数　学

考生注意：

1. 答题前，考生务必将自己的姓名、考生号填写在试卷和答题卡上，并将考生号条形码粘贴在答题卡上的指定位置.
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑. 如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号. 回答非选择题时，将答案写在答题卡上. 写在本试卷上无效.
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回.

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 设集合 $A=\{x|e^x>2\}$，$B=\{x|\sqrt{x}<9\}$，则 $A\cap B=$

A. $\{x|\ln 2<x<3\}$　　B. $\{x|\ln 2<x<81\}$　　C. $\{x|0\leqslant x<3\}$　　D. $\{x|x>e^2\}$

2. 若复数 $z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$ 满足 $\dfrac{z+\bar{z}}{z-\bar{z}}=i$，则

A. $a=0$　　B. $b=0$　　C. $a+b=0$　　D. $a-b=0$

3. 已知同一平面内的单位向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 满足 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\dfrac{\boldsymbol{c}}{2}=\mathbf{0}$，则 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=$

A. $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$　　B. $\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. $\dfrac{\sqrt{15}}{2}$

4. 汉代初年成书的《淮南万毕术》记载："取大镜高悬，置水盆于下，则见四邻矣."这是中国古代人民利用光的反射原理的实例，体现了传统文化中的数学智慧. 光的反射原理可概述为：反射光线、入射光线和法线都在同一平面内；反射光线和入射光线分居在法线的两侧；反射角等于入射角. 在平面直角坐标系 xOy 中，一条光线从点 $(-2,0)$ 射出，经 y 轴反射后，反射光线所在直线与圆 $x^2+y^2-2x-2y=0$ 相切，则反射光线所在直线的斜率为

A. -2　　B. -1　　C. 1　　D. 2

5. 设各项都为正数的无穷等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，且 $\dfrac{a_2}{a_1}=2d$，则 a_5 的最小值为

A. $\dfrac{5}{2}$　　B. $\dfrac{7}{2}$　　C. $\dfrac{9}{2}$　　D. $\dfrac{11}{2}$

6. 已知圆锥 SO 的轴截面为正三角形，用平行于底面的平面截圆锥 SO 所得到的圆锥 SO_1 与圆台 O_1O 的体积之比为 $1:7$，则圆锥 SO_1 与圆台 O_1O 的表面积之比为

A. $\dfrac{3}{11}$　　B. $\dfrac{3}{8}$　　C. $\dfrac{1}{2}$　　D. $\dfrac{2}{3}$

7. 已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的离心率为 2，左、右顶点分别为 A_1,A_2，右焦点为 F，点 P 在 C 的右支上，且满足 $PF\perp FA_2$，则 $\tan\angle A_1PA_2=$

A. $\frac{1}{2}$　　B. 1　　C. $\sqrt{3}$　　D. 2

8. 若函数 $f(x)=e^{x+a}+\sin x+\cos x$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增，则 a 的最小值为

A. $-\pi$　　B. $-\frac{\pi}{2}$　　C. -1　　D. 0

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 已知样本数据 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 和样本数据 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 满足 $y_i=ax_i+b(i=1,2,\cdots,n,0<a<1)$，则

A. $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 的平均数小于 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的平均数

B. $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 的中位数小于 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的中位数

C. $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 的标准差不大于 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的标准差

D. $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 的极差不大于 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的极差

10. 已知函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)\left(\omega>0,0<\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$ 图象的任意一个对称中心到与之相邻的对称轴的距离为 $\frac{\pi}{4}$，且将该图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度得到的图象关于 y 轴对称，则下列说法正确的是

A. $\omega=2,\varphi=\frac{\pi}{6}$

B. 直线 $x=\frac{2\pi}{3}$ 为 $f(x)$ 的图象的一条对称轴

C. 若 $f(x)$ 在 $(-a,a)$ 单调递增，则 a 的最大值为 $\frac{\pi}{3}$

D. 对任意 $k>0$，关于 x 的方程 $f(x)=k\left(x-\frac{5\pi}{12}\right)$ 总有奇数个不同的根

11. 已知函数 $f(x)$ 为定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，$f(0)=1$，且 $f(x-1)+f(x+1)=f(x)$，则

