

北师大附属实验中学

2019-2020 学年度高一年级第一学期数学期中考试试卷（一卷）

班级_____ 分层班级_____ 姓名_____ 学号_____ 分数_____

试卷说明：

- 1、本试卷分一、二两卷；
- 2、本试卷考试时间为 120 分钟；总分为 150 分，试卷一 100 分，试卷二 50 分；
- 3、试卷一共有三道大题，17 道小题。
试卷二共有两道大题，8 道小题。
- 4、所有题目答案一律写在答题纸上。

命题人：何文春 高华文 王洋

审阅人：姚玉平

一、选择题（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。每题只有一个正确答案，将正确答案的序号填在答题卡上）

1. 已知集合 $A = \{-1, 0, 1, 2\}$, $B = \{x | x^2 \leq 1\}$, 则 $A \cap B =$ ()
A. $\{-1, 0, 1\}$ B. $\{0, 1\}$ C. $\{-1, 1\}$ D. $\{0, 1, 2\}$
2. 如果 $a < b < 0$, 那么下列不等式成立的是 ()
A. $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ B. $ab < b^2$ C. $-ab < -a^2$ D. $-\frac{1}{a} < -\frac{1}{b}$
3. 下列函数中，值域为 $(0, +\infty)$ 的是 ()
A. $y = \sqrt{x-1}$ B. $y = \frac{1}{x-1}$ C. $y = \sqrt{x^2+1}$ D. $y = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$
4. 已知 $f(x) = ax^3 + bx - 4$, 若 $f(2) = 6$, 则 $f(-2) =$
A. -14 B. 14 C. -6 D. 10
5. 设 $x \in R$, 则 “ $|x-2| < 1$ ” 是 “ $x^2 + x - 6 < 0$ ” 的 ()
A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

6. 函数 $f(x) = x^2 - \frac{1}{x} - 2$ 在区间 $(1, 3)$ 内的零点个数是 ()

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

7. 已知命题 “ $\exists x \in \mathbb{R}$, 使 $2x^2 + (a-1)x + \frac{1}{2} \leq 0$ ” 是假命题, 则实数 a 的取值范围是 ()

A. $(-\infty, -1)$

B. $(-1, 3)$

C. $(-3, +\infty)$

D. $(-3, 1)$

8. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbb{R} , 满足 $f(x+1) = 2f(x)$, 且当 $x \in (0, 1]$ 时, $f(x) = x(x-1)$. 若对任意 $x \in (-\infty, m]$, 都有 $f(x) \geq -\frac{8}{9}$, 则 m 的取值范围是 ()

A. $(-\infty, \frac{9}{4}]$

B. $(-\infty, \frac{7}{3}]$

C. $(-\infty, \frac{5}{2}]$

D. $(-\infty, \frac{8}{3}]$

二、填空题 (本大题 6 小题, 每小题 5 分, 共 30 分, 将正确答案填在答题纸上)

9. 已知 $x - 2y = 6, x - 3y = 4$, 则 $x^2 - 5xy + 6y^2$ 的值为_____.

10. 已知 α, β 是方程 $x^2 + 2x - 7 = 0$ 的两个根, 则 $\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 =$ _____.

11. 某公司一年购买某种货物 600 吨, 每次购买 x 吨, 运费为 6 万元/次, 一年的总存储费用为 $4x$ 万元, 要使一年的总运费与总存储费之和最小, 则 x 的值是_____.

12. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & (x \leq 0) \\ -2x & (x > 0) \end{cases}$, 若 $f(x) = 10$, 则 $x =$ _____.

13. 若二元一次方程 $3x - y = 7, 2x + 3y = 1, y = kx - 9$ 有公共解, 则实数 $k =$ _____.

14. 已知 $\lambda \in \mathbb{R}$, 函数 $f(x) = \begin{cases} x - 4, x \geq \lambda \\ x^2 - 4x + 3, x < \lambda \end{cases}$, 当 $\lambda = 2$ 时, 不等式 $f(x) < 0$ 的解集是_____.

若函数 $f(x)$ 恰有 2 个零点, 则 λ 的取值范围是_____.

三. 解答题 (本大题共 3 小题, 共 30 分, 写出必要的解答过程, 将答案写在答题纸上)

15. (本题满分 10 分)

已知集合 $A = \{x \mid -4 + a < x < 4 + a\}$, $B = \left\{x \mid \frac{x+1}{x-5} \geq 0\right\}$,

- (1) 若 $a = 1$, 求 $A \cap B$;
- (2) 若 $A \cup B = \mathbb{R}$, 求实数 a 的取值范围.

16. (本题满分 10 分)

已知函数 $f(x)$ 是定义在 \mathbb{R} 上的偶函数, 且当 $x \geq 0$ 时有 $f(x) = \frac{4x}{x+4}$

- (1) 判断函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上的单调性, 并用定义证明;
- (2) 求函数 $f(x)$ 的解析式 (写成分段函数的形式).

17. (本题满分 10 分)

已知关于 x 的不等式 $(ax-1)(x-2) > 2$ 的解集为 A , 且 $3 \notin A$.

