2019 北京八中高三（上）期中

数　　学

考试时间：120分钟，满分：150分

一、选择题(本大题共8小题，每小题5分，共40分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的)

1. 已知集合$A=\{x|x^2-2x>0\},B=\{x|-5<x<5\}$，则( )

A. $A\cup B=R$　　B. $A\cap B=\emptyset$　　C. $B\subseteq A$　　D. $A\subseteq B$

2. 化简$AB+BC-AD$等于( )

A. CD　　B. DC　　C. AD　　D. CB

3. 函数$f(x)$的图象向右平移 1 个单位长度，所得图象与曲线$y=e^x$关于 y 轴对称，则$f(x)=$

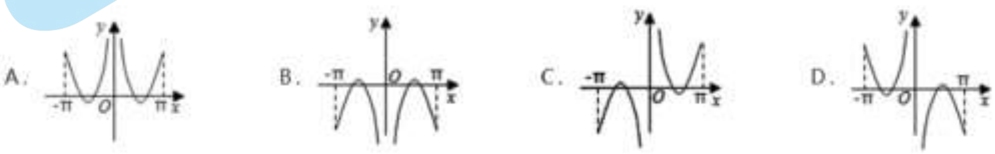
A. e^{x+1}　　B. e^{x-1}　　C. e^{-x+1}　　D. e^{-x-1}

4. “向量 a 与向量 b 共线”是“存在$\lambda\in R$, 使得$a=\lambda b$”的( )

A. 充分而不必要条件　　B. 必要而不充分条件

B. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

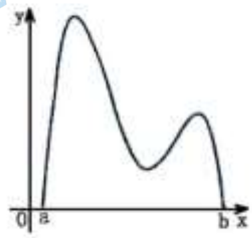
5. 函数 f(x)=(x-$\frac{1}{x}$)$cosx(\pi\le x\le\pi且x\ne0)$的图象可能为（）



6. 设等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为S_n, 若$S_{m-1}=-2,S_m m=0,S_{m+1}=3$, 则 m=( )

A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 6

7. 函数$y=f(x)$的图像如图所示，在区间$[a,b]$上可找到$n(n\ge2)$个不同的数x_1，x_2，...x_n使得$\frac{f(x_1)}{x_1}=\frac{f(x_2)}{x_2}=\cdots=\frac{f(x_n)}{x_n}$，则 n 的取值范围是（）



A. {3. 4}　　B. {2, 3, 4}　　C. {3. 4, 5}　　D. {2. 3}

8. 已知函数$f(x)=\frac{sinx}{x}$，下列四个命题正确的序号是( )

①$y=f(x)$是偶函数 ②$f(x)\le1$ ③当 x=$\frac{3\pi}{2}$时，$y=f(x)$取得极小值④满足$f\left(\frac{n\pi}{6}\right)<f(\frac{n+1}{6}\pi)$

A. ①②③　　B. ①③④　　C. ①②　　D. ①②④

二、填空题(本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分)

9. 函数$f(x)=\sin(2x-\frac{\pi}{4})$，在区间[0, 1]上的最小值是_________

10. 若等比数列$\{a_n\}$，满足$a_2+a_4=20$，$a_4+a_6=60$，则公比 q=____________

11. 在平面直角坐标系中，点$O(0,0),P(1,3)$，将向量 OP 绕点 O 顺时针方向旋转弯$\frac{\pi}{2}$后得到向量 OQ，则点 Q 的坐标是___________

12. 已知$\overrightarrow{e_1}$、$\overrightarrow{e_2}$是夹角为 60° 的两个单位向量，则向量 2$\overrightarrow{e_1}$　$\overrightarrow{e_2}$与向量 2$\overrightarrow{e_2}$-3$\overrightarrow{e_1}$的夹角为__________

13. 已知函数$f(x)=\begin{cases}x^2-2x(x\le 0)\\ e^x-1(x>0)\end{cases}$若对$\forall x\in R$，不等式$f(x)\ge ax$成立，则 a 的取值范围是______________

14. 设 Q 为平面直角坐标系xOy中的点集，从 Q 中的任意一点 P 作 x 轴、y 轴的垂线，垂足分别为 M,N,记点 M 的横坐标的最大值与最小值之差为 x(Q),点 N 的纵坐标的最大值与最小值之差为 y(Q).若 Q 是边长为 1 的正方形，给出下列三个结论:

①$x(Q)$的最大值为 2

②$x(Q)+y(Q)$的取值范围是[2，2]

③$x(Q)-y(Q)$恒等于 0.

