绝密★启用前

2022—2023 学年高三年级二轮复习阶段性测试

数学理科

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号等填写在答题卡和试卷指定位置上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知 i 为虚数单位，则$\frac{3-7i}{2+3i}$的虚部为

A. $-\frac{23}{13}$　　B. $-\frac{15}{13}$　　C. $\frac{15}{13}$　　D. $\frac{23}{13}$

2. 若集合 $A=\{x|6x^2-7x-5<0\}$，则$\complement_{R}A=$

A. $\{x|x<-\frac{1}{2}$，或 $x>\frac{5}{3}\}$　　B. $\{x|x\leqslant-\frac{1}{2}$，或 $x\geqslant\frac{5}{3}\}$

C. $\{x|x<-\frac{5}{3}$，或 $x>\frac{1}{2}\}$　　D. $\{x|x\leqslant-\frac{5}{3}$，或 $x\geqslant\frac{1}{2}\}$

3. 唐代数学家、天文学家僧一行，利用"九服晷影算法"建立了从 0°到 80°的晷影长 l 与太阳天顶距 θ 的对应数表. 已知晷影长 l、表高 h 与太阳天顶距 θ 满足 $l=h\tan\theta$，记太阳天顶距为 75°时晷影长为 l_1，太阳天顶距为 45°时晷影长为 l_2，则$\frac{l_1}{l_2}$的值为

A. $\sqrt{5}+2$　　B. $\sqrt{5}-2$　　C. $2+\sqrt{3}$　　D. $2-\sqrt{3}$

4. 已知等比数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，若$\frac{S_5}{S_{10}}=\frac{1}{33}$，$a_4=8$，则 $S_8=$

A. 127　　B. 254　　C. 510　　D. 255

5. 二项式$\left(2x-\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}\right)^6$的展开式中含$\frac{1}{x}$的项的系数为

A. -60　　B. 60　　C. 30　　D. -30

6. 已知正实数 x,y 满足 $2x+y=3$，则$\frac{1}{5x+y}+\frac{1}{x+2y}$的最小值为

A. $\frac{4}{9}$　　B. $\frac{8}{9}$　　C. $\frac{8}{3}$　　D. $\frac{4}{3}$

7. 已知函数 $f(x)=a^x+\log_a x(a>0$ 且 $a\neq1)$的图象过点$(1,2)$，若当 $0<x_0\leqslant k(k\in\mathbf{N}^*)$时，$f(x)$的值域中正整数的个数超过 2 023 个，则 k 的最小值为

A. 9　　B. 10　　C. 11　　D. 12

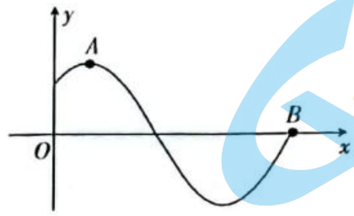
8. 已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右焦点分别为 F_1,F_2，过点 F_2 且与 x 轴垂直的直线 l 与双曲线 C 交于 A,B 两点，若$\frac{|AF_1|}{|AB|}=\frac{\sqrt{37}}{2}$，则双曲线 C 的离心率为

A. $\frac{1+\sqrt{35}}{6}$　　B. $\frac{1+\sqrt{35}}{3}$　　C. $\frac{1+\sqrt{37}}{6}$　　D. $\frac{1+\sqrt{37}}{3}$

座位号＿＿＿＿ 考场号＿＿＿＿ 准考证号＿＿＿＿ 姓名＿＿＿＿ 班级＿＿＿＿

上进试卷 密封线内不要答题 高考利剑

9. 已知函数 $f(x)=2\cos(\omega x+\varphi)\left(\omega>0,|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}\right)$ 的部分图象如下所示，其中 $A\left(\dfrac{\pi}{12},2\right)$，$B\left(\dfrac{7\pi}{12},0\right)$，为了得到 $g(x)=2\sin 2x$ 的图象，需将



A. 函数 $f(x)$ 的图象的横坐标伸长为原来的 $\dfrac{3}{2}$ 倍后，再向左平移 $\dfrac{3\pi}{8}$ 个单位长度

B. 函数 $f(x)$ 的图象的横坐标缩短为原来的 $\dfrac{2}{3}$ 后，再向右平移 $\dfrac{\pi}{8}$ 个单位长度

C. 函数 $f(x)$ 的图象向左平移 $\dfrac{\pi}{4}$ 个单位长度后，再将横坐标伸长为原来的 $\dfrac{3}{2}$ 倍

D. 函数 $f(x)$ 的图象向右平移 $\dfrac{\pi}{12}$ 个单位长度后，再将横坐标伸长为原来的 $\dfrac{3}{2}$ 倍

10. 已知在一个表面积为 24 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 E 在 B_1D 上运动，则当 $BE+A_1E$ 取得最小值时，$AE=$