A. $f(1)=\frac{1}{2}$　　B. $f(x)$ 的图象关于点 $\left(\frac{3}{2},0\right)$ 对称

C. $f(x)$ 以 6 为周期　　D. $\sum\limits_{k=1}^{2\,023}f(k)=-\frac{1}{2}$

12. 已知球 O 的半径为 2，点 A,B,C 是球 O 表面上的定点，且 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=-1$，$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}=-2$，点 D 是球 O 表面上的动点，满足 $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CD}=0$，则

A. 有且仅有一个点 D 使得 $\angle CAD=30°$　　B. 点 O 到平面 ABC 的距离为 $\frac{\sqrt{21}}{7}$

C. 存在点 D 使得 $BD\,/\!/$ 平面 AOC　　D. $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OD}$ 的取值范围为 $[-2,2]$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}3^{-x},x\leqslant 0,\\ \log_3 x,x>0,\end{cases}$ 则 $f\left(f\left(\frac{1}{3}\right)\right)=$________.

14. 设 $\alpha,\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，若 $\alpha=\beta+\frac{\pi}{4}$，$\cos(\alpha+\beta)=-\frac{3}{5}$，则 $\sin 2\alpha=$________.

15. 一个不透明的盒子中有 4 个除颜色外完全相同的球，其中 3 个红球，1 个白球. 从盒子中随机取两次球，每次取出 1 个球和 2 个球的概率均为 $\frac{1}{2}$，则最终盒子里只剩下 1 个球且是白球的概率为________.

16. 已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的两个焦点为 F_1,F_2. 点 P,Q 为 C 上关于坐标原点对称的两点，且 $|PQ|=|F_1F_2|$，$\triangle PF_2Q$ 的面积 $S\geqslant\frac{1}{8}|PQ|^2$，则 C 的离心率的取值范围为________.

四、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

记 $\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，$\triangle ABC$ 的面积为 $S=\frac{1}{4}ab\tan C$.

(Ⅰ) 求 C；

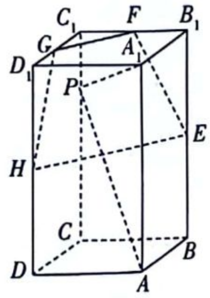
(Ⅱ) 若 $c=1$，$S=\frac{\sqrt{3}}{6}$，D 为 AB 边的中点，求 CD.

18. (12 分)

如图，在正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=2$，$AA_1=4$，E,F,G,H 分别为棱 BB_1,B_1C_1,C_1D_1,DD_1 的中点.

(Ⅰ) 证明：E,F,G,H 四点在同一个平面内；

(Ⅱ) 若点 P 在棱 CC_1 上且满足 $A_1P\perp$ 平面 $EFGH$，求直线 AP 与平面 B_1BCC_1 所成角的正弦值.



19. (12 分)

已知数列$\{a_n\}$满足 $a_1=2, a_{n+1}=\begin{cases}2a_n, n\text{ 为奇数}, \\ \dfrac{1}{4}a_n, n\text{ 为偶数}.\end{cases}$

(Ⅰ)设 $b_n=a_{2n-1}$,求数列$\{b_n\}$的通项公式;

(Ⅱ)设 $c_n=\dfrac{(n+2)b_{n+1}}{n(n+1)}$,证明:$c_1+c_2+\cdots+c_{n-1}+c_n<2$.

20. (12 分)

已知函数$f(x)=\log_a x+\dfrac{1}{2}x^2-(1+\log_a e)x, a>1$.

(Ⅰ)当 $a=e$ 时,求曲线 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程;

(Ⅱ)若 $x=1$ 为$f(x)$的极小值点,求 a 的取值范围.

21. (12 分)

小明参加一项答题活动,需进行两轮答题,每轮均有 $n(n\in \mathbf{N}^*)$道题. 第一轮每道题都要作答;第二轮按次序作答,每答对一题继续答下一题,一旦答错或题目答完则结束答题. 第一轮每道题答对得 5 分,否则得 0 分;第二轮每道题答对得 20 分,否则得 0 分. 无论之前答题情况如何,小明第一轮每题答对的概率均为$\dfrac{1}{3}$,第二轮每题答对的概率均为$\dfrac{2}{3}$. 设小明第一轮答题的总得分为 X,第二轮答题的总得分为 Y.

