2024 新高考数学一模练习卷（一）

数学 试卷

本卷共 6 页，满分 150 分，完成时间 120 分钟.

考生注意事项：

1. 答卷开始前，考生务必将自己的姓名，准考证号正确填涂于答题卡的指定区域；并检查试卷与答题卡的张数与印刷情况.
2. 在回答选择题时，每小题选出答案后，用 2B 铅笔在答题卡对应标号上将选项涂黑；若需改动，用橡皮擦干净后，再将改动后的选项标号涂黑.
3. 在回答非选择题时，用黑色字迹的签字笔或钢笔在答题卡的指定区域上填写答案；若需改动，将原答案划掉，再填上改动后的答案，改动后的答案也不得超出指定的答题区域.
4. 答卷结束后，将本试卷和答题卡一并交回.

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 集合 $A=\{x|x^2-4x+3<0\}$，$B=\{x|y=\ln(x-1)\}$，则 $C_BA=$（ * ）.

（A）$\{x|x\geq 1\}$　　（B）$\{x|x\geq 3\}$

（C）$\{x|1\leq x\leq 3\}$　　（D）$\{x|x\leq 3\}$

2. 在复平面中，点 Z_1 对应的复数为 z，点 Z_2 对应的复数为 $\bar{z}$，若 $|Z_1|=|Z_1Z_2|=2$，则 $\overrightarrow{OZ_1}\cdot\overrightarrow{OZ_2}=$（ * ）.

（A）-5　　（B）-4

（C）4　　（D）5

3. 已知事件 A，B，C 相互独立，且 $P(A),P(B),P(C)\in(0,1)$，则在以下说法中，错误的是（ * ）.

（A）事件 A，B，C 均为随机事件

（B）事件 A，B，C 均与必然事件 M 相互独立

（C）事件 A，B，C 均与不可能事件 N 不互斥

（D）事件 A，B，C 均与事件 $A\cap B\cap C$ 对立

4. 记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，若 $a_1=1$，$S_n=2a_n+a_{n+1}$，则在 $a_1\sim a_{2024}$ 中，整数的个数是（　*　）.

（A）1012　　（B）1011

（C）2024　　（D）2023

5. 中国是瓷器的故乡．“瓷器”一词最早见之于许慎的《说文解字》中．某瓷器如图 1 所示，该瓶器可以近似看作由上半部分圆柱和下半部分两个等高（高为 6cm）的圆台组合而成，其直观图如图 2 所示，已知圆柱的高为 20cm，底面直径 $AB=10\text{cm}$，底面直径 $CD=20\text{cm}$，$EF=16\text{cm}$，若忽略该瓷器的厚度，则该瓷器的容积为（　*　）.

图 1

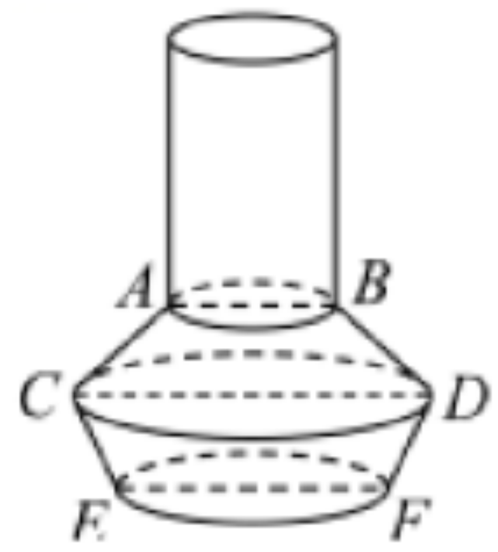


图 2

（A）$669\pi\ \text{cm}^3$　　（B）$1338\pi\ \text{cm}^3$

（C）$650\pi\ \text{cm}^3$　　（D）$1300\pi\ \text{cm}^3$

6. 已知椭圆 $\Gamma:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 过点 $\left(\frac{3}{2}\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$，则下列直线方程不与 Γ 相切的是（　*　）.

（A）$3\sqrt{3}x+4y-16=0$　　（B）$3x+4y+12=0$

（C）$4x+6y-17=0$　　（D）$x-4y-10=0$

7. 已知函数 $f(x)=2\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)$ 在区间 $(0,\pi)$ 上有 ω 个极值点（$\omega\in N^*$），则 ω 的最小值是（　*　）.