A. 2　　B. $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. $\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$

11. 在一节数学研究性学习的课堂上，老师要求大家利用超级画板研究空间几何体的体积，步骤如下：第一步，绘制一个三角形；第二步，将所绘制的三角形绕着三条边各自旋转一周得到三个空间几何体；第三步，测算三个空间几何体的体积. 若小明同学绕着 $\triangle ABC$ 的三条边 AB,BC,AC 旋转一周所得到的空间几何体的体积分别为 $2,\dfrac{8}{3},4$，则 $\cos\angle BAC=$

A. $-\dfrac{1}{4}$　　B. $\dfrac{7}{8}$　　C. $\dfrac{11}{16}$　　D. $\dfrac{5}{16}$

12. 若 $a=e^{0.7}$，$b=\dfrac{\ln(3.5e^2)}{2}$，$c=\dfrac{\sqrt{14}}{2}$，则 a,b,c 的大小关系为

A. $a>c>b$　　B. $b>a>c$　　C. $c>b>a$　　D. $b>c>a$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 已知在 $\triangle ABC$ 中，$BC=4$，$CA=3$，$\angle BCA=120°$，则 $|3\overrightarrow{BC}-5\overrightarrow{CA}|=$________.

14. 数列 $\left\{\dfrac{1}{(4n+3)(4n+7)}\right\}$ 的前 10 项和为________.

15. 某单位为了调查性别与对工作的满意程度是否具有相关性，随机抽取了若干名员工，所得数据统计如下表所示，其中 $x\in\mathbf{N}^*$，且 $x<20$，若有 90% 的把握可以认为性别与对工作的满意程度具有相关性，则 x 的值可以是________.（横线上给出一个满足条件的 x 的值即可）

	对工作满意	对工作不满意
男	$5x$	$5x$
女	$4x$	$6x$

附：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中 $n=a+b+c+d$.

$P(K^2\geqslant k_0)$	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
k_0	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

16. 已知抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 的焦点 F 到准线的距离为 2，点 P,Q,M,N 在抛物线 C 上，$\overrightarrow{OA}=4\overrightarrow{OF}$，$P,Q,A$ 三点共线，P,F,M 三点共线，Q,F,N 三点共线，则 $\triangle PQF$ 与 $\triangle MNF$ 的面积之比为________.

三、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17 ~ 21 题为必考题，每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答.

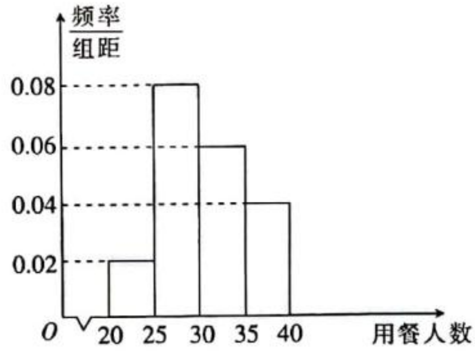
(一) 必考题：共 60 分.

17. (12 分) 已知在 $\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，且 $b=4$，$3a\cos\left(\frac{\pi}{2}+A\right)+(4\cos C+c\cos B)\cdot\tan A=0$.

(1) 求 $\cos A$ 的值；

(2) 若 $\triangle ABC$ 为钝角三角形，且 $\sin C>\sin B$，求 c 的取值范围.

18. (12 分) 某著名小吃店高峰时段面临用餐排队问题，店主打算扩充店面，为了确定扩充的位置大小，店主随机抽查了过去若干天内高峰时段的用餐人数，所得数据统计如下图所示.



