2023北京丽泽中学高三2月月考

数　　学

2023.02

一、选择题共10小题，每小题4分，共40分.在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1. 在复平面内，若复数$\overline{Z}$对应的点的坐标为$(2,1)$，则$Z=$（　　）

A. $2+\mathrm{i}$　　B. $2-\mathrm{i}$　　C. $1+2\mathrm{i}$　　D. $1-2\mathrm{i}$

2. 已知全集$U=\{x|-3<x<3\}$，集合$A=\{x|-2<x\le 1\}$，则$\complement_U A=$（　　）

A. $(-2,1]$　　B. $(-3,-2)\cup[1,3)$　　C. $[-2,1)$　　D. $(-3,-2]\cup(1,3)$

3. 函数$f(x)=\cos^2 x-1$是（　　）

A. 最小正周期为2π的偶函数

B. 最小正周期为2π的奇函数

C. 最小正周期为π的偶函数

D. 最小正周期为π的奇函数

4. “$x>1$”是“$\ln(2x-1)>0$”的（　　）

A. 充分而不必要条件　　B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

5. 在$\left(x^2-\dfrac{2}{x}\right)^6$的展开式中，第四项为（　　）

A. 160　　B. -160　　C. $160x^3$　　D. $-160x^3$

6. 已知两条不同的直线l,m与两个不同的平面α,β，则下列结论中正确的是（　　）

A. 若$l//\alpha$，$\alpha\cap\beta=m$，则$l//m$

B. 若$\alpha\perp\beta$，$\alpha\cap\beta=m$，$l\perp m$，则$l\perp\beta$

C. 若$m\perp\alpha$，$l\perp m$，则$l//\alpha$

D. 若$m\perp\alpha$，$m\subset\beta$，则$\alpha\perp\beta$

7. 已知$a=3^{0.5}$，$b=\log_3 2$，$c=\tan\dfrac{2\pi}{3}$，则（　　）

A. $a>b>c$　　B. $b>a>c$

C. $c>a>b$　　D. $a>c>b$

8. 设等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n．若$S_2<S_3<0$，则下列结论中正确的是（　　）

A. $a_3<0$　　B. $a_2-a_1<0$

C. $a_2+a_3<0$ D. $a_4>\sqrt{a_3\cdot a_5}$

9. 已知偶函数 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上单调递减．若 $f(\lg x)>f(1)$，则 x 的取值范围是（　　）

A. $\left(\frac{1}{10},1\right)$ B. $\left(0,\frac{1}{10}\right)\cup(1,+\infty)$

C. $\left(\frac{1}{10},10\right)$ D. $\left(0,\frac{1}{10}\right)\cup(10,+\infty)$

10. 已知双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>0$，$b>0$）的左、右顶点分别为 A_1，A_2，左、右焦点分别为 F_1，F_2．以线段 A_1A_2 为直径的圆与双曲线 C 的一条渐近线交于点 M，且点 M 在第一象限，A_2M 与另一条渐近线平行．若 $|F_1M|=\sqrt{21}$，则 $\triangle MA_2F_2$ 的面积是（　　）

A. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{7\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ D. $\frac{7\sqrt{3}}{4}$

二、填空题（共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.）

11. 函数 $f(x)=\sqrt{4-x^2}+\frac{1}{x-1}$ 的定义域为__________.

12. 已知抛物线 C：$x^2=8y$，则抛物线 C 的准线方程为______.

13. 在 $\triangle ABC$ 中，$a=2$，$b=\sqrt{3}$，$A=2B$，则 $\cos B=$______.

14. 在平面直角坐标系中，已知点 $M(2,-2)$，动点 N 满足 $|NM|=1$，记 d 为点 N 到直线 l：$x+my+1-2m=0$ 的距离．当 m 变化时，直线 l 所过定点的坐标为______；d 的最大值为______.

15. 函数 $f(x)=\frac{x}{1+|x|}(x\in\mathbf{R})$，给出下列四个结论

① $f(x)$ 的值域是 $(-1,1)$；

②任意 $x_1,x_2\in\mathbf{R}$ 且 $x_1\neq x_2$，都有 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$；

③任意 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ 且 $x_1\neq x_2$，都有 $\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}>f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$；

④规定 $f_1(x)=f(x),f_{n+1}(x)=f(f_n(x))$，其中 $n\in\mathbf{N}^*$，则 $f_{10}\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{12}$.

其中，所有正确结论的序号是______________.

三、解答题（共 6 小题，共 85 分.解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.）

16. 已知函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin2\omega x-\cos2\omega x(0<\omega<2)$，再从条件①、条件②、条件③中选择一个作为已知，

（1）求 $f\left(x\right)$ 的解析式；

（2）当 $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 时，关于 x 的不等式 $f\left(x\right)\le m$ 恒成立，求实数 m 的取值范围.

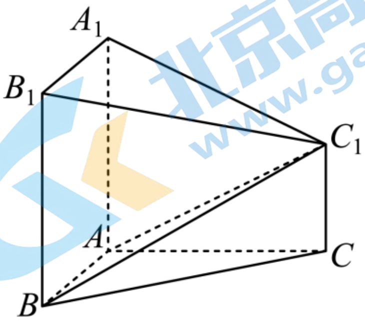
条件①：函数 $f\left(x\right)$ 的图象经过点 $\left(\dfrac{\pi}{3},2\right)$；

条件②：函数 $f\left(x\right)$ 的图象可由函数 $g\left(x\right)=2\sin 2x$ 的图象平移得到；

条件③：函数 $f\left(x\right)$ 的图象相邻的两个对称中心之间的距离为 $\dfrac{\pi}{2}$.

