

天一大联考
2021—2022 学年高中毕业班阶段性测试(三)

文科数学

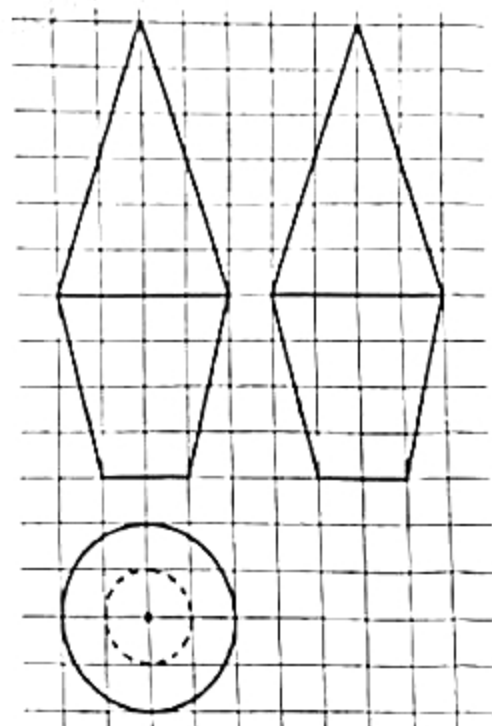
考生注意:

1. 答题前,考生务必将自己的姓名、考生号填写在试卷和答题卡上,并将考生号条形码粘贴在答题卡上的指定位置.
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑.如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号.回答非选择题时,将答案写在答题卡上.写在本试卷上无效.
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回.

参考公式:设圆台的上下底面半径分别为 r, R , 圆台的高为 h , 则圆台的体积 $V = \frac{1}{3}\pi(R^2 + r^2 + Rr)h$.

一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 若集合 $A = \{y | y = 3\sin x - 1\}$, $B = \{y | y \geq -1\}$, 则 $A \cap (\complement_{\mathbb{R}} B) =$
 - A. $\{y | -1 < y \leq 2\}$
 - B. $\{y | -4 \leq y < -1\}$
 - C. $\{y | -1 < y \leq 4\}$
 - D. $\{y | -2 \leq y < -1\}$
2. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 中, 首项 $a_1 = 1$, 前 5 项和 $S_5 = 25$, 则 $a_7 =$
 - A. 15
 - B. 14
 - C. 13
 - D. 12
3. 已知向量 $a = (3, 1)$, $b = (2, \lambda)$ ($\lambda \in \mathbb{R}$), 若 $a \perp b$, 则 $|a + b| =$
 - A. 5
 - B. $5\sqrt{2}$
 - C. $5\sqrt{3}$
 - D. 10
4. 已知 $m, n \in (0, +\infty)$, 若 $m + n = 2$, 则 $\frac{m}{4-2m} + \frac{2n}{2-n}$ 的最小值为
 - A. 2
 - B. $2\sqrt{2}$
 - C. 3
 - D. 4
5. 中世纪是骑兵的黄金时代, 其中最具有代表性的是拜占庭重骑兵, 他们的主要武器是长矛, 如图所示, 粗线为一款长矛的矛头模型的三视图, 图中小正方形的边长均为 1, 则该模型的体积为
 - A. $\frac{50}{3}\pi$
 - B. 17π
 - C. $\frac{52}{3}\pi$
 - D. 18π
6. 已知 $a \in \mathbb{R}$, 则“ $|a| \geq 4$ ”是“直线 $l: x - 2y = 0$ 与圆 $C: x^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 = 5$ 相离”的
 - A. 必要不充分条件
 - B. 充分不必要条件
 - C. 充要条件
 - D. 既不充分也不必要条件



7. 计算: $\frac{\sin 1100^\circ - 2\sin 100^\circ}{\cos 160^\circ} =$

- A. 1 B. $\sqrt{3}$ C. 2 D. $2\sqrt{3}$

8. 已知 $\triangle ABC$ 中, $AB = 3, AC = 5, \angle BAC = 120^\circ$, 点 D, E 分别为线段 AB, AC 上靠近 B, A 的三等分点, 点 F 为线段 DE 的中点, 则 $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{BF} =$

- A. $\frac{71}{9}$ B. $\frac{61}{9}$ C. $\frac{41}{9}$ D. $\frac{31}{9}$

9. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2x+3, & x \leq 0, \\ x-1, & x > 0, \end{cases}$ 若函数 $g(x) = f(x) - m$ 有两个不同的零点, 则实数 m 的取值范围为

- A. $(2, +\infty)$ B. $(-\frac{15}{4}, 2)$ C. $(-\frac{13}{4}, +\infty)$ D. $(-\frac{13}{4}, 2)$

10. 某工厂使用过滤仪器过滤排放的废气, 过滤过程中体积一定的废气中的污染物浓度 P (mg/L) 与过滤时间 t (h) 之间的关系式为 $P = P_0 \cdot e^{-kt}$ ($P_0 > 0, k$ 为常数), 且根据以往的经验, 前 2 个小时的过滤能够消除 $\frac{1}{4}$ 的污染物. 现有如下说法: ① $k = \ln 2$; ② 经过 1 个小时的过滤后, 能够消除 $\frac{1}{5}$ 的污染物; ③ 经过 5 个小时的过滤后, 废气中剩余的污染物低于原来的 $\frac{1}{2}$. 则其中正确的个数为

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

11. 已知正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的外接球表面积为 27π , 点 E 为棱 BB_1 的中点, 且 $DE \perp$ 平面 α , 点 $C_1 \in$ 平面 α , 则平面 α 截正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 所得的截面图形的面积为