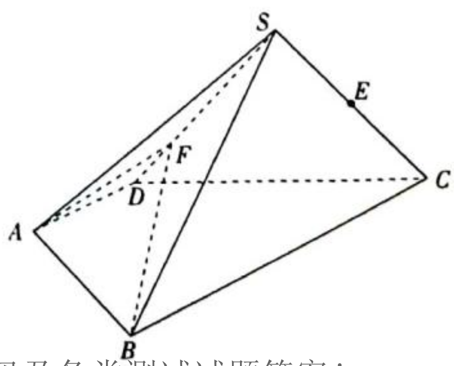
(1) 求高峰时段用餐人数的平均数 $\bar{x}$ 以及方差 s^2 (同一组中的数据用该组区间的中点值作代表)；

(2) 以频率估计概率，从餐厅以往的所有营业时间中随机抽取 4 天，记高峰时段用餐人数在 $[25,30)$ 的天数为 X，求 X 的分布列以及数学期望 $E(X)$.

19. (12 分) 如图所示，在四棱锥 $S-ABCD$ 中，$BC=2AD$，平面 $SCD\perp$ 平面 $ABCD$，$\angle ABC=\angle BAD=2\angle SCD=2\angle SDC=2\angle BCD=90°$，点 E 是线段 SC 的中点，点 F 是线段 SD 上靠近 D 的三等分点.

(1) 证明：点 $E\in$ 平面 ABF；

(2) 求直线 SC 与平面 EAB 所成角的正弦值.



20. (12 分)已知椭圆 $C:\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{b^2}=1(0<b<2\sqrt{2})$ 与直线 $l:y=kx+\frac{b}{2}$ 交于 M,N 两点,且当 $k=1$ 时,$|MN|=\frac{4\sqrt{11}}{3}$.

(1)求椭圆 C 的标准方程;

(2)记椭圆 C 的上、下顶点分别为 P,Q,若点 $R(x_R,4)$在直线 PM 上,证明:点 R 在直线 QN 上.

21. (12 分)已知函数 $f(x)=ae^x-x-3(a>0)$.

(1)若函数 $f(x)$有两个零点,求实数 a 的取值范围;

(2)若函数 $g(x)=f(x)+x-\ln(x+1)$,$g'(x)$是 $g(x)$的导函数,证明:$g'(x)$存在唯一的零点 t,且 $g(t)+2\geq\ln a$.

(二)选考题:共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答. 如果多做,则按所做的第一题计分.

22. (10 分)【选修 4-4:坐标系与参数方程】

已知曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=1+\cos\theta,\\ y=\sin\theta\end{cases}$ (θ 为参数),以坐标原点 O 为极点,x 轴的非负半轴为极轴,取相同的单位长度建立极坐标系.

(1)求曲线 C 的普通方程和极坐标方程;

(2)已知曲线 C 上的两点 A,B 的极坐标分别为 $A(\rho_1,\alpha),B\left(\rho_2,\alpha+\frac{\pi}{3}\right)$,求$\triangle OAB$ 面积的最大值.

23. (10 分)【选修 4-5:不等式选讲】

已知函数 $f(x)=|3x-4|+|2x|$.

(1)求不等式 $f(x)>5$ 的解集;

(2)若 $\forall x\in\mathbf{R}$,$f(x)>m(x+1)$,求实数 m 的取值范围.

2022—2023 学年高三年级二轮复习阶段性测试

数学理科参考答案及评分细则

1.【答案】A

【解析】依题意，$\frac{(3-7i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)}=\frac{6-9i-14i-21}{13}=-\frac{15}{13}-\frac{23}{13}i$，故所求虚部为$-\frac{23}{13}$，故选 A.

2.【答案】B

【解析】依题意，$A=\{x|(3x-5)(2x+1)<0\}=\{x|-\frac{1}{2}<x<\frac{5}{3}\}$，则$\complement_{R}A=\{x|x\leqslant-\frac{1}{2}$，或$x\geqslant\frac{5}{3}\}$，故选 B.

3.【答案】C

【解析】依题意，$\frac{l_1}{l_2}=\frac{\tan 75^\circ}{\tan 45^\circ}=\tan 75^\circ=\frac{\tan 45^\circ+\tan 30^\circ}{1-\tan 45^\circ\tan 30^\circ}=\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}=2+\sqrt{3}$，故选 C.

4.【答案】D

【解析】显然 $q\neq1$，故$\frac{S_5}{S_{10}}=\frac{1-q^5}{1-q^{10}}=\frac{1}{1+q^5}=\frac{1}{33}$，解得 $q=2$，则 $a_1=\frac{a_4}{q^3}=1$，故 $S_8=\frac{1-2^8}{1-2}=2^8-1=255$，故选 D.