注：如果选择条件①、条件②和条件③分别解答，按第一个解答计分

17. 如图，在多面体 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AA_1=AC=4, CC_1=2, AB=3$.侧面 ABB_1A_1 为矩形，$CA\perp$ 平面 ABB_1A_1，$CC_1\perp$ 平面 ABC，



（1）求证：$CC_1//AA_1$

（2）求直线 A_1C_1 与平面 ABC_1 所成角的正弦值

（3）求直线 A_1B_1 到平面 ABC_1 的距离.

18. 某商家为了促销，规定每位消费者均可免费参加一次抽奖活动，活动规则如下：在一不透明纸箱中有 8 张相同的卡片，其中 4 张卡片上印有“幸”字，另外 4 张卡片上印有“运”字．消费者从该纸箱中不放回地随机抽取 4 张卡片，若抽到的 4 张卡片上都印有同一个字，则获得一张 10 元代金券；若抽到的 4 张卡片中恰有 3 张卡片上印有同一个字，则获得一张 5 元代金券；若抽到的 4 张卡片是其他情况，则不获得任何奖励.

（1）求某位消费者在一次抽奖活动中抽到的 4 张卡片上都印有“幸”字的概率；

（2）记随机变量 X 为某位消费者在一次抽奖活动中获得代金券的金额数，求 X 的分布列和数学期望 $E\left(X\right)$；

（3）该商家规定，消费者若想再次参加该项抽奖活动，则每抽奖一次需支付 3 元．若你是消费者，是否愿意再次参加该项抽奖活动？请说明理由.

19. 已知函数 $f\left(x\right)=\mathrm{e}^{x}+m\mathrm{e}^{-x}+\left(m-1\right)x, m\le 0$.

（1）当 $m=0$ 时，求曲线 $y=f\left(x\right)$ 在点 $\left(0,f\left(0\right)\right)$ 处的切线方程；

（2）讨论函数 $f\left(x\right)$ 的单调性；

（3）请写出一个实数 m 的值，使得对任意的 $x\in(0,+\infty)$，$f(x)\ge -2$ 恒成立.（结论不要求证明）

20. 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{t+1}+\dfrac{y^2}{6-t}=1$ 的焦点在 x 轴上，且离心率为 $\frac{1}{2}$

（1）求实数 t 的值和椭圆 C 的方程；

（2）若垂足为点 P 的相互垂直的两条直线 L_1,L_2 均与椭圆 C 相切.求证：点 P 在一个圆上.

21. 设 $I_1=[a_1,b_1]$，$I_2=[a_2,b_2]$，…，$I_n=[a_n,b_n]$，$I_{n+1}=[a_{n+1},b_{n+1}]$，是 $n+1\left(n\in\mathrm{N}^*\right)$ 个互不相同的闭区间，若存在实数 x_0 使得 $x_0\in I_i\,(i=1,2,\ldots,n+1)$，则称这 $n+1$ 个闭区间为聚合区间，x_0 为该聚合区间的聚合点.

（1）已知 $I_1=[1,3]$，$I_2=[-2,\sin t]\,(0<t<\pi)$ 为聚合区间，求 t 的值；

（2）已知 $I_1=[a_1,b_1]$，$I_1=[a_2,b_2]$，…，$I_n=[a_n,b_n]$，$I_{n+1}=[a_{n+1},b_{n+1}]$ 为聚合区间.

（ⅰ）设 x_0，y_0 是该聚合区间的两个不同的聚合点．求证：存在 k，$j\in\{1,2,\ldots,n+1\}$，使得 $[a_k,b_j]\subseteq I_i\,(i=1,2,\ldots,n+1)$；

（ⅱ）若对任意 p，q（$p\ne q$ 且 p，$q\in\{1,2,\ldots,n+1\}$），都有 I_p，I_q 互不包含．求证：存在不同的 i，$j\in\{1,2,\cdots,n+1\}$，使得 $b_i-a_j\ge\dfrac{n-1}{n}(b_i-a_i)$.

参考答案

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1. 【答案】A

【解析】

【分析】根据坐标写出复数 $\overline{Z}$ 的代数形式，进而可求 Z .

【详解】由已知得 $\overline{Z}=2+\mathrm{i}$，

$\therefore Z=2-\mathrm{i}$.

故选：A.

2. 【答案】D

【解析】

【分析】利用补集的定义可得正确的选项.

【详解】由补集定义可知：$\complement_U A=\{x\,|\,-3<x\leq -2$ 或 $1<x<3\}$，即 $\complement_U A=(-3,-2]\cup(1,3)$，

故选：D.

3. 【答案】C

【解析】

【分析】利用倍角公式将函数转化为 $y=A\cos\left(\omega x+\varphi\right)+B, A>0, \omega>0$ 的形式，然后利用奇偶性的定义及周期公式可得答案.

【详解】$\because f\left(x\right)=\cos^2 x-1=\dfrac{1+\cos 2x}{2}-1=\dfrac{1}{2}\cos 2x-\dfrac{1}{2}$，

$\therefore f\left(-x\right)=\dfrac{1}{2}\cos\left(-2x\right)-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}\cos 2x-\dfrac{1}{2}=f\left(x\right)$，

即函数 $f\left(x\right)$ 为偶函数，

又 $T=\dfrac{2\pi}{2}=\pi$，

故函数 $f\left(x\right)$ 为最小正周期为 π 的偶函数.

