \end{cases}$ 消去 y 可得 $7x^2 - 16x - 32 = 0$,

则 $x_1 + x_2 = \frac{16}{7}, x_1 x_2 = -\frac{32}{7}$, (7 分)

则 $k_{PM} + k_{PN} = \frac{y_0 - y_1}{8 - x_1} + \frac{y_0 - y_2}{8 - x_2} = \frac{(y_0 - x_1 + 2)(8 - x_2) + (y_0 - x_2 + 2)(8 - x_1)}{(8 - x_1)(8 - x_2)}$ (8 分)

$$= \frac{16y_0 + 32 + 2x_1 x_2 - (y_0 + 10)(x_1 + x_2)}{64 + x_1 x_2 - 8(x_1 + x_2)}$$

$$= \frac{16y_0 + 32 + 2\left(-\frac{32}{7}\right) - \frac{16}{7}(y_0 + 10)}{64 - \frac{32}{7} - 8 \times \frac{16}{7}} \dots\dots\dots (9 \text{ 分})$$

$$= \frac{y_0}{3}, \dots\dots\dots (10 \text{ 分})$$

又 $k_{PF} = \frac{y_0 - 0}{8 - 2} = \frac{y_0}{6}$, (11 分)

因此 $k_{PM} + k_{PN} = 2k_{PF}$ (12 分)

21. 命题意图 本题考查相互独立事件的概率计算以及随机变量的期望.

解析 (I) 由题意知 $f(p) = 3p^2(1 - p), 0 < p < 1$, (1 分)

则 $f'(p) = -9p^2 + 6p = 3p(2 - 3p)$,

当 $0 < p < \frac{2}{3}$ 时, $f'(p) > 0$, 当 $\frac{2}{3} < p < 1$ 时, $f'(p) < 0$,

所以当 $p = \frac{2}{3}$ 时, $f(p)$ 取最大值, 即 $p_0 = \frac{2}{3}$ (4 分)

(II) (i) 小李第一次考试 3 个科目都合格的概率为 $P_1 = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$, (5 分)

小李第一次考试有 2 个科目合格, 补考 1 个科目且合格的概率为 $P_2 = 3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{27}$, (6 分)

小李第一次考试有 1 个科目合格, 补考 2 个科目且均合格的概率为 $P_3 = 3 \times \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{8}{81}$,

..... (7 分)

所以小李这项资格考试过关的概率为 $P = P_1 + P_2 + P_3 = \frac{56}{81}$ (8 分)

(ii) X 的所有可能取值为 60, 80, 100, (9 分)

则 $P(X = 60) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{3}, P(X = 80) = 3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \frac{1}{3} = \frac{4}{9}$,

$$P(X=100) = 3 \times \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{2}{9}, \dots\dots\dots (11 \text{ 分})$$

$$\text{故 } E(X) = 60 \times \frac{1}{3} + 80 \times \frac{4}{9} + 100 \times \frac{2}{9} = \frac{700}{9}. \dots\dots\dots (12 \text{ 分})$$

22. 命题意图 本题考查利用导数研究函数的性质.

解析 (I) 当 $x \in (0, \pi)$ 时, $\sin x > 0$, 所以由 $\frac{me^x}{\sin x} \geq 1$, 可得 $m \geq \frac{\sin x}{e^x}$.

$$\text{令 } g(x) = \frac{\sin x}{e^x}, \text{ 则 } g'(x) = \frac{\cos x - \sin x}{e^x}, \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

$$\text{令 } g'(x) = 0, \text{ 则 } \sin x = \cos x, \text{ 而 } x \in (0, \pi), \text{ 得 } x = \frac{\pi}{4}. \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$\text{故当 } x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right) \text{ 时}, g'(x) > 0, \text{ 当 } x \in \left(\frac{\pi}{4}, \pi\right) \text{ 时}, g'(x) < 0, \dots\dots\dots (3 \text{ 分})$$

故 $g(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ 上单调递增, 在 $\left(\frac{\pi}{4}, \pi\right)$ 上单调递减,

$$\text{故 } [g(x)]_{\max} = g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{\pi}{4}}, \dots\dots\dots (4 \text{ 分})$$

$$\text{所以 } m \text{ 的取值范围为 } \left[\frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{\pi}{4}}, +\infty\right). \dots\dots\dots (5 \text{ 分})$$

$$(II) \text{ 易知 } f(x) \neq 0, \text{ 所以 } f(x_1) = f(x_2), \text{ 等价于 } \frac{1}{f(x_1)} = \frac{1}{f(x_2)}, \text{ 等价于 } g(x_1) = g(x_2). \dots\dots\dots (6 \text{ 分})$$

不妨设 $x_1 < x_2$, 由 (I) 可知 $0 < x_1 < \frac{\pi}{4} < x_2$.

要证 $x_1 + x_2 > \frac{\pi}{2}$, 即证 $x_2 > \frac{\pi}{2} - x_1 > \frac{\pi}{4}$, 又因为 $g(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{4}, \pi\right)$ 上单调递减, 所以需证 $g(x_2) < g\left(\frac{\pi}{2} - x_1\right)$, 即

$$g(x_1) < g\left(\frac{\pi}{2} - x_1\right). \dots\dots\dots (8 \text{ 分})$$

$$\text{令 } h(x) = g(x) - g\left(\frac{\pi}{2} - x\right),$$

$$\begin{aligned} \text{则 } h'(x) &= g'(x) + g'\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{\cos x - \sin x}{e^x} + \frac{\sin x - \cos x}{e^{\frac{\pi}{2}-x}} \\ &= (\cos x - \sin x) \left(\frac{1}{e^x} - \frac{1}{e^{\frac{\pi}{2}-x}}\right), \dots\dots\dots (10 \text{ 分}) \end{aligned}$$

当 $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ 时, $\cos x - \sin x > 0, \frac{1}{e^x} > \frac{1}{e^{\frac{\pi}{2}-x}}$, 所以 $h'(x) > 0$,

则 $h(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ 上单调递增, 所以 $h(x_1) < h\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$, 即 $g(x_1) < g\left(\frac{\pi}{2} - x_1\right)$,

因此, $x_1 + x_2 > \frac{\pi}{2}$. $\dots\dots\dots (12 \text{ 分})$