(Ⅰ)若 $n=30$,求 $E(X)$;

(Ⅱ)证明:当 $n\geqslant 24$ 时,$E(X)>E(Y)$.

22. (12 分)

已知抛物线 $E:y^2=2px(p>0)$的焦点为 F,以 F 为圆心作半径为 1 的圆,过 F 且倾斜角为$\dfrac{\pi}{3}$的直线与抛物线 E 交于 A,B 两点,且$|AB|=\dfrac{16}{3}$.

(Ⅰ)求 E 的方程;

(Ⅱ)设 O 为坐标原点,T 为 E 上一点,过 T 作圆 F 的两条切线,分别交 E 于另外两点P,Q,直线 PQ 分别交 x 轴正半轴、y 轴正半轴于 M,N 两点,求$\triangle MON$ 面积的最小值.

数学 · 答案

一、单项选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.

1. B　　2. C　　3. D　　4. C　　5. C　　6. A

7. A　　8. B

二、多项选择题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分. 每小题全部选对的得 5 分,部分选对的得 2 分,有选错的得 0 分.

9. CD　　10. ABD　　11. ABC　　12. ABD

三、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

13. 3　　14. $\frac{\sqrt{2}}{10}$

15. $\frac{1}{8}$　　16. $\left[\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{6}}{3}\right]$

四、解答题:共 70 分. 解答应写出文字说明,证明过程或演算步骤.

17. 解析　(Ⅰ)由题意 $S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{4}ab\tan C$,

所以 $\frac{\sin C}{\tan C}=\cos C=\frac{1}{2}$, ……………… (2 分)

因为 $C\in(0,\pi)$,所以 $C=\frac{\pi}{3}$. ……………… (4 分)

(Ⅱ)由余弦定理得 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=a^2+b^2-ab$, ……………… (5 分)

又 $S=\frac{\sqrt{3}}{6}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{\sqrt{3}}{4}ab$,所以 $ab=\frac{2}{3}$. ……………… (7 分)

因为 D 为边 AB 的中点,所以 $\overrightarrow{CD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})$, ……………… (8 分)

所以 $|\overrightarrow{CD}|^2=\frac{1}{4}\left(|\overrightarrow{CA}|^2+|\overrightarrow{CB}|^2+2|\overrightarrow{CA}||\overrightarrow{CB}|\cos\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{4}(b^2+a^2+ab)=\frac{1}{4}(c^2+2ab)=\frac{7}{12}$, ……… (9 分)

则 $CD=\frac{\sqrt{21}}{6}$. ……………… (10 分)

18. 解析　(Ⅰ)如图,连接 B_1D_1.

因为 E,F,G,H 均为所在棱的中点,

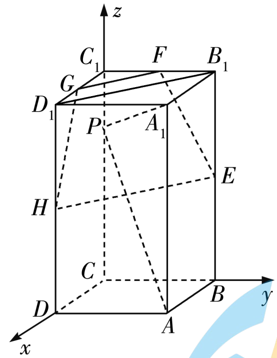
所以 $EB_1 // D_1H$ 且 $EB_1=D_1H$,即四边形 EB_1D_1H 为平行四边形, ……………… (2 分)

故 $B_1D_1 // EH$. ……………… (3 分)

又可得 $FG // B_1D_1$,所以 $FG // EH$, ……………… (4 分)

所以 E,F,G,H 四点在同一个平面内. ……………… (5 分)

(Ⅱ)在正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,CB,CD,CC_1 两两互相垂直,故以 C 为坐标原点,$\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CC_1}$ 的方向分别为 x 轴、y 轴、z 轴的正方向建立空间直角坐标系 $Cxyz$. ……………… (6 分)



由 $AB=2, AA_1=4$,可知 $A(2,2,0), E(0,2,2), F(0,1,4), A_1(2,2,4)$,则 $\overrightarrow{EF}=(0,-1,2)$,

设 $P(0,0,t)(0\leqslant t\leqslant 4)$,则 $\overrightarrow{PA_1}=(2,2,4-t)$. ………………………………………………………………（7 分）

因为 $A_1P\perp$ 平面 $EFGH$,所以 $\overrightarrow{PA_1}\cdot\overrightarrow{EF}=0$,即 $-2+2(4-t)=0$,得 $t=3$. ………………………………（8 分）