故选：C.

4. 【答案】C

【解析】

【分析】解不等式 $\ln\left(2x-1\right)>0$，根据解可得答案.

【详解】$\because \ln\left(2x-1\right)>0=\ln 1$，

$\therefore 2x-1>1$，即 $x>1$，

即 $\ln\left(2x-1\right)>0 \Leftrightarrow x>1$，

∴ “$x>1$”是“$\ln(2x-1)>0$”的充分必要条件.

故选：C.

5. 【答案】D

【解析】

【分析】直接根据二项展开式的通项求第四项即可.

【详解】在 $\left(x^2-\dfrac{2}{x}\right)^6$ 的展开式中，

第四项为 $T_4=C_6^3\left(x^2\right)^3\left(-\dfrac{2}{x}\right)^3=(-2)^3C_6^3x^3=-160x^3$.

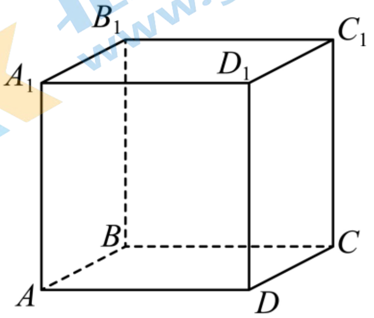
故选：D.

6. 【答案】D

【解析】

【分析】在正方体中，通过反例可说明 ABC 错误；由面面垂直的判定可知 D 正确.

【详解】



对于 A，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$l=CC_1$，$m=AB$，$\alpha=$平面 ABB_1A_1，$\beta=$平面 $ABCD$，

则 $l//\alpha$，$\alpha\cap\beta=m$，此时 l 与 m 异面，A 错误；

对于 B，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$\alpha=$平面 $ABCD$，$\beta=$平面 ABB_1A_1，$m=AB$，$l=CC_1$，

则 $\alpha\perp\beta$，$\alpha\cap\beta=m$，$l\perp m$，此时 $l//\beta$，B 错误；

对于 C，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$l=CC_1$，$m=BC$，$\alpha=$平面 CDD_1C_1，

则若 $m\perp\alpha$，$l\perp m$，此时 $l\subset\alpha$，C 错误；

对于 D，根据面面垂直的判定定理知：若 $m\perp\alpha$，$m\subset\beta$，则 $\alpha\perp\beta$，D 正确.

故选：D.

7. 【答案】A

【解析】

【分析】根据指数、对数函数的单调性，将 a，b，c 与 0 或 1 比较，分析即可得答案.

【详解】由题意得 $a=3^{0.5}>3^0=1$，$0=\log_3 1<\log_3 2<\log_3 3=1$，所以 $0<b<1$，

又 $c=\tan\dfrac{2\pi}{3}=-\sqrt{3}$，

所以 $a>b>c$.

故选：A

8. 【答案】D

【解析】

【分析】根据 $S_2<S_3<0$，可得 $a_3>0$， $a_2<0$，从而可判断 AB，举出反例即可判断 C，根据等差数列的性质结合基本不等式即可判断 D.

【详解】解：因为 $S_2<S_3<0$，

所以 $S_3-S_2=a_3>0$，故 A 错误；

$S_3=3a_2<0$，所以 $a_2<0$，

则公差 $d=a_3-a_2=a_2-a_1>0$，故 B 错误；

所以等差数列 $\{a_n\}$ 为递增数列，

则 $a_4>0,a_5>0$， $a_3\neq a_5$，

则 $a_3+a_5>2\sqrt{a_3\cdot a_5}$，

所以 $2a_4=a_3+a_5>2\sqrt{a_3\cdot a_5}$，

所以 $a_4>\sqrt{a_3\cdot a_5}$，故 D 正确；

对于 C，当 $a_1=-3,d=2$ 时，

$a_2=-1,a_3=1$， $S_2=-4<S_3=-3<0$。

此时 $a_2+a_3=0$，故 C 错误.

故选：D.

9. 【答案】C

【解析】

【分析】根据偶函数的对称性得到 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,0]$ 上单调递增，再根据函数的奇偶性与单调性将函数不等式转化为自变量的不等式，解得即可；

【详解】解：偶函数 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上单调递减，所以 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,0]$ 上单调递增；

则 $f(\lg x)>f(1)$ 等价于 $|\lg x|<1$，即 $-1<\lg x<1$，

即 $\lg\frac{1}{10}<\lg x<\lg 10$，解得 $\frac{1}{10}<x<10$，即原不等式的解集为 $\left(\frac{1}{10},10\right)$；

故选：C

10. 【答案】C

【解析】

【分析】求得以线段 A_1A_2 为直径的圆的方程为 $x^2+y^2=a^2$，与渐近线 $y=\frac{b}{a}x$ 联立求出点 M 的坐标，根

据 A_2M 与另一条渐近线平行可求出 a,b,c 的关系，然后根据 $|F_1M|=\sqrt{21}$，即可求出 a,b,c 的值，从而可得出答案.

