

2021 北京师大附实验中学高一（上）期中

数 学

班级 _____ 姓名 _____ 学号 _____ 成绩 _____

考生须知	1. 本试卷共6页，共五道大题，25道小题，答题卡共4页，满分150分，考试时间120分钟。 2. 在试卷和答题卡上准确填写班级、姓名、学号。 3. 试卷答案一律填写在答题卡上，在试卷上作答无效。 4. 在答题卡上，选择题须用2B铅笔将选中项涂黑涂满，其他试题用黑色字迹签字笔作答。 命题人：高一数学备课组 审题人：黎栋材
------	--

第I卷（共100分）

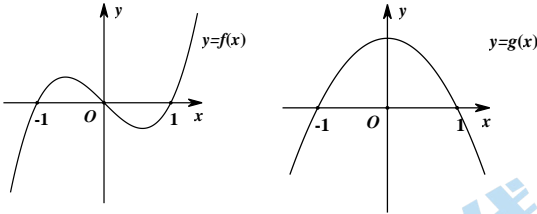
一、选择题（本大题共10小题，每小题4分，共40分）

1. 已知集合 $A = \{-2, -1, 0, 1\}$, $B = \{-1, 1, 2\}$, 则 $A \cap B =$
 - A. $\{-1, 1\}$
 - B. $\{-1, 0, 1\}$
 - C. $\{-1, 1, 2\}$
 - D. $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$
2. 下列函数中在 $[0, +\infty)$ 上单调递增的是
 - A. $y = -x$
 - B. $y = \sqrt{x}$
 - C. $y = x^2 - 2x$
 - D. $y = \frac{1}{x}$
3. 命题“ $\exists x \in [0, 1]$, 使得 $f(x) > 0$ ”的否定是
 - A. $\forall x \in [0, 1]$, 都有 $f(x) < 0$
 - B. $\forall x \in [0, 1]$, 都有 $f(x) \leq 0$
 - C. $\exists x \in [0, 1]$, 使得 $f(x) < 0$
 - D. $\exists x \in [0, 1]$, 使得 $f(x) \leq 0$
4. 已知 $a > b > 0$, $c < 0$, 下列不等式恒成立的是
 - A. $ac > bc$
 - B. $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$
 - C. $ac^2 > bc^2$
 - D. $\frac{a}{c^2} < \frac{b}{c^2}$
5. 设方程 $x^2 - 6x + 1 = 0$ 的两个不等实根分别为 x_1, x_2 , 则 $|x_1 - x_2| =$
 - A. 3
 - B. 6
 - C. $2\sqrt{2}$
 - D. $4\sqrt{2}$
6. 已知函数 $f(x) = x^3 + 2x - 4$ 恰有一个零点, 则该零点所在的区间是
 - A. $(-1, 0)$
 - B. $(0, 1)$
 - C. $(1, 2)$
 - D. $(2, 3)$
7. 已知 $\log_2 3 = a$, 则 $4^a + 4^{-a}$ 的值为
 - A. $\frac{5}{2}$
 - B. $\frac{10}{3}$
 - C. $\frac{37}{6}$
 - D. $\frac{82}{9}$

8. “ $\frac{1}{x} \geq 1$ ”是“ $x(x-1) \leq 0$ ”的

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

9. 如图为函数 $y = f(x)$ 和 $y = g(x)$ 的图像，则不等式 $f(x) \cdot g(x) < 0$ 的解集为



- A. $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$ B. $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$
C. $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$ D. $(0, 1) \cup (1, +\infty)$

10. 如果函数 $f(x)$ 的定义域为 $[a, b]$ ，且值域为 $[f(a), f(b)]$ ，则称 $f(x)$ 为“ Ω 函数”. 已知函数

$$f(x) = \begin{cases} 5x, & 0 \leq x \leq 1, \\ x^2 - 4x + m, & 1 < x \leq 4 \end{cases} \text{ 是“}\Omega\text{ 函数”，则 } m \text{ 的取值范围是}$$

- A. $[4, 9]$ B. $[5, 9]$
C. $[4, +\infty)$ D. $[5, +\infty)$

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）

11. 函数 $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x^2}$ 的定义域为_____.

12. 已知 x, y 均为正实数，则 $\frac{x}{y} + \frac{9y}{x}$ 的最小值为_____.

13. 计算： $2\lg 5 + \lg 12 - \lg 3 =$ _____.

14. 函数 $f(x) = -x^2 + 2x + 1$ 在 $[-1, 2]$ 上的最大值为_____，最小值为_____.

15. 已知定义在 \mathbf{R} 上的偶函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调，且 $f(1) = 2$ ， $f(-2) = 3$ ，给出下列四个结论：

- ① $f(x)$ 在 $(-\infty, 0]$ 上单调递减；
- ② 存在 $x \in (-1, 1)$ ，使得 $f(x) \geq 2$ ；
- ③ 不等式 $2 < f(x) < 3$ 的解集为 $(-2, -1) \cup (1, 2)$ ；
- ④ 关于 x 的方程 $[f(x-1)]^2 - 5f(x-1) + 6 = 0$ 的解集中所有元素之和为 4.

其中所有正确结论的序号是_____.

（注：本题有多个选项符合要求，全部选对得 5 分，不选或有错选得 0 分，其它情况得 3 分）

三、解答题（本大题共 3 小题，共 35 分）

16.（本小题满分 12 分）

已知集合 $A = \{x \mid x^2 - 8x + 12 > 0\}$, $B = \{x \mid a - 1 \leq x \leq a + 1\}$.