5.【答案】B

【解析】$\left(2x-\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}\right)^6$ 的展开式的通项公式为 $T_{r+1}=C_6^r\cdot(2x)^{6-r}\cdot(-x^{-\frac{3}{4}})^r=C_6^r\cdot2^{6-r}\cdot(-1)^r\cdot x^{6-\frac{7}{4}r}$，令 $6-\frac{7}{4}r=-1$，解得 $r=4$，故所求系数为 $C_6^4\cdot2^2\cdot(-1)^4=60$，故选 B.

6.【答案】A

【解析】依题意，$6x+3y=5x+y+x+2y=9$，故 $\frac{1}{5x+y}+\frac{1}{x+2y}=\frac{1}{9}\left(\frac{1}{5x+y}+\frac{1}{x+2y}\right)(5x+y+x+2y)=\frac{1}{9}\left(2+\frac{x+2y}{5x+y}+\frac{5x+y}{x+2y}\right)\geqslant\frac{4}{9}$，当且仅当 $x=\frac{1}{2}$，$y=2$ 时等号成立，故选 A.

7.【答案】C

【解析】依题意，$f(1)=a=2$；易知 $f(x)=2^x+\log_2x$ 在 $(0,k]$ 上单调递增，当 $k=10$ 时，$f(x)\in(-\infty,1\ 024+\log_2 10]$，此时正整数的个数是 1 027，当 $k=11$ 时，$f(x)\in(-\infty,2\ 048+\log_2 11]$，此时正整数的个数是 2 051，故 k 的最小值为 11，故选 C.

8.【答案】C

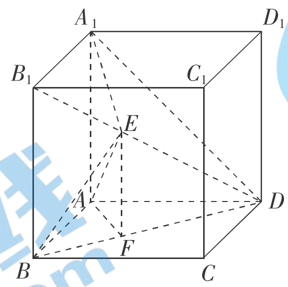
【解析】因为$\frac{|AF_1|}{|AB|}=\frac{\sqrt{37}}{2}$，故$\frac{|F_1F_2|}{|AB|}=3$，则 $2c=3\cdot\frac{2b^2}{a}$，则 $3b^2=ac$，故 $3c^2-ac-3a^2=0$，则 $3e^2-e-3=0$，解得 $e=\frac{1+\sqrt{37}}{6}\left(e=\frac{1-\sqrt{37}}{6}\text{舍去}\right)$，故选 C.

9.【答案】D

【解析】依题意，$\frac{3}{4}T=\frac{7\pi}{12}-\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{2}$，解得 $T=\frac{2\pi}{3}$，故 $\omega=\frac{2\pi}{T}=3$，则 $f(x)=2\cos(3x+\varphi)$，而 $f\left(\frac{\pi}{12}\right)=2\cos\left(\frac{\pi}{4}+\varphi\right)=2$，故 $\varphi=-\frac{\pi}{4}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，而 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，故 $\varphi=-\frac{\pi}{4}$，$f(x)=2\cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)$. 将函数 $f(x)$ 的图象向右平移$\frac{\pi}{12}$个单位长度后，得到 $y=2\cos\left(3x-\frac{\pi}{2}\right)=2\sin 3x$，再将横坐标伸长为原来的$\frac{3}{2}$倍，得到 $g(x)=2\sin 2x$，故选 D.

10.【答案】A

【解析】作出图形如下所示，依题意，$6AB^2=24$，故 $AB=2$，将平面 A_1B_1D 翻折至与平面 BB_1D 共面，因为 $\triangle A_1B_1D\cong\triangle BB_1D$，故当 $A_1E\perp B_1D$ 时，$BE+A_1E$ 有最小值，此时$\frac{B_1E}{DE}=\frac{1}{2}$，过点 E 作平面 $ABCD$ 的垂线，垂足为 F，$AF^2=AB^2+BF^2-2AB\cdot BF\cdot\cos 45^\circ=4+\frac{8}{9}-2\times2\times\frac{2\sqrt{2}}{3}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{20}{9}$，则 $AE=\sqrt{AF^2+EF^2}=\sqrt{\frac{20}{9}+\left(\frac{4}{3}\right)^2}=2$，故选 A.



11.【答案】C

【解析】不妨设 AB,BC,AC 分别为 c,a,b，则 $2=\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot h_c^2\cdot c$，故$\frac{3c}{2\pi}=S_{\triangle ABC}^2$，同理可得$\frac{2a}{\pi}=S_{\triangle ABC}^2$，$\frac{3b}{\pi}=S_{\triangle ABC}^2$，故 $a:b:c=3:2:4$，则 $\cos\angle BAC=\frac{2^2+4^2-3^2}{2\times2\times4}=\frac{11}{16}$，故选 C.