【详解】解：由题意 $A_1(-a,0),A_2(a,0)$，$F_1(-c,0),F_2(c,0)$，

则以线段 A_1A_2 为直径的圆的方程为 $x^2+y^2=a^2$，

联立 $\begin{cases}x^2+y^2=a^2\\ y=\dfrac{b}{a}x\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x=\dfrac{a^2}{c}\\ y=\dfrac{ab}{c}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-\dfrac{a^2}{c}\\ y=-\dfrac{ab}{c}\end{cases}$，

又因点 M 在第一象限，所以 $M\left(\dfrac{a^2}{c},\dfrac{ab}{c}\right)$，

因为 A_2M 与直线 $y=-\dfrac{b}{a}x$ 平行，

所以 $\dfrac{\frac{ab}{c}}{\frac{a^2}{c}-a}=-\dfrac{b}{a}$，即 $\dfrac{b}{a-c}=-\dfrac{b}{a}$，

所以 $c=2a$，则 $b^2=c^2-a^2=3a^2$，

因为 $|F_1M|=\sqrt{\left(\dfrac{a^2}{c}+c\right)^2+\left(\dfrac{ab}{c}\right)^2}=\sqrt{21}$，

所以 $\sqrt{\left(\dfrac{5a^2}{2a}\right)^2+\left(\dfrac{b}{2}\right)^2}=\sqrt{21}$，

即 $\dfrac{25a^2}{4}+\dfrac{b^2}{4}=\dfrac{25a^2}{4}+\dfrac{3a^2}{4}=21$，

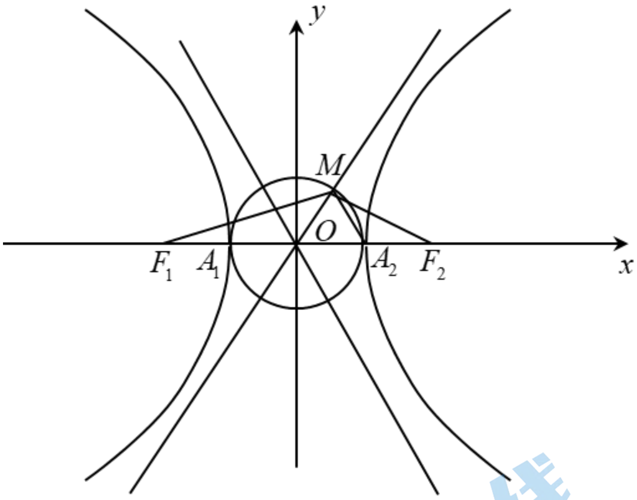
所以 $a^2=3$，

则 $c^2=12,b^2=9$，

所以 $M\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{3}{2}\right)$，$A_2(\sqrt{3},0),F_2(2\sqrt{3},0)$，

所以 $S_{\triangle MA_2F_2}=\dfrac{1}{2}\times(2\sqrt{3}-\sqrt{3})\times\dfrac{3}{2}=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$.

故选：C.



二、填空题（共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.）

11. 【答案】$[-2,1)\cup(1,2]$

【解析】

【分析】利用被开方数不小于零，分母不为零列不等式求解.

【详解】由已知得$\begin{cases}4-x^2\geq 0\\ x-1\neq 0\end{cases}$，解得$-2\leq x\leq 2$且$x\neq 1$，

即函数$f(x)=\sqrt{4-x^2}+\dfrac{1}{x-1}$的定义域为$[-2,1)\cup(1,2]$.

故答案为：$[-2,1)\cup(1,2]$.

12. 【答案】$y=-2$

【解析】

【分析】根据抛物线的方程求出p的值，进一步得出答案.

【详解】因为抛物线$C:x^2=8y$，

所以$2p=8$，$\therefore\ p=4$

所以C的准线方程为$y=-2$.

故答案为：$y=-2$

13. 【答案】$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

【解析】

【分析】利用正弦定理结合二倍角的正弦公式即可得解.

【详解】解：在$\triangle ABC$中，

由正弦定理可得$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$，

即 $\dfrac{2}{\sin 2B}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sin B}$，即 $\dfrac{2}{2\sin B\cos B}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sin B}$，

所以 $\cos B=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

故答案为：$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

14. 【答案】 ①. $(-1,2)$ ②. 6

【解析】

【分析】对直线方程变形可求出直线 l 所过定点 P 的坐标，由题意可得动点 N 在以 $M(2,-2)$ 为圆心，1 为半径为圆上，所以当 $MP\perp l$ 时，点 N 到直线 l 的距离最大，最大值为 $|MP|+1$

【详解】由 $x+my+1-2m=0$，得 $x+1+m(y-2)=0$，

则 $\begin{cases}x+1=0\\y-2=0\end{cases}$，得 $\begin{cases}x=-1\\y=2\end{cases}$，

所以直线 l 所过定点 $P(-1,2)$，

因为点 $M(2,-2)$，动点 N 满足 $|NM|=1$，

所以动点 N 在以 $M(2,-2)$ 为圆心，1 为半径为圆上，

所以当 $MP\perp l$ 时，点 N 到直线 l 的距离最大，

所以 d 的最大值为 $|MP|+1=\sqrt{(2+1)^2+(-2-2)^2}+1=6$，

故答案为：$(-1,2)$，6

15. 【答案】①②

【解析】

【分析】根据绝对值的性质，结合分式型函数的性质、代入法逐一判断即可；

【详解】①：当 $x\ge 0$ 时， $f(x)=\dfrac{x}{1+x}=1-\dfrac{1}{x+1}$，

当 $x\ge 0$ 时，该函数单调递增，所以有 $f(x)\ge f(0)=0$，

当 $x\ge 0$ 时， 因为 $f(x)-1=1-\dfrac{1}{x+1}-1=-\dfrac{1}{x+1}<0$，

所以 $f(x)-1<0\Rightarrow f(x)<1$，因此当 $x\ge 0$ 时，$0\le f(x)<1$；

当 $x<0$ 时， $f(x)=\dfrac{x}{1-x}=\dfrac{1}{1-x}-1$，此时函数单调递增，

所以有 $f(x)<f(0)\Rightarrow f(x)<0$，

$f(x)-(-1)=\dfrac{1}{1-x}>0\Rightarrow f(x)>-1$，所以有 $-1<f(x)<0$，

所以 $f(x)$ 的值域是 $(-1,1)$，故①正确；

②：不妨设 $x_1>x_2$，由 $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0\Rightarrow f(x_1)-f(x_2)>0\Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$，