所以 $\overrightarrow{PA}=(2,2,-3)$. ………………………………………………………………………………………………（9 分）

易得平面 B_1BCC_1 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(1,0,0)$. ……………………………………………………………………（10 分）

设 AP 与平面 B_1BCC_1 所成的角为 θ,

则 $\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{PA},\boldsymbol{n}\rangle|=\dfrac{|\overrightarrow{PA}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{PA}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{2}{\sqrt{17}\times 1}=\dfrac{2\sqrt{17}}{17}$. ………………………………………………（12 分）

19. **解析** （Ⅰ）由已知得 $b_{n+1}=a_{2n+1}=\dfrac{1}{4}a_{2n}=\dfrac{1}{4}\times 2a_{2n-1}=\dfrac{1}{2}b_n$, ……………………………………………（2 分）

所以 $\{b_n\}$ 是首项为 $b_1=a_1=2$,公比为 $\dfrac{1}{2}$ 的等比数列, ………………………………………………………（3 分）

所以 $b_n=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-2}$. ……………………………………………………………………………………………（5 分）

（Ⅱ）由（Ⅰ）可知 $c_n=\dfrac{(n+2)b_{n+1}}{n(n+1)}=\dfrac{n+2}{n(n+1)2^{n-1}}=\dfrac{1}{n\times 2^{n-2}}-\dfrac{1}{(n+1)2^{n-1}}$, ……………………（8 分）

所以 $c_1=\dfrac{1}{1\times 2^{-1}}-\dfrac{1}{2\times 2^0}, c_2=\dfrac{1}{2\times 2^0}-\dfrac{1}{3\times 2^1},\cdots,c_n=\dfrac{1}{n\times 2^{n-2}}-\dfrac{1}{(n+1)2^{n-1}}$, ……………（9 分）

所以 $c_1+c_2+\cdots+c_{n-1}+c_n=\dfrac{1}{1\times 2^{-1}}-\dfrac{1}{(n+1)2^{n-1}}=2-\dfrac{1}{(n+1)2^{n-1}}<2$. ……………………（12 分）

20. **解析** （Ⅰ）当 $a=\mathrm{e}$ 时,$f(x)=\ln x+\dfrac{1}{2}x^2-2x, f(1)=-\dfrac{3}{2}$, ………………………………………………（1 分）

$f'(x)=\dfrac{1}{x}+x-2, f'(1)=0$, ……………………………………………………………………………………（3 分）

所以切线方程为 $y-\left(-\dfrac{3}{2}\right)=0\times(x-1)$,即 $y=-\dfrac{3}{2}$. ………………………………………………………（4 分）

（Ⅱ）$f'(x)=\dfrac{1}{x\ln a}+x-\dfrac{1+\ln a}{\ln a}=\dfrac{x^2\ln a-(1+\ln a)x+1}{x\ln a}=\dfrac{(x\ln a-1)(x-1)}{x\ln a}, x>0$, ……………（5 分）

令 $f'(x)=0$,则 $x=1$ 或 $x=\dfrac{1}{\ln a}$. ……………………………………………………………………………（6 分）

①当 $1<a<\mathrm{e}$ 时,$\dfrac{1}{\ln a}>1$,

可知 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 单调递增,在 $\left(1,\dfrac{1}{\ln a}\right)$ 单调递减,在 $\left(\dfrac{1}{\ln a},+\infty\right)$ 单调递增,

故 $x=1$ 为 $f(x)$ 的极大值点，不符合条件； ……（8 分）

②当 $a=\mathrm{e}$ 时，$f'(x)\geqslant 0$，无极值点； ……（9 分）

③当 $a>\mathrm{e}$ 时，$\frac{1}{\ln a}<1$，

可知 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{\ln a}\right)$ 单调递增，在 $\left(\frac{1}{\ln a},1\right)$ 单调递减，在 $(1,+\infty)$ 单调递增，