- (1) 若 $a = 2$, 求 $\complement_{\mathbf{R}}(A \cup B)$;
- (2) 若 $A \cap B = \emptyset$, 求 a 的取值范围;
- (3) 若 $B \subseteq A$, 求 a 的取值范围.

17.（本小题满分 10 分）

已知关于 x 的方程 $x^2 - 2(k+1)x + k^2 + 3 = 0$ 有两个不相等的实根 x_1, x_2 .

- (1) 求 k 的取值范围;
- (2) 若 $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{6}{7}$, 求 k 的值;
- (3) 求 $x_1^2 + x_2^2$ 的取值范围.

18.（本小题满分 13 分）

函数 $f(x)$ 为定义在 \mathbf{R} 上的奇函数, 已知当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = \frac{x}{x+1}$.

- (1) 当 $x < 0$ 时, 求 $f(x)$ 的解析式;
- (2) 判断 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上的单调性, 并利用单调性的定义证明;
- (3) 若 $f(a+1) + f(2a-2) > 0$, 求 a 的取值范围.

第II卷（共 50 分）

四、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

19. 比较大小: $\sqrt{5} - 2$ _____ $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ (填“>”或“<”).

20. 设集合 $A = \{x \mid \frac{x-2}{x} < 0\}$, $B = \{x \mid |x-m| \geq n\}$, 若 $\complement_{\mathbf{R}}A = B$, 则 $m =$ _____; $n =$ _____.

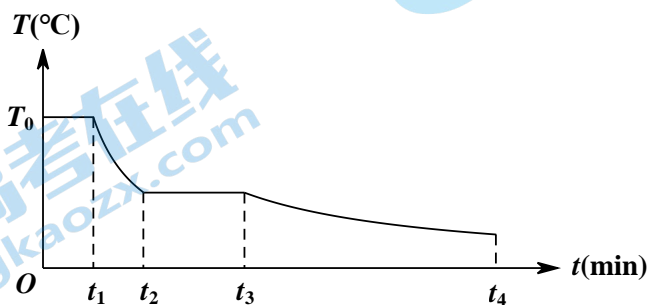
21. 设关于 x 的不等式 $ax^2 - 2x + a \leq 0$ 的解集为 S .

- (1) 若 S 中有且只有一个元素, 则 a 的值为 _____;
- (2) 若 $0 \in S$ 且 $-1 \notin S$, 则 a 的取值范围是 _____.

22. 某电热元件在通电状态下仅有两种模式，在 A 模式下元件温度保持不变；从 A 模式切换到 B 模式后，在 B 模式下，元件温度 T （单位 $^{\circ}\text{C}$ ）与通电累积时间 t （即从通电时刻开始累积计时，单位 min ）的乘积保持不变；从 B 模式再切换到 A 模式后，原件温度继续保持不变……现将该元件通电，初始温度为 T_0 ，已知在 $t=1, 3, 6, 12$ 这四个时刻下的元件温度如表所示，而在 $0 \sim t_4$ ($t_4 \geq 12$) 时间内 T 随 t 变化的图像如图所示。

请根据以上信息推断： $T_0 = \underline{\hspace{2cm}}$ ； $t_1 + t_2 + t_3 = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

通电累积时间 t (单位 min)	1	3	6	12
元件温度 T (单位 $^{\circ}\text{C}$)	30	20	15	10



五、解答题（本大题共 3 小题，共 30 分）

23. （本小题满分 10 分）

设函数 $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$, $x \in (0, +\infty)$.

(1) 求 $f(x)$ 的最小值，及取得最小值时 x 的值；

(2) 已知 $a, b > 0$ 且 $a \neq b$ ，求证：“ $ab = 1$ ”是“ $f(a) = f(b)$ ”的充分必要条件。

24. （本小题满分 10 分）

已知函数 $f(x) = (x+1)^2$, $g(x) = kx+1$ （其中 $k \in \mathbf{R}$ ）。

(1) 若对任意 $x \in \mathbf{R}$ ，都有 $f(x) \geq g(x)$ 恒成立，求 k 的值；

(2) 设关于 x 的函数 $h(x) = \begin{cases} f(x), & f(x) \geq g(x), \\ g(x), & f(x) < g(x) \end{cases}$ 的最小值为 m 。

① 若 $k = 1$ ，解不等式 $f(x) \geq g(x)$ ，并直接写出 m 的值；

② 试判断 m 是否为 k 的函数？若是，直接写出 $m = F(k)$ 的函数表达式（用分段函数形式表示）；若不是，说明理由。

25. (本小题满分 10 分)

对于一个所有元素均为整数的非空集合 A ，和一个给定的整数 k ，定义集

合 $A_k = \{x \mid x = |a - k|, a \in A\}$.

(1) 若 $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ，直接写出集合 A_1 ， A_2 和 A_3 ；

(2) 若 $A = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ ，其中 $n \in \mathbf{N}^*$ ， $n \geq 5$ ，求 k 的值，使得集合 A_k 中元素的个数最少；

(3) 写出所有满足 $0 \leq k < p$ 的整数 p 和 k ，使得当集合 $A = \{mp \mid m \in \mathbf{Z}\}$ 时，有 $\mathbf{N} \subseteq (A \cup A_k)$ ，并说明理由.