（A）1　　（B）2

（C）3　　（D）4

8. 已知 $a=1+\sin\frac{1}{10}$，$b=\sqrt[10]{e}$，$c=1.01^{10}$，$d=\frac{17}{16}$，则（　*　）.

（A）$b>a>d>c$　　（B）$b>c>a>d$

（C）$b>a>c>d$　　（D）$b>c>d>a$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分．

9. 2023 年我国的生育率仅为每千人 6.2 人，再创新低，引发了社会广泛的关注和讨论．某课外小组就“您是否愿意生育孩子？”为问题对某某高校同学随机进行了采访，以下为其采访记录表：

您是否愿意生育孩子		
	愿意 $(X=1)$	不愿意 $(X=0)$
男同学	40	60
女同学	60	40

考虑到由于大学生的心智发展不成熟，不能完全代表当代年轻人，于是其又对年龄为 25 至 30 周岁的市民进行了采访调查，以下为其采访记录表：

您是否愿意生育孩子		
	愿意 $(X=1)$	不愿意 $(X=0)$
男士	60	40
女士	70	30

则（　*　）．

（A）该两次的调查结果均服从两点分布，属于 200 重伯努利试验

（B）高校大学生愿意生育孩子的期望为 0.5，25 至 30 周岁的为 0.65

（C）通过下表的小概率值 $\alpha=0.005$ 的独立性检验，是否愿意生育孩子与年龄有关

（D）通过下表的小概率值 $\alpha=0.005$ 的独立性检验，是否愿意生育孩子与性别有关

注：

$$\chi^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}，其中 n=a+b+c+d$$

α	0.1	0.05	0.01	0.005	0.001
x_α	2.706	3.841	6.635	7.897	10.828

10. 由两个全等的正四棱台组合而得到的几何体 1 如图 3，沿着 BB_1 和 DD_1 分别作上底面的垂面，垂面经过棱 EP，PH，HQ，QE 的中点 F，G，M，N，则两个垂面之间的几何体 2 如图 4 所示，若 $EN=AB=EA=2$，则（　*　）．

（A）$BB_1=2\sqrt{2}$　　（B）$FG//AC$

（C）$BD\perp$ 平面 BFB_1G　　（D）几何体 2 的表面积为 $16\sqrt{3}+8$

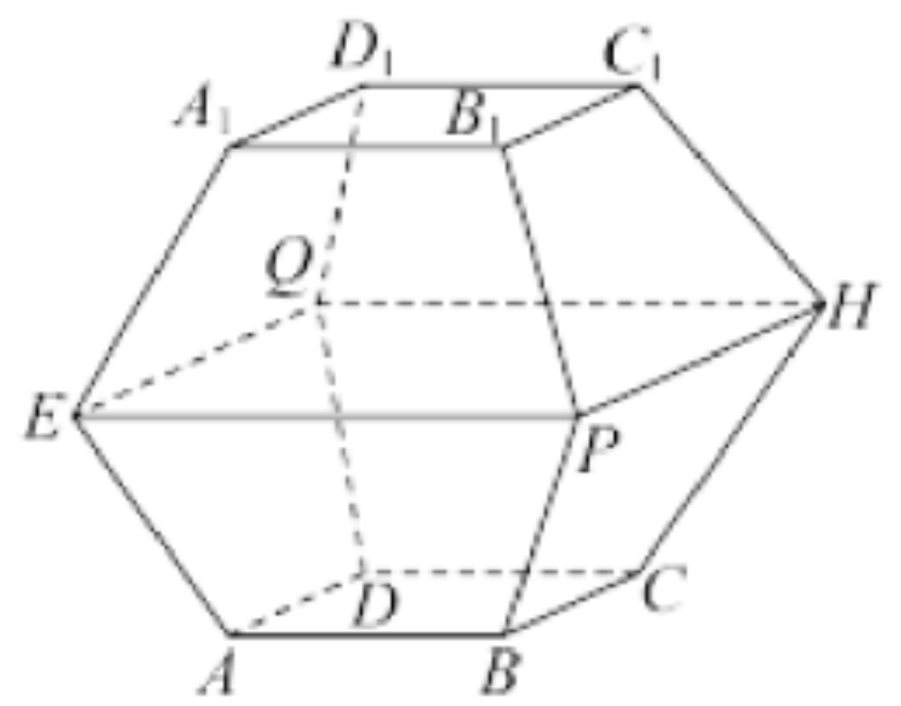


图 3

