2024 届高三数学试题(理科)

考生注意:

1. 本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分,共 150 分。考试时间 120 分钟
2. 请将各题答案填写在答题卡上。
3. 本试卷主要考试内容:小题按照必修 1,必修 4,必修 5,选修 2—1 第一章,选修 2—2 一章出题,大题按照高考范围出题。

密 封 线 内 不 要 答 题

第Ⅰ卷

一、选择题:本大题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求的.

1. 若集合 $A=\{x|x<2\}$,$B=\{x|(x-1)^2<4\}$,则 $A\cup B=$

A. $\{x|x<2\}$　　B. $\{x|-1<x<2\}$

C. $\{x|x<3\}$　　D. $\{x|-1<x<3\}$

2. 已知向量 $\overrightarrow{AB}=(m+3,2m+1)$,$\overrightarrow{CD}=(m+3,-5)$,则"$|m|=2$"是"$\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{CD}$"的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

3. 若 x,y 满足约束条件 $\begin{cases} y+1\geqslant 0, \\ x+y\leqslant 0, \\ x+3\geqslant 0, \end{cases}$ 则 $z=x-y$ 的最小值为

A. -6　　B. -4　　C. -2　　D. 2

4. 若 $\tan(\alpha-\beta)=2$,$\tan\beta=4$,则 $\dfrac{7\sin\alpha-\cos\alpha}{7\sin\alpha+\cos\alpha}=$

A. $-\dfrac{7}{5}$　　B. $\dfrac{7}{5}$　　C. $-\dfrac{5}{7}$　　D. $\dfrac{5}{7}$

5. 若曲线 $y=\dfrac{x^4-x^3}{x-1}$ 在 $x=m$ 处的切线的斜率为 3,则该切线在 x 轴上的截距为

A. $-\dfrac{2}{3}$　　B. 2　　C. ± 2　　D. $\pm\dfrac{2}{3}$

6. 已知 $f(x-5)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数,且当 $x\geqslant m$ 时,$f(x)$ 单调递增,要确保 $f(x)$ 的零点唯一,则 m 的值可以为

A. -4　　B. 0　　C. -5　　D. 5

7. 定义矩阵运算 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$,则 $\begin{bmatrix} \lg 2^{\frac{1}{4}} & \lg 25 \\ \lg 5 & \lg 256 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8^{\frac{2}{3}} \\ 2^{-1} \end{bmatrix}=$

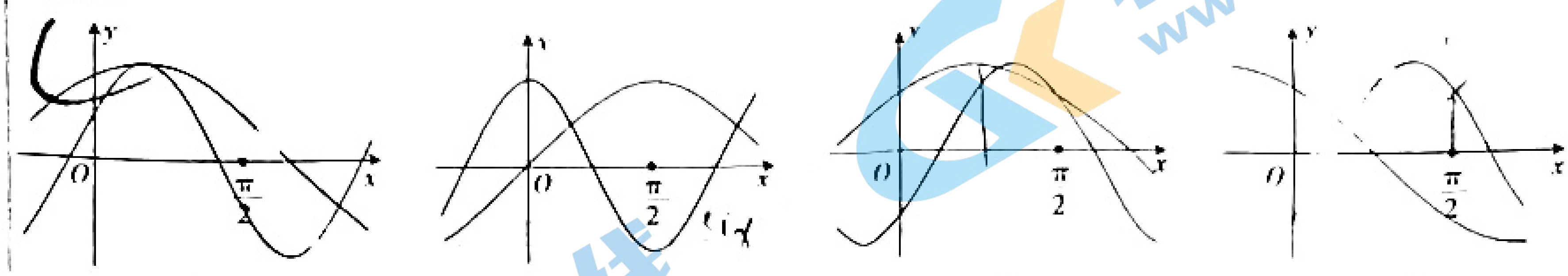
A. $\begin{pmatrix} \lg 20 \\ 4 \end{pmatrix}$　　B. $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} \lg 20 \\ 2\lg 50 \end{pmatrix}$　　D. $\begin{pmatrix} 1 \\ 2\lg 50 \end{pmatrix}$

8. 在四边形 $ABCD$ 中，$\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{DC}$，$|\overrightarrow{AD}|=3$，对角线 AC，BD 相交于点 O，若 $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AD}=10$，则 $\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{AD}=$

A. 12　　B. 10　　C. 6　　D. 5

9. 在同一直角坐标系 xOy 中，函数 $f(x)=2\sin(2x+\varphi)$ 与 $g(x)=2\cos(x-\varphi)$ 的部分图象不可能为



A　　B　　C　　D

10. 某公司计划在 10 年内每年某产品的销售额（单位：万元）等于上一年的 1.2 倍再减去 2. 已知第一年（2022 年）该公司该产品的销售额为 100 万元，则按照计划该公司从 2022 年到 2031 年该产品的销售总额约为（参考数据：$1.2^{10}\approx6.19$）

A. 2135.5 万元　　B. 2235.5 万元　　C. 2335.5 万元　　D. 2435.5 万元

11. 已知 $a+\log_2 a=4$，$b+\log_3 b=c+\log_4 c=3$，则

A. $a>c>b$　　B. $a>b>c$　　C. $b>c>a$　　D. $c>a>b$

12. 若 $\cos\frac{\pi}{5}$ 是关于 x 的方程 $ax^3-bx-1=0$（a，b 均为正整数）的一个实根，则 $a+b=$

A. 9　　B. 10　　C. 11　　D. 12

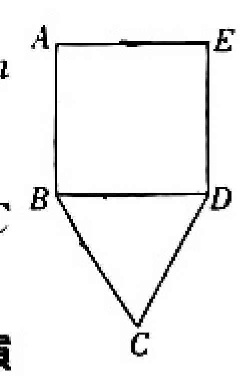
第Ⅱ卷

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 把答案填在答题卡的相应位置.