所以该函数是实数集上的增函数，

由①可知：该函数在 $x\geq 0$ 时，单调递增，且 $0\leq f(x)<1$，

当 $x<0$ 时，单调递增，且 $-1<f(x)<0$，所以该函数是实数集上的增函数，符合题意，故②正确；

③：当任意 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ 且 $x_1\neq x_2$ 时，

令 $x_1=1,x_2=3$，$\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}=\dfrac{f(1)+f(3)}{2}=\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{3}{4}}{2}=\dfrac{5}{8}$，

$f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)=f(2)=\dfrac{2}{3}$，显然 $\dfrac{5}{8}<\dfrac{2}{3}$，

因此 $\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}>f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)$ 不成立，故③不正确；

④：当 $x\geq 0$ 时，　$f(x)=\dfrac{x}{1+x}$，

$$f_1(x)=f(x)=\frac{x}{x+1},$$

$$f_2(x)=f(f_1(x))=\frac{\frac{x}{x+1}}{\frac{x}{x+1}+1}=\frac{x}{2x+1},$$

$$f_3(x)=f(f_2(x))=\frac{\frac{x}{2x+1}}{2\cdot\frac{x}{2x+1}+1}=\frac{x}{4x+1},$$

$$f_4(x)=f(f_3(x))=\frac{\frac{x}{4x+1}}{4\cdot\frac{x}{4x+1}+1}=\frac{x}{8x+1},$$

于是有 $f_n(x)=\dfrac{x}{2^{n-1}x+1}$，因此 $f_{10}\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{\frac{1}{2}}{2^9\times\frac{1}{2}+1}=\dfrac{1}{2^9+2}=\dfrac{1}{514}\neq\dfrac{1}{12}$，故④不正确，

故答案为：①②

【点睛】关键点睛：利用分式型函数的性质是解题的关键.

三、解答题（共 6 小题，共 85 分.解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.）

16. 【答案】（1） $f\left(x\right)=2\sin(2x-\frac{\pi}{6})$；

（2）$[2,+\infty)$.

【解析】

【分析】（1）化简 $f\left(x\right)=2\sin(2\omega x-\frac{\pi}{6})$，若选①，将点 $\left(\frac{\pi}{3},2\right)$ 代入求得 $\omega=1$，可得答案；选②，根据三角函数图象的平移变化规律可得 $\omega=1$，可得答案；选②，由函数的最小正周期可确定 $\omega=1$，可得答案；

（2）由 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 确定 $2x-\frac{\pi}{6}\in[-\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}]$，从而求得 $f\left(x\right)$ 的范围，根据不等式恒成立即可确定实数 m 的取值范围.

【小问 1 详解】

$f\left(x\right)=\sqrt{3}\sin2\omega x-\cos2\omega x=2\sin(2\omega x-\frac{\pi}{6})$；

选①：函数 $f\left(x\right)$ 的图象经过点 $\left(\frac{\pi}{3},2\right)$，则 $2\sin(2\omega\times\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6})=2$，

所以 $2\omega\times\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathrm{Z}$，则 $\omega=1+3k,k\in\mathrm{Z}$，

由 $0<\omega<2$，可得 $\omega=1$，则 $f\left(x\right)=2\sin(2x-\frac{\pi}{6})$；

选②：函数 $f\left(x\right)$ 的图象可由函数 $g\left(x\right)=2\sin2x$ 的图象平移得到，

即 $f\left(x\right)=2\sin(2\omega x-\frac{\pi}{6})$ 的图象可由函数 $g\left(x\right)=2\sin2x$ 的图象平移得到，

则 $\omega=1$，则 $f\left(x\right)=2\sin(2x-\frac{\pi}{6})$.

选③：函数 $f\left(x\right)$ 的图象相邻的两个对称中心之间的距离为 $\frac{\pi}{2}$，

则函数的最小正周期为 π，故 $2\omega=\frac{2\pi}{\pi}=2,\therefore\omega=1$，

故 $f\left(x\right)=2\sin(2x-\frac{\pi}{6})$.

【小问 2 详解】

当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 时，$2x-\frac{\pi}{6}\in[-\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}]$，则 $\sin(2x-\frac{\pi}{6})\in[-\frac{1}{2},1]$，

故 $f\left(x\right)=2\sin(2x-\frac{\pi}{6})\in[-1,2]$，

又当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 时，关于 x 的不等式 $f\left(x\right)\le m$ 恒成立，故 $m\ge2$，

即实数 m 的取值范围为 $[2,+\infty)$.

17. 【答案】(1) 证明见解析;

(2) $\dfrac{4}{5}$;

(3) $\dfrac{8\sqrt{5}}{5}$.

【解析】

【分析】(1) 先由线线垂直的判定定理证明 $AA_1\perp$ 平面 ABC，进而证明 $CC_1//AA_1$;

(2) 建系，利用空间向量计算线面角的正弦值即可;

(3) 将线面距转化为点面距，利用空间向量计算即可.