- A. $\frac{81\sqrt{2}}{4}$ B. $\frac{81\sqrt{2}}{8}$ C. $\frac{81}{4}$ D. $\frac{81}{8}$

12. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{18} = 1$ ($a > 0$) 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 且 $4\overrightarrow{BF_2} + 3\overrightarrow{F_2F_1} = \mathbf{0}$, 点 A 在双曲线 C 的左支上, $\angle F_1AF_2$ 与 $\angle F_1F_2A$ 的平分线的交点为 D , 若 $BD \perp F_1F_2$, 则点 B 到双曲线 C 的一条渐近线的距离为

- A. $3\sqrt{2}$ B. $2\sqrt{3}$ C. $\sqrt{6}$ D. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 已知实数 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x+y \leq 3, \\ 3x-y \geq 0, \\ y \geq -1, \end{cases}$ 则目标函数 $z = x + 2y$ 的最大值为 _____.

14. 已知函数 $f(x) = \log_9(x+3), x \in [0, m]$, 若 $\forall x_1 \in [0, m], \exists x_2 \in [0, m]$, 使得 $f(x_1) = \frac{1}{f(x_2)}$, 则 $m =$ _____.

15. 已知函数 $f(x) = \sqrt{2}\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) + 1 - m$ 在 $\left[-\frac{3\pi}{4}, 0\right]$ 上有 3 个零点 x_1, x_2, x_3 , 其中 $x_1 < x_2 < x_3$, 则 $x_1 + 2x_2 + x_3 =$ _____.

16. 已知抛物线 $C: x^2 = 2py$ ($p > 0$) 的焦点 F 到准线 l_1 的距离为 2, 点 M, N 在抛物线 C 上, 且 M, N, F 三点共线, 若直线 $l_2: (1+3\lambda)x + (2+4\lambda)y + 14\lambda + 7 = 0$ 过定点 A , 且 $\angle ANM = 90^\circ$, 则点 A 的坐标为 _____, 点 M 到原点 O 的距离为 _____. (本题第一空 2 分, 第二空 3 分)

关注北京高考在线官方微信: 北京高考资讯(微信号:bjgkzx), 获取更多试题资料及排名分析信息。

三、解答题:共 70 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

已知函数 $f(x) = 3\sin^2 \frac{3}{2}x + a\sin 3x$ 的最大值为 $\frac{9}{2}$, 其中 $a > 0$.

(I) 求 a 的值;

(II) 求 $f(x)$ 在 $[\pi, 2\pi]$ 上的单调递减区间.

18. (12 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $a_2 = 2a_1 = 6$, $\frac{a_{n+2} + 4S_n + 4a_n}{4} = S_{n+1}$.

(I) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(II) 求数列 $\left\{\frac{8n+10}{3} \cdot a_{2n}\right\}$ 的前 n 项和 T_n .

19. (12 分)

已知 $\triangle ABC$ 中, 点 M 在边 BC 上, $\angle MAC = \frac{\pi}{6}$, $AC = 3$, $AM + MC = 2\sqrt{3}$.

(I) 求证: $\triangle AMC$ 是等腰三角形;

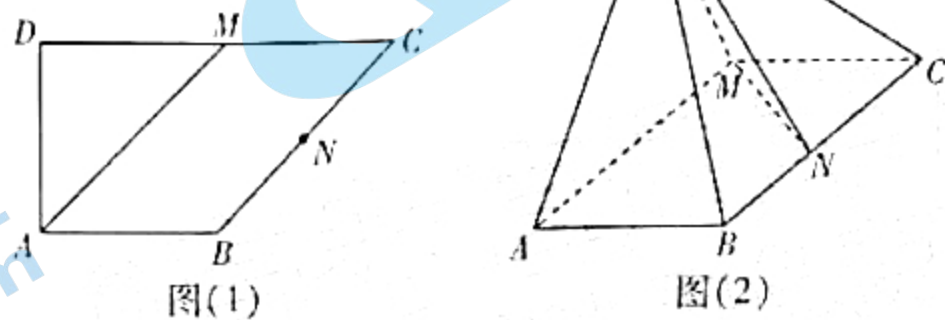
(II) 若 $\tan B = \frac{\sqrt{3}}{5}$, 求 $\triangle ABM$ 与 $\triangle ACM$ 的面积之差.

20. (12分)

已知梯形 $ABCD$ 如图(1)所示,其中 $AB \parallel CD$, $\angle BAD = 90^\circ$, $\angle BCD = 45^\circ$, $CD = \sqrt{2}BC$,过点 A 作 BC 的平行线交线段 CD 于 M ,点 N 为线段 BC 的中点,现将 $\triangle DAM$ 沿 AM 进行翻折,使点 D 到达点 P 的位置,且平面 $PAM \perp$ 平面 AMC ,得到的图形如图(2)所示.

(I) 求证: $AP \perp PN$;

(II) 若 $AB = 2$,求点 C 到平面 PMN 的距离.



21. (12分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的右焦点为 F ,直线 l 与椭圆 C 交于 A, B 两点.

(I) 若 $\vec{AM} = \vec{MB}$,且直线 l 的斜率为 4,求直线 OM (点 O 为坐标原点) 的斜率.

(II) 若直线 FA, FB 的斜率互为相反数,且直线 l 不与 x 轴垂直,探究:直线 l 是否过定点? 若是,求出该定点坐标;若不是,请说明理由.

22. (12分)

已知函数 $f(x) = e^x - \sqrt{2}x$.

(I) 求 $f(x)$ 的单调区间;

(II) 若关于 x 的不等式 $f(x) \geq 2 - a \cos x$ 在 $[-\frac{\pi}{2}, 0]$ 上恒成立,求实数 a 的取值范围.