12.【答案】A

【解析】令 $f(x)=\frac{\ln x}{2}+1-\sqrt{x}$，则 $f'(x)=\frac{1}{2x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1-\sqrt{x}}{2x}$，当 $x\in(1,+\infty)$时，$f'(x)<0$，故函数 $f(x)$ 在$(1,+\infty)$上单调递减，故 $f(3.5)<f(1)=0$，即$\frac{\ln 3.5}{2}+1=\frac{\ln(3.5e^2)}{2}<\sqrt{3.5}=\frac{\sqrt{14}}{2}$，即 $b<c$；令 $g(x)=e^x-\frac{1}{2}x^2-x-1$，则 $g'(x)=e^x-x-1$，当 $x\in(0,1)$时，$g'(x)>0$，故函数 $g(x)$在$(0,1)$上单调递增，故 $g(0.7)>g(0)=0$，即 $e^{0.7}>1+0.7+\frac{0.7^2}{2}=1.945>\sqrt{3.5}=\frac{\sqrt{14}}{2}$，故 $a>c$，则 $a>c>b$，故选 A.

13.【答案】$3\sqrt{21}$

【解析】依题意，$|3\overrightarrow{BC}-5\overrightarrow{CA}|=\sqrt{9\overrightarrow{BC}^2+25\overrightarrow{CA}^2-30\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}}=\sqrt{9\times16+25\times9-30\times4\times3\times\frac{1}{2}}=3\sqrt{21}$.

14.【答案】$\frac{10}{329}$

【解析】$\frac{1}{(4n+3)(4n+7)}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4n+3}-\frac{1}{4n+7}\right)$，故 $S_{10}=\frac{1}{4}\times\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{11}+\frac{1}{11}-\frac{1}{15}+\cdots+\frac{1}{43}-\frac{1}{47}\right)=\frac{10}{329}$.

15.【答案】14(或 15，16，17，18，19 中任意一个)

【解析】$K^2=\frac{20x\cdot(30x^2-20x^2)^2}{10x\cdot10x\cdot9x\cdot11x}=\frac{20x}{99}>2.706$，故 $x>13.3947$.

16.【答案】16

【解析】依题意，$p=2$，$F(1,0)$，$A(4,0)$，设 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，$M(x_3,y_3)$，$N(x_4,y_4)$，设直线 $PQ:x=my+4$，联立$\begin{cases}x=my+4,\\y^2=4x,\end{cases}$则 $y^2-4my-16=0$，则 $y_1+y_2=4m$，$y_1y_2=-16$，设直线 $PM:x=ny+1$，联立$\begin{cases}x=ny+1,\\y^2=4x,\end{cases}$则 $y^2-4ny-4=0$，故 $y_1+y_3=4n$，$y_1y_3=-4$，则 $y_3=-\frac{4}{y_1}$，同理可得，$y_4=-\frac{4}{y_2}$，故$\frac{S_{\triangle PQF}}{S_{\triangle MNF}}=\frac{\frac{1}{2}|PF||QF|\sin\angle PFQ}{\frac{1}{2}|MF||NF|\sin\angle MFN}=$

$$\frac{|PF||QF|}{|MF||NF|}=\left|\frac{y_1y_2}{y_3y_4}\right|=\left|\frac{y_1y_2}{\left(-\frac{4}{y_1}\right)\cdot\left(-\frac{4}{y_2}\right)}\right|=\frac{(y_1y_2)^2}{16}=16.$$

17. 解:(1)依题意, $-3a\sin A+(b\cos C+c\cos B)\cdot\frac{\sin A}{\cos A}=0$,

故 $3a\cos A=b\cos C+c\cos B$,

由正弦定理得 $3\sin A\cos A=\sin B\cos C+\sin C\cos B$,(3 分)

即 $3\sin A\cos A=\sin(B+C)=\sin A$,故 $\cos A=\frac{1}{3}$.(6 分)

(2)因为 $\cos A=\frac{1}{3}>0$,所以 A 为锐角,

又 $\sin C>\sin B$,故 $c>b$,则 $C>B$,(7 分)

因为△ABC 为钝角三角形,所以 C 为钝角;(8 分)

因为 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=c^2-\frac{8}{3}c+16$,(10 分)

所以 $a^2+b^2-c^2=32-\frac{8}{3}c<0$,解得 $c>12$,则 c 的取值范围为 $(12,+\infty)$.(12 分)

【评分细则】

第(1)小题若使用余弦定理得到正确答案也给满分,直接使用结论"$a=b\cos C+c\cos B$"扣 1 分.