其中所有正确结论的序号是_________

三、解答题(本大题共 6 小题，共 80 分，解答应写出文字说明，证明过程成演其步骤)

15.(本小题满分 13 分)

在△ABC中，角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，且$cosA=\frac{1}{3}$

（I）求$sin^2\frac{B+C}{2}+cos2A$

（II）若$a=\sqrt{3}$,求△ABC面积的最大值.

16.（本小题满分 13 分）

已知等比数列$\{a_n\}$满足$a_3-a_2=10$，$a_1a_2a_3=125$

（I）求数列$\{a_n\}$的通项公式;

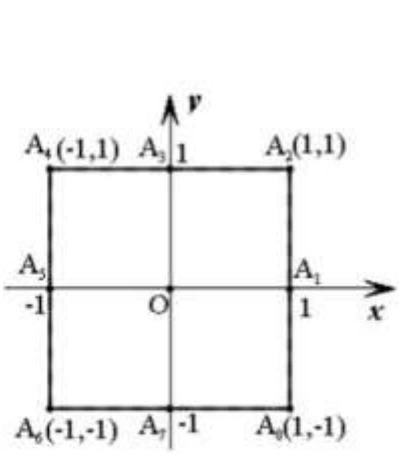
（II）是否存在正整数 m,使得$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_m}\ge 1$?若存在，求 m 的最小值；若不存在，请说明理由.

17.(本小题满分 13 分)

小波以游戏方式决定参加学校合唱团还是参加学校排球队。游戏规则为:以原点 O 为起点，再从A_1，A_2，A_3，A_4，A_5，A_6，A_7，A_8，(如图)这 8 个点中任取(两点分别为终点得到两个向量，记这两个向量的数量积为 X.若$x=0$就参加学校合唱团，否则就参加学校排球队。

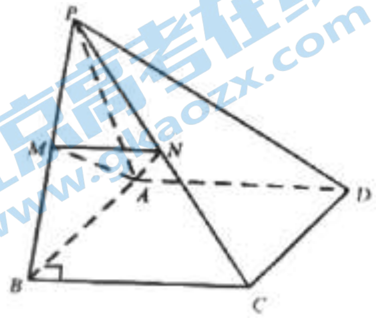
（I）求小波参加学校合唱团的概率;

（II）求 X 的分布列和数学期望.



18.（本小题满分 14 分）

在四棱锥$P-ABCD$中，ΔPAB为正三角形，四边形 ABCD 为矩形，平面 PAB⊥平面 ABCD. AB=2AD，M，N 分别为 PB，PC 中点.



（I）求证:MN∥平面 PAD;

（II）求二面角$B-AM-C$的大小;

（III）在 BC 上是否存在点 E，使得 EN⊥平面 AMN 若存在，求$\frac{BE}{BC}$的值：若不存在，请说明理由.

19.（本小题满分 14 分）

已知函数$f(x)=a\left(x-\frac{1}{x}\right)-2lnx$，其中$a\geq 0$

（I）若 a=2, 求曲线$f(x)$在 x=1 处的切线方程;

（II）设函数$g(x)=-\frac{a}{x}$若至少存在一个$x_0\in[1,e]$, 使得$f(x_0)<g(x_0)$成立，求实数 a 的取值范围，

20.（本小题满分 13 分）

将所有平面向量组成的集合记作R^2，f是从R^2到R^2的映射，记作$\vec{y}=f\overrightarrow{(x)}$或$(y_1,y_2)=f(x_1,x_2)$，其中$x_1,x_2$，$y_1,y_2$都是实数，定义映射 f 的模为：在$|x|=1$的条件下$|\vec{y}|$的最大值记做$\|f\|$, 若存在非零向量$\vec{x}\in R$，及实数 λ 使得$=f\overrightarrow{(x)}$= λ$\vec{x}$，则称 λ 为 f 的一个特征值.

（I）若$f(x_1,x_2)=(\frac{1}{2}x_1,x_2)$求$\|f\|$;

（II）若果$f(x_1,x_2)=(x_1+x_2,x_1-x_2)$, 计算 f 的特征值，并求相应的$\vec{x}$

（III）试找出一个映射 f，满足以下两个条件：①有唯一特征值 λ，②$\|f\|=|$ λ $|$.（不需证明）