【小问 1 详解】

证明：$\because$ ABB_1A_1 为矩形,

$\therefore AA_1\perp AB$,

$\because CA\perp$ 平面 ABB_1A_1， $AA_1\subset$ 平面 ABB_1A_1,

$\therefore CA\perp AA_1$,

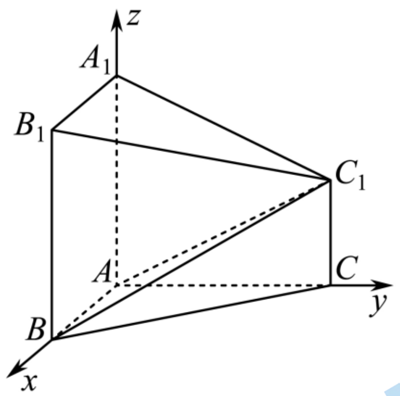
又 $AB\subset$ 平面 ABC， $AC\subset$ 平面 ABC， $AB\cap AC=A$,

$\therefore AA_1\perp$ 平面 ABC，又 $\because CC_1\perp$ 平面 ABC

$\therefore CC_1//AA_1$;

【小问 2 详解】

如图所示，以 A 为原点， AB,AC,AA_1 分别为 x 轴、 y 轴、 z 轴建系.



则 $A(0,0,0)$， $B(3,0,0)$， $C_1(0,4,2)$， $A_1(0,0,4)$,

所以 $\overrightarrow{A_1C_1}=(0,4,-2)$， $\overrightarrow{AB}=(3,0,0)$， $\overrightarrow{AC_1}=(0,4,2)$,

设平面 ABC_1 的一个法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$,

则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AC_1}=0\end{cases}$， 即 $\begin{cases}3x=0\\ 4y+2z=0\end{cases}$,

得 $x=0$，取 $y=-1$，则 $z=2$，

即 $\vec{n}=(0,-1,2)$，

设直线 A_1C_1 与平面 ABC_1 所成角为 α，

则 $\sin\alpha=\left|\cos\left\langle\overrightarrow{A_1C_1},\vec{n}\right\rangle\right|=\left|\dfrac{0\times0+4\times(-1)+(-2)\times2}{\sqrt{0^2+4^2+(-2)^2}\cdot\sqrt{0^2+(-1)^2+2^2}}\right|=\left|\dfrac{-8}{10}\right|=\dfrac{4}{5}$，

即直线 A_1C_1 与平面 ABC_1 所成角的正弦值 $\dfrac{4}{5}$；

【小问 3 详解】

因为 ABB_1A_1 为矩形，

所以 $AB//A_1B_1$，又 $AB\subset$ 平面 ABC_1，$A_1B_1\not\subset$ 平面 ABC_1，

所以 $A_1B_1//$ 平面 ABC_1，

直线 A_1B_1 到平面 ABC_1 的距离即为点 A_1 到平面 ABC_1 的距离

$d=\left|AA_1\right|\cdot\left|\cos\left\langle\overrightarrow{AA_1},\vec{n}\right\rangle\right|=4\times\dfrac{4\times2}{4\times\sqrt{5}}=\dfrac{8\sqrt{5}}{5}$

18. 【答案】（1）$\dfrac{1}{70}$

（2）分布列见解析，$E\left(X\right)=\dfrac{18}{7}$

（3）不愿意，理由见解析

【解析】

【分析】（1）根据古典概型的概率公式计算可得；

（2）依题意 X 的可能取值为 0、5、10，求出所对应的概率，列出分布列，即可求出数学期望；

（3）记随机变量 Y 为消费者在一次抽奖活动中的收益，则 $Y=X-3$，根据期望的性质求出 $E\left(Y\right)$，即可判断；

【小问 1 详解】

解：记“某位消费者在一次抽奖活动中抽到的 4 张卡片上都印有“幸”字”为事件 A，

则 $P\left(A\right)=\dfrac{1}{C_8^4}=\dfrac{1}{70}$，所以某位消费者在一次抽奖活动中抽到的 4 张卡片上都印有“幸”字的概率为 $\dfrac{1}{70}$；

【小问 2 详解】

解：依题意随机变量 X 的所有可能取值为 0、5、10；

则 $P\left(X=0\right)=\dfrac{C_4^2\cdot C_4^2}{C_8^4}=\dfrac{18}{35}$，

$P(X=5)=\dfrac{C_4^3\cdot C_4^1+C_4^3\cdot C_4^1}{C_8^4}=\dfrac{16}{35}$,

$P(X=10)=\dfrac{C_4^4\cdot C_4^0+C_4^0\cdot C_4^4}{C_8^4}=\dfrac{1}{35}$,

所以 X 的分布列为：

X	0	5	10
P	$\dfrac{18}{35}$	$\dfrac{16}{35}$	$\dfrac{1}{35}$

所以 $E(X)=10\times\dfrac{1}{35}+5\times\dfrac{16}{35}+0\times\dfrac{18}{35}=\dfrac{18}{7}$

【小问 3 详解】

解：记随机变量 Y 为消费者在一次抽奖活动中的收益，则 $Y=X-3$，

所以 $E(Y)=E(X-3)=E(X)-3=\dfrac{18}{7}-3=-\dfrac{3}{7}<0$，

所以我不愿意再次参加该项抽奖活动；

19. 【答案】（1） $y=1$

（2）答案详见解析

（3）$[-e,0]$中任一值均可

【解析】

【分析】（1）先求 $f(0)$，再通过求导求 $f'(0)$ 得到切线斜率，由点斜式写出切线方程即可；

（2）当 $m=0$ 时，直接求得 $f(x)$ 的单调性；当 $-1\le m<0$ 时，求出 $f'(x)$ 的两个变号零点，讨论两个零点的大小关系，求出相应的单调区间即可；

（3）由第（2）问讨论的单调性，分别求出 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的最小值，判断使其满足 $f(x)_{\min}\ge-2$ 时的 m 的取值集合，从中任取一值写出即可.