18. 解:(1)依题意,$\bar{x}=22.5\times0.1+27.5\times0.4+32.5\times0.3+37.5\times0.2=30.5$;(2 分)

$s^2=(22.5-30.5)^2\times0.1+(27.5-30.5)^2\times0.4+(32.5-30.5)^2\times0.3+(37.5-30.5)^2\times0.2=6.4+3.6+1.2+9.8=21$.(5 分)

(2)依题意,$X\sim B\left(4,\frac{2}{5}\right)$,(6 分)

$P(X=0)=\left(\frac{3}{5}\right)^4=\frac{81}{625}$,$P(X=1)=C_4^1\frac{2}{5}\times\left(\frac{3}{5}\right)^3=\frac{216}{625}$,

$P(X=2)=C_4^2\left(\frac{2}{5}\right)^2\times\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{216}{625}$,$P(X=3)=C_4^3\left(\frac{2}{5}\right)^3\times\frac{3}{5}=\frac{96}{625}$,

$P(X=4)=\left(\frac{2}{5}\right)^4=\frac{16}{625}$.(9 分)

故 X 的分布列为

X	0	1	2	3	4
P	$\frac{81}{625}$	$\frac{216}{625}$	$\frac{216}{625}$	$\frac{96}{625}$	$\frac{16}{625}$

(10 分)

故 $E(X)=4\times\frac{2}{5}=\frac{8}{5}$.(12 分)

19. (1)证明:如图所示,延长 CD,BA 交于点 Q,

因为 $AD=\frac{1}{2}BC$,且 $AD/\!/BC$,所以 $BA=AQ$,$CD=DQ$,(1 分)

连接 SQ,QE,在△SQC 中,D,E 分别为 CQ,SC 的中点,

故 QE 与 SD 的交点为△SQC 的重心,设为 G,所以 $\overrightarrow{SG}=2\overrightarrow{GD}$,(2 分)

因为 $\overrightarrow{SF}=2\overrightarrow{FD}$,所以点 G 与点 F 重合,(3 分)

所以 A,B,E,F 四点都在平面 QBE 中,即点 $E\in$ 平面 ABF.(4 分)

(2)解:取 CD 的中点为 O,连接 SO,因为 $\angle SCD=\angle SDC=45°$,故 $SD=SC$,所以 $SO\perp CD$,

又平面 $SCD\perp$ 平面 $ABCD$,平面 $SCD\cap$ 平面 $ABCD=CD$,$SO\subset$ 平面 SCD,

所以 $SO\perp$ 平面 $ABCD$,(5 分)

又 $AD/\!/BC$, $\angle ABC=90°$,所以 $AD\perp AB$.

以 O 为坐标原点,$\overrightarrow{DA}$,$\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{OS}$的方向分别为 x,y,z 轴的正方向,建立如图所示的空间直角坐标系 $O-xyz$,不妨设 $AB=1$,(6 分)

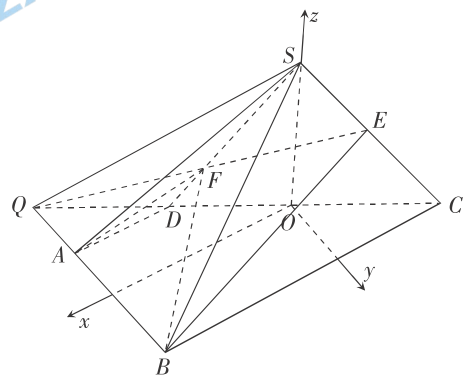
则 $S\left(0,0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,$C\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)$,$E\left(-\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$,$A\left(\frac{3}{2},-\frac{1}{2},0\right)$,$B\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2},0\right)$,

$\overrightarrow{AB}=(0,1,0)$,$\overrightarrow{EB}=\left(\frac{7}{4},\frac{1}{4},-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$,$\overrightarrow{SC}=\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;(9 分)

设平面 EAB 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$,则$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AB}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{EB}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}y=0,\\ \frac{7}{4}x+\frac{1}{4}y-\frac{\sqrt{2}}{4}z=0,\end{cases}$

取 $x=\sqrt{2}$,则 $\boldsymbol{m}=(\sqrt{2},0,7)$;(10 分)

则直线 SC 与平面 EAB 所成角的正弦值 $\sin\theta=\frac{|\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{SC}|}{|\boldsymbol{m}||\overrightarrow{SC}|}=\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{51}\times 1}=\frac{4\sqrt{102}}{51}$.(12 分)



【评分细则】

(1)第(1)小题其他证明方法言之有理也给满分.