故 $x=1$ 为 $f(x)$ 的极小值点，符合条件. ……（11 分）

综上，a 的取值范围为 $(\mathrm{e},+\infty)$. ……（12 分）

21. **解析** （Ⅰ）设小明第一轮答对的题数为 ξ，

由条件可知 $\xi\sim B\left(n,\frac{1}{3}\right)$，则 $E(\xi)=\frac{n}{3}$， ……（2 分）

因为 $X=5\xi$，所以 $E(X)=5E(\xi)=\frac{5n}{3}$，

因此，当 $n=30$ 时，$E(X)=50$. ……（4 分）

（Ⅱ）设小明第二轮答对的题数为 η，则 η 的所有可能取值为 $0,1,2,\cdots,n$，

且 $P(\eta=0)=\frac{1}{3}$，$P(\eta=1)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}$，$P(\eta=2)=\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\frac{1}{3}$，$\cdots$，$P(\eta=n-1)=\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\times\frac{1}{3}$，$P(\eta=n)=\left(\frac{2}{3}\right)^n$， ……（6 分）

所以 $E(\eta)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\frac{2}{3}+\cdots+\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\times\frac{n-1}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^n\times n$，① ……（7 分）

$\frac{2}{3}E(\eta)=\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\frac{1}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^3\times\frac{2}{3}+\cdots+\left(\frac{2}{3}\right)^n\times\frac{n-1}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\times n$，②

①－②得 $\frac{1}{3}E(\eta)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\frac{1}{3}+\cdots+\left(\frac{2}{3}\right)^n\times\frac{1}{3}$，

$$\text{所以 } E(\eta)=\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\cdots+\left(\frac{2}{3}\right)^n=\frac{\frac{2}{3}\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]}{1-\frac{2}{3}}=2\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right].$$ ……（9 分）

因为 $Y=20\eta$，所以 $E(Y)=20E(\eta)=40\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]$. ……（10 分）

当 $n\geqslant 24$ 时，$E(X)=\frac{5n}{3}\geqslant 40$，$E(Y)<40$，

即 $E(X)>E(Y)$ 得证. ……（12 分）

22. **解析** （Ⅰ）由题意可知直线 AB 的方程为 $x=\frac{\sqrt{3}}{3}y+\frac{p}{2}$， ……（1 分）

联立 $\begin{cases} y^2=2px, \\ x=\frac{\sqrt{3}}{3}y+\frac{p}{2}, \end{cases}$ 消去 x 得 $y^2-\frac{2\sqrt{3}p}{3}y-p^2=0$，

设点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，不妨设 A 在第一象限，则 $y_1=\sqrt{3}p$，$y_2=-\frac{\sqrt{3}}{3}p$， ……（2 分）

所以$|AB|=\frac{2}{\sqrt{3}}(y_1-y_2)=\frac{16}{3}$，即$\frac{8}{3}p=\frac{16}{3}$，得$p=2$，…………（4分）

所以E的方程为$y^2=4x$. …………（5分）

（Ⅱ）由（Ⅰ）知圆$F:(x-1)^2+y^2=1$，设点$T(4a^2,4a)$，$P(4b^2,4b)$，$Q(4c^2,4c)$，

则直线PT的方程为$x-(a+b)y+4ab=0$，直线QT的方程为$x-(a+c)y+4ac=0$，直线PQ的方程为$x-(b+c)y+4bc=0$，

由PQ的方程可得$M(-4bc,0)$，$N\left(0,\frac{4bc}{b+c}\right)$，则$\triangle MON$的面积为$-\frac{8b^2c^2}{b+c}>0$，所以$b+c<0$. …………（7分）

因为PT与圆F相切，所以点F到直线PT的距离为$\frac{|1+4ab|}{\sqrt{(a+b)^2+1}}=1$，…………（8分）

整理得$(16a^2-1)b^2+6ab-a^2=0$，同理$(16a^2-1)c^2+6ac-a^2=0$，

所以$b+c=-\frac{6a}{16a^2-1}<0$，$bc=-\frac{a^2}{16a^2-1}<0$，得$a>\frac{1}{4}$，…………（9分）

$\triangle MON$的面积化为$\frac{4a^3}{3(16a^2-1)}$. …………（10分）

设$f(a)=\frac{4a^3}{3(16a^2-1)}$，则$f'(a)=\frac{4a^2(16a^2-3)}{3(16a^2-1)^2}$，

令$f'(a)=0$，得$a=\frac{\sqrt{3}}{4}$，所以$f(a)$在$\left(\frac{1}{4},\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$单调递减，在$\left(\frac{\sqrt{3}}{4},+\infty\right)$单调递增，…………（11分）

故$\triangle MON$面积的最小值为$f\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}}{32}$. …………（12分）