(I) 求实数 a 的取值范围;

(II) 求集合 A .

北师大附属实验中学

2019-2020 学年度高一年级第一学期数学期中考试试卷（一卷）答案

一、选择题

1. A

2. D

3. D

4. A

错误!未找到引用源。5. D

6. B

7. B

8. B

二、填空题

9. 24

10. 32

11. 30

12. -3

13. 4

14. $(1, 4); (1, 3] \cup (4, +\infty)$

三. 解答题

解: (1) 当 $a=1$ 时, 集合 $A = \{x | -3 < x < 5\}$,1 分

集合 $B = \{x | x \leq -1 \text{ 或 } x > 5\}$ 3 分

$A \cap B = \{x | -3 < x \leq -1\}$ 5 分

(2) 若 $A \cup B = \mathbf{R}$, 则 $\begin{cases} -4 + a \leq -1 \\ 4 + a > 5 \end{cases}$ 即 $1 < a \leq 3$ 10 分

16. (本题满分 10 分)

已知函数 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的偶函数, 且当 $x \geq 0$ 时有 $f(x) = \frac{4x}{x+4}$

(1) 判断函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上的单调性, 并用定义证明;

(2) 求函数 $f(x)$ 的解析式 (写成分段函数的形式)。

(1) 证明: 设 $x_1 > x_2 \geq 0$, 则 $f(x_1) - f(x_2) = \frac{4x_1}{x_1+4} - \frac{4x_2}{x_2+4}$

$$= \frac{16(x_1 - x_2)}{x_1x_2 + 4(x_1 + x_2) + 16} \dots\dots\dots 3 \text{分}$$

又 $x_1 > x_2 \geq 0$, 所以 $x_1 - x_2 > 0$, $x_1x_2 \geq 0$, $x_1 + x_2 > 0$

所以 $\frac{16(x_1 - x_2)}{x_1x_2 + 4(x_1 + x_2) + 16} > 0$ 则 $f(x_1) - f(x_2) > 0$, 即 $f(x_1) > f(x_2)$,

故函数 $f(x) = \frac{4x}{x+4}$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增。 \dots\dots\dots 5 分

(2) 解: \because 当 $x \geq 0$ 时有 $f(x) = \frac{4x}{x+4}$ 而当 $x < 0$ 时, $-x > 0$

$$\therefore f(-x) = \frac{-4x}{-x+4} = \frac{4x}{x-4} = f(x)$$

$$\text{即 } f(x) = \frac{4x}{x-4} \quad (x < 0)$$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} \frac{4x}{x+4} & (x \geq 0) \\ \frac{4x}{x-4} & (x < 0) \end{cases} \dots\dots\dots 10 \text{分}$$

17. (本题满分 10 分)

已知关于 x 的不等式 $(ax-1)(x-2) > 2$ 的解集为 A , 且 $3 \notin A$,

(I) 求实数 a 的取值范围;

(II) 求集合 A .

解: (I) $\because 3 \notin A$, \therefore 当 $x=3$ 时, 有 $(ax-1)(x-2) \leq 2$, 即 $3a-1 \leq 2$,

$\therefore a \leq 1$, 即 a 的取值范围是 $\{a \mid a \leq 1\}$. \dots\dots\dots 3 分

(II)

$$(ax-1)(x-2) > 2 \Leftrightarrow (ax-1)(x-2) - 2 > 0 \Leftrightarrow ax^2 - (2a+1)x > 0 \dots\dots\dots 4 \text{分}$$

当 $a = 0$ 时, $-x > 0$, 集合 $A = \{x | x < 0\}$;5 分

当 $a < -\frac{1}{2}$ 时, $0 < 2 + \frac{1}{a}$, 集合 $A = \left\{x \mid 0 < x < 2 + \frac{1}{a}\right\}$;6 分

当 $a = -\frac{1}{2}$ 时, $-\frac{1}{2}x^2 > 0$, 原不等式解集 A 为空集;7 分

当 $-\frac{1}{2} < a < 0$ 时, $2 + \frac{1}{a} < 0$, 集合 $A = \left\{x \mid 2 + \frac{1}{a} < x < 0\right\}$;8 分

当 $0 < a \leq 1$ 时, $0 < 2 + \frac{1}{a}$, 集合 $A = \left\{x \mid x < 0 \text{ 或 } x > 2 + \frac{1}{a}\right\}$;9 分

综上: 当 $a = 0$ 时, 集合 $A = \{x | x < 0\}$;

当 $a < -\frac{1}{2}$ 时, 集合 $A = \left\{x \mid 0 < x < 2 + \frac{1}{a}\right\}$;

当 $a = -\frac{1}{2}$ 时, 原不等式解集 A 为空集;

当 $-\frac{1}{2} < a < 0$ 时, 集合 $A = \left\{x \mid 2 + \frac{1}{a} < x < 0\right\}$;

当 $0 < a \leq 1$ 时, 集合 $A = \left\{x \mid x < 0 \text{ 或 } x > 2 + \frac{1}{a}\right\}$;10 分