(2)第(2)小题若求出正弦值后再求余弦值扣 1 分.

20. (1)解:当 $k=1$ 时,直线 $l:y=x+\frac{b}{2}$,

联立$\begin{cases}y=x+\frac{b}{2},\\ \frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{b^2}=1,\end{cases}$ 则$(b^2+8)x^2+8bx-6b^2=0$,

设 $M(x_1,y_1)$,$N(x_2,y_2)$,故 $x_1+x_2=-\frac{8b}{b^2+8}$,$x_1x_2=-\frac{6b^2}{b^2+8}$,(2 分)

故 $|MN|=\sqrt{1+k^2}|x_1-x_2|=\sqrt{1+k^2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$

$=\sqrt{2}\sqrt{\frac{64b^2}{(b^2+8)^2}+\frac{24b^2}{b^2+8}}=\frac{4\sqrt{11}}{3}$,(3 分)

化简可得,$b^4+7b^2-44=0$,解得 $b^2=4$($b^2=-11$ 舍去),

故椭圆 C 的标准方程为$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$.(5 分)

(2)证明:易知 $P(0,2)$,$Q(0,-2)$,

根据题意得直线 $l:y=kx+1$,

由$\begin{cases}x^2+2y^2-8=0,\\ y=kx+1\end{cases}$得$(2k^2+1)x^2+4kx-6=0$,

根据题意，$\Delta>0$ 恒成立，设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$.

则 $x_1+x_2=\dfrac{-4k}{2k^2+1}$，$x_1x_2=\dfrac{-6}{2k^2+1}$，(7 分)

直线 PM 的方程为 $y-2=\dfrac{y_1-2}{x_1}x$，

令 $y=4$ 得 $x_R=\dfrac{2x_1}{y_1-2}$，所以 $R\left(\dfrac{2x_1}{y_1-2},4\right)$，(9 分)

因为 $Q(0,-2)$，$N(x_2,y_2)$，

则直线 QN，QR 的斜率分别为 $k_{QN}=\dfrac{y_2+2}{x_2}$，$k_{QR}=\dfrac{3(y_1-2)}{x_1}$，(10 分)

$k_{QN}-k_{QR}=\dfrac{y_2+2}{x_2}-\dfrac{3(y_1-2)}{x_1}=\dfrac{x_1(y_2+2)-3x_2(y_1-2)}{x_1x_2}$，

又 $x_1(y_2+2)-3x_2(y_1-2)=x_1(kx_2+3)-3x_2(kx_1-1)=-2kx_1x_2+3(x_1+x_2)$

$=-2k\cdot\dfrac{-6}{2k^2+1}+3\cdot\dfrac{-4k}{2k^2+1}=0$，所以 $k_{QN}=k_{QR}$，

所以点 R 在直线 QN 上.(12 分)

【评分细则】

(1)第(1)小题椭圆方程没有化为标准型扣 1 分.

(2)第(2)小题其他解法酌情给分，结果步骤均正确给满分.

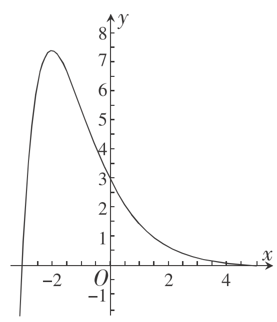
21. (1)解：令 $f(x)=0$，则 $a=\dfrac{x+3}{e^x}=m(x)$，(1 分)

则 $m'(x)=\dfrac{-x-2}{e^x}$，(2 分)

故当 $x\in(-\infty,-2)$ 时，$m'(x)>0$，当 $x\in(-2,+\infty)$ 时，$m'(x)<0$，

即函数 $m(x)$ 在 $(-\infty,-2)$ 上单调递增，在 $(-2,+\infty)$ 上单调递减，(4 分)

而 $m(-2)=e^2$，结合图象可知，实数 a 的取值范围为 $(0,e^2)$.(5 分)



(2)证明：依题意，$a>0$，$g(x)$ 的定义域为 $(-1,+\infty)$.