【小问 1 详解】

当 $m=0$ 时， $f(x)=e^x-x$， $f'(x)=e^x-1$，

则 $f(0)=1$， $f'(0)=0$，

所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程为 $y=1$.

【小问 2 详解】

若 $m=0$，则 $f'(x)=e^x-1$

令 $f'(x)=0$，得 $x=0$，

当 $x<0$ 时， $f'(x)<0$；当 $x>0$ 时， $f'(x)>0$.

即 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

若 $m<0$，则 $f'(x)=e^{x}-me^{-x}+m-1$

令 $f'(x)=0$，则 $e^{x}-me^{-x}+m-1=0$，

等价于 $e^{2x}+(m-1)e^{x}-m=0$，

即 $(e^{x}+m)(e^{x}-1)=0$，

得 $x_1=0, x_2=\ln(-m)$.

若 $x_1<x_2$，即 $m<-1$，

则 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 单调递增，在 $(0,\ln(-m))$ 单调递减，在 $(\ln(-m),+\infty)$ 单调递增.

若 $x_1=x_2$，即 $m=-1$，

则 $f(x)$ 在 R 上单调递增.

若 $x_1>x_2$，即 $-1<m<0$，

则 $f(x)$ 在 $(-\infty,\ln(-m))$ 单调递增，在 $(\ln(-m),0)$ 单调递减，在 $(0,+\infty)$ 单调递增.

综上所述：当 $m<-1$ 时，$f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 单调递增，在 $(0,\ln(-m))$ 单调递减，在 $(\ln(-m),+\infty)$ 单调递增；

当 $m=-1$ 时，$f(x)$ 在 R 上单调递增；

当 $-1<m<0$ 时，$f(x)$ 在 $(-\infty,\ln(-m))$ 单调递增，在 $(\ln(-m),0)$ 单调递减，在 $(0,+\infty)$ 单调递增；

当 $m=0$ 时，$f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

【小问 3 详解】

由（2）知，当 $-1\le m\le 0$ 时，$f(x)$ 均在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

此时 $f(x)>f(0)=1+m\ge 0$，故满足对任意的 $x\in(0,+\infty)$, $f(x)\ge -2$ 恒成立.

当 $m<-1$ 时，$f(x)$ 在 $(0,\ln(-m))$ 单调递减，在 $(\ln(-m),+\infty)$ 单调递增，

此时 $f(x)_{\min}=f(\ln(-m))=(m-1)\ln(-m)-m-1$，

令 $g(m)=(m-1)\ln(-m)-m-1$，

则 $g'(m)=\ln(-m)-\dfrac{1}{m}>0$，即 $g(m)$ 在 $(-\infty,-1)$ 单调递增.

又 $g(-e)=-e-1+e-1=-2$，

故当 $-e\le m<-1$ 时，都有 $g(m)\ge -2$，即 $f(x)_{\min}\ge -2$，

也即对任意的 $x\in(0,+\infty)$, $f(x)\ge -2$ 恒成立.

故 m 的取值集合为 $[-e,0]$.

写出 $[-e,0]$ 中任一值均可.

20. 【答案】(1) $t=3$, $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$

(2) 证明见解析.

【解析】

【分析】(1) 根据椭圆的焦点在x轴上，确定其a^2,b^2的值，计算出c^2，再代入离心率计算求解即可；

(2) 设点P坐标和直线L_1,L_2的方程，由于L_1,L_2垂直，且当斜率存在时，斜率可用同一参数k表示，根据L_1,L_2均与椭圆C相切，通过联立方程$\Delta=0$，分别得到m,n与k的关系式，再利用点P坐标表示m,n代入，最后消去k，即可得证，最后再检验一下斜率不存在的时候

【小问 1 详解】

因为椭圆焦点在x轴上，

所以$a^2=t+1$，$b^2=6-t$，则$c^2=a^2-b^2=2t-5$.

又因为$e=\frac{c}{a}=\sqrt{\frac{c^2}{a^2}}=\sqrt{\frac{2t-5}{t+1}}=\frac{1}{2}$，

所以$t=3$.

椭圆C的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

【小问 2 详解】

设$P(x_0,y_0)$，当直线L_1,L_2斜率存在时，设$L_1:y=kx+m$，$L_2:y=-\frac{1}{k}x+n$.

联立椭圆C与直线L_1的方程，

$\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1\\ y=kx+m\end{cases}$，整理得$(3+4k^2)x^2+8kmx+4m^2-12=0$.

由题可知，$\Delta=(8km)^2-4(3+4k^2)(4m^2-12)=0$，

化简得$m^2=4k^2+3$①.

同理，联立椭圆C与直线L_2的方程可得$n^2=\frac{4}{k^2}+3$②.

因为点P是直线L_1,L_2的交点，

所以有$y_0=kx_0+m$，$y_0=-\frac{1}{k}x_0+n$，

变形得$m=y_0-kx_0$，$n=y_0+\frac{x_0}{k}$，

分别代入①②两式得

$k^2x_0^2+y_0^2-2kx_0y_0=4k^2+1$③

$x_0^2+k^2y_0^2+2kx_0y_0=4+3k^2$④

③+④ 得 $(k^2+1)x_0^2+(k^2+1)y_0^2=7(k^2+1)$，

即 $x_0^2+y_0^2=7$.

故此时点 P 在圆 $x^2+y^2=7$ 上.

当直线 L_1 斜率不存在时，直线 L_2 斜率为 0.

此时直线 L_1 的方程为 $x=\pm 2$，直线 L_2 的方程为 $y=\pm\sqrt{3}$，

则点 P 的坐标为 $(2,\sqrt{3})$ 或 $(2,-\sqrt{3})$ 或 $(-2,\sqrt{3})$ 或 $(-2,-\sqrt{3})$，

均满足圆 $x^2+y^2=7$ 的方程.

综上：点 P 在圆 $x^2+y^2=7$ 上.

【点睛】方法点睛：求动点的轨迹方程，可设动点坐标，由动点所在直线方程入手，由已知条件通过联立方程得到参数间的关系，消去多余的未知参数，化简求得动点坐标满足的恒等式，并注意讨论直线斜率不存在的情况是否同样成立.

21. 【答案】（1） $t=\dfrac{\pi}{2}$

（2）证明见解析

【解析】

【分析】（1）根据题意可得当且仅当 $\sin t=1$ 时成立即可得 $t=\dfrac{\pi}{2}$；

（2）（ⅰ）设 $x_0<y_0$，根据区间端点的大小关系证明所有区间都包含 $\left[x_0,y_0\right]$ 即可；

（ⅱ）先分析可得 $n+1$ 个互不相同的集合的区间端点的大小关系，再设 $a_1<a_2<\ldots a_{n+1}$，再根据区间端点的最小距离为 l ，累加即可证明 $b_i-a_j\geq\dfrac{n-1}{n}\left(b_i-a_i\right)$

【小问 1 详解】

由 $0<t<\pi$ 可得 $0<\sin t\leq 1$，又 I_1， I_2 为聚合区间，由定义可得 $I_1\cap I_2\neq\varnothing$，故当且仅当 $\sin t=1$ 时成立，故 $t=\dfrac{\pi}{2}$

【小问 2 详解】

（ⅰ）由 x_0， y_0 是该聚合区间的两个不同的聚合点，不妨设 $x_0<y_0$，因为 $x_0\in I_i\left(i=1,2,\ldots,n+1\right)$，故 $a_1,a_2\ldots a_{n+1}\leq x_0$，又 $y_0\in I_i\left(i=1,2,\ldots,n+1\right)$，故 $y_0\leq b_1,b_2\ldots b_{n+1}$，不妨设 $a_1,a_2\ldots a_{n+1}$ 中的最大值为 a_k， $b_1,b_2\ldots b_{n+1}$ 中最小值为 b_j，则 $a_1,a_2\ldots a_{n+1}\leq a_k\leq x_0<y_0\leq b_j\leq b_1,b_2\ldots b_{n+1}$，即 $a_1,a_2\ldots a_{n+1}\leq a_k<b_j\leq b_1,b_2\ldots b_{n+1}$，故存在区间 $\left[a_k,b_j\right]\subseteq I_i\left(i=1,2,\ldots,n+1\right)$

（ii）若存在 $a_s = a_t\left(s \neq t\right)$，则 $I_s \subseteq I_t$ 或 $I_t \subseteq I_s$，与已知条件矛盾

不妨设 $a_1 < a_2 < \ldots a_{n+1}$，则 $b_k < b_{k+1}\left(k = 1, 2, \ldots n\right)$

否则，若 $b_k \geq b_{k+1}$，则 $I_{k+1} \subseteq I_k$，与已知条件矛盾

取 $l = \min\left\{a_2 - a_1, a_3 - a_2 \ldots a_{n+1} - a_n, b_2 - b_1, b_3 - b_2 \ldots b_{n+1} - b_n\right\}$，设 $m \in \{1,2,\cdots,\ n+1\}$

当 $a_{m+1} - a_m = l$ 时，$b_m - b_1 = \left(b_m - b_{m-1}\right) + \ldots\left(b_2 - b_1\right) \geq \left(m-1\right)l$，

$a_{n+1} - a_m = \left(a_{n+1} - a_n\right) + \ldots\left(a_{m+1} - a_m\right) \geq \left(n - m + 1\right)l$

又 $b_1 > a_{n+1}$，所以 $a_{n+1} - b_1 < 0$，所以 $b_m - a_m \geq \left(b_m - b_1\right) + \left(a_{n+1} - a_m\right) \geq nl$，

即 $a_{m+1} - a_m \leq \dfrac{b_m - a_m}{n}$，所以 $b_m - a_{m+1} = b_m - a_m - \left(a_{m+1} - a_m\right) \geq \dfrac{n-1}{n}\left(b_m - a_m\right)$，

此时取 $i = m, j = m+1$，则 $b_i - a_j \geq \dfrac{n-1}{n}\left(b_i - a_i\right)$，

当 $b_{m+1} - b_m = l$ 时，同理可取 $i = m+1, j = m$，使得 $b_i - a_j \geq \dfrac{n-1}{n}\left(b_i - a_i\right)$，

综上，存在不同的 i，$j \in \{1,2,\cdots,\ n+1\}$，使得 $b_i - a_j \geq \dfrac{n-1}{n}\left(b_i - a_i\right)$

【点睛】本题主要考查了新定义的集合类证明，可根据题意先画数轴分析题目中区间的关系，再凑出所需证明的不等式即可, 属于难题

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。