13. 命题“若 $a+b=2$，则 a，b 不都小于 1”的逆否命题为__▲__.

14. 在数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=0$，$a_2=2$，若 a_{2n-1}，a_{2n}，a_{2n+1} 成等差数列，a_{2n}，a_{2n+1}，a_{2n+2} 成等比数列，则 $a_8=$__▲__.

15. 将曲线 $y=\sin 4x$ 向左平移 $\frac{\pi}{24}$ 个单位长度，得到曲线 $y=f(x)$. 已知曲线 $y=f(x)$ 与曲线 $y=\cos(x+\frac{11\pi}{12})$ 都关于直线 $x=m(-\pi<m<2\pi)$ 对称，写出一个符合条件的 m 的值：__▲__.



16. 如图，已知平面五边形 $ABCDE$ 的周长为 12，若四边形 $ABDE$ 为正方形，且 $BC=CD$，则当 $\triangle BCD$ 的面积取得最大值时，$AB=$__▲__.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤. 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答. 第 22，23 题为选考题，考生根据要求作答.

（一）必考题：共 60 分.

17.（12 分）

某工厂的工人生产内径为 28.50 mm 的一种零件，为了了解零件的生产质量，在某次抽检中，从该厂的 1000 个零件中抽出 60 个，测得其内径尺寸（单位：mm）如下：

28.51×13	28.52×6	28.50×4	28.48×11
28.49×	28.54×1	28.53×7	28.47×q

这里用 $x\times n$ 表示有 n 个尺寸为 x mm 的零件，p,q 均为正整数. 若从这 60 个零件中随机抽取 1 个，则这个零件的内径尺寸小于 28.49 mm 的概率为 $\frac{4}{15}$.

(1)求 p,q 的值.

(2)已知这 60 个零件内径尺寸的平均数为 $\bar{x}$ mm，标准差为 s mm，且 $s=0.02$，在某次抽检中，若抽取的零件中至少有 80%的零件内径尺寸在 $[\bar{x}-s,\bar{x}+s]$ 内，则称本次抽检的零件合格. 试问这次抽检的零件是否合格？说明你的理由.

18.（12 分）

a,b,c 分别为△ABC 内角 A,B,C 的对边，已知 $a\sin(A-B)=(c-b)\sin A$.

(1)求 A；

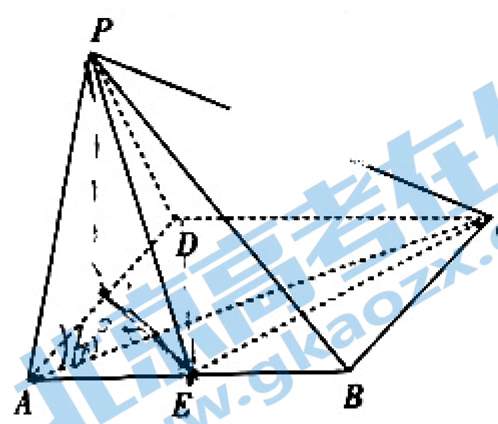
(2)若 D 在线段 BC 上，$\angle ADC=\frac{\pi}{3}$，$AD=3$，且△ABC 的面积 $S=3\sqrt{3}$，求△ABC 的周长.

19.（12 分）

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，底面 $ABCD$ 是菱形，△PAD 是正三角形，$\angle ABC=\frac{2\pi}{3}$，$E$ 是 AB 的中点.

(1)证明：$AC\perp PE$.

(2)求二面角 $A-CE-P$ 的余弦值.



20.（12 分）

以坐标原点为对称中心，坐标轴为对称轴的椭圆过点 $C(0,-1)$，$D(-\frac{8}{5},-\frac{3}{5})$.

(1)求椭圆的方程.

(2)设 P 是椭圆上一点(异于 C,D)，直线 PC,PD 与 x 轴分别交于 M,N 两点. 证明在 x 轴上存在两点 A,B，使得 $\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{NA}$ 是定值，并求此定值.

21.(12分)

已知函数 $f(x)=2a\ln x-x+\frac{1}{x}$.

(1)若 $\forall x\in[1,+\infty)$，$f(x)\leqslant 0$，求 a 的取值范围；

(2)证明：$\forall n\in\mathbf{N}_+$，$3n+6(n+1)\sum\limits_{i=1}^{n}\ln[i(i+1)]<n(n+1)^2(n+2)$.

(二)选考题：共10分. 请考生从第22,23两题中任选一题作答. 如果多做，则按所做的第一个题目计分.

22.[选修4—4：坐标系与参数方程](10分)

在直角坐标系 xOy 中，直线 l_1 的方程为 $y+4=0$，直线 l_2 的方程为 $x+4=0$. 以坐标原点 O 为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，圆 M 的极坐标方程为 $\rho^2-2\rho\cos\theta-4\rho\sin\theta=11$，点 C 的极坐标为 $(4\sqrt{2},\frac{5\pi}{4})$.

(1)求点 C 的直角坐标与圆 M 的直角坐标方程(化为标准方程)；

(2)若 P 为曲线 M 上任意一点，过点 P 作直线 l_1 的垂线，垂足为 A，过点 P 作直线 l_2 的垂线，垂足为 B，求矩形 $PACB$ 周长的最大值.

23.[选修4—5：不等式选讲](10分)

已知 $a+2b+3c=4$.

(1)若 a,b,c 均为正数，证明：$\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}\geqslant 9$.

(2)若 a,b,c 均为实数，求 $|\frac{1}{2}a+b|+|c|$ 的最小值.

密 封 线 内 不 要 答 题