$g'(x)=ae^x-\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{1}{x+1}[ae^x(x+1)-1]$，(6 分)

令 $h(x)=ae^x(x+1)-1$，$a>0$，$x\geqslant-1$，

显然 $h(x)$ 在 $[-1,+\infty)$ 上单调递增，又 $h(-1)<0$，$h\left(\dfrac{1}{a}\right)>0$，

所以存在 $t\in\left(-1,\dfrac{1}{a}\right)$，使得 $h(t)=0$，(7 分)

且 $-1<x<t$ 时，$h(x)<0$，$x>t$ 时，$h(x)>0$，(8 分)

因为 $\dfrac{1}{x+1}>0$，所以 $-1<x<t$ 时，$g'(x)<0$；$x>t$ 时，$g'(x)>0$，

故 $g'(x)$ 存在唯一的零点 t；(9 分)

由 $h(t)=0$ 得 $ae^t=\frac{1}{t+1}$，所以 $\ln a+t=-\ln(t+1)$.（10 分）

因此 $g(t)+2-\ln a=ae^t-\ln(t+1)-\ln a-1=\frac{1}{t+1}+t-1=\frac{t^2}{t+1}\geqslant 0$，

当且仅当 $t=0$ 时等号成立.

故 $g'(x)$ 有唯一的零点 t，且 $g(t)+2\geqslant\ln a$.（12 分）

【评分细则】

其他解法酌情给分，结果步骤均正确给满分.

22. 解：（1）由参数方程 $\begin{cases}x=1+\cos\theta,\\ y=\sin\theta\end{cases}$ 消去参数 θ 得 $(x-1)^2+y^2=1$，

则曲线 C 的普通方程为 $(x-1)^2+y^2=1$.（3 分）

将 $\begin{cases}x=\rho\cos\theta,\\ y=\rho\sin\theta\end{cases}$ 代入方程，

得到曲线 C 的极坐标方程为 $\rho=2\cos\theta$.（5 分）

（2）由题知 $\rho_1=2\cos\alpha$，$\rho_2=2\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)$，

则 $S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}\rho_1\rho_2\sin\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}\cos\alpha\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)$

$=\sqrt{3}\cos\alpha\left(\frac{1}{2}\cos\alpha-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}(\cos^2\alpha-\sqrt{3}\sin\alpha\cos\alpha)$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1+\cos 2\alpha}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\alpha\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\left[\frac{1}{2}+\cos\left(2\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\right]$，（8 分）

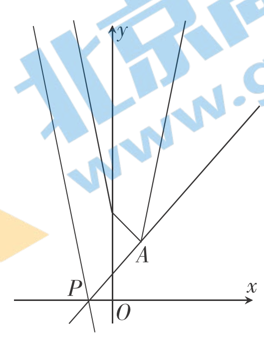
当 $2\alpha+\frac{\pi}{3}=0$ 即 $\alpha=-\frac{\pi}{6}$ 时，$S_{\triangle OAB}$ 取得最大值 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$.（10 分）

23. 解：依题意，$f(x)=\begin{cases}5x-4, x>\frac{4}{3},\\ 4-x, 0\leqslant x\leqslant\frac{4}{3},\\ 4-5x, x<0,\end{cases}$（2 分）

（1）$f(x)>5\Leftrightarrow\begin{cases}5x-4>5,\\ x>\frac{4}{3}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}4-x>5,\\ 0\leqslant x\leqslant\frac{4}{3}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}4-5x>5,\\ x<0,\end{cases}$

解得 $x<-\frac{1}{5}$ 或 $x>\frac{9}{5}$，故不等式 $f(x)>5$ 的解集为 $\{x\mid x<-\frac{1}{5}$，或 $x>\frac{9}{5}\}$.（5 分）

（2）作出函数 $f(x)$ 的大致图象如下所示，其中 $P(-1,0)$，$A\left(\frac{4}{3},\frac{8}{3}\right)$，（6 分）



故直线 AP 的斜率为 $\frac{\frac{8}{3}-0}{\frac{4}{3}+1}=\frac{8}{7}$，（7 分）

结合图象可知，$-5\leqslant m<\frac{8}{7}$，故实数 m 的取值范围为 $\left[-5,\frac{8}{7}\right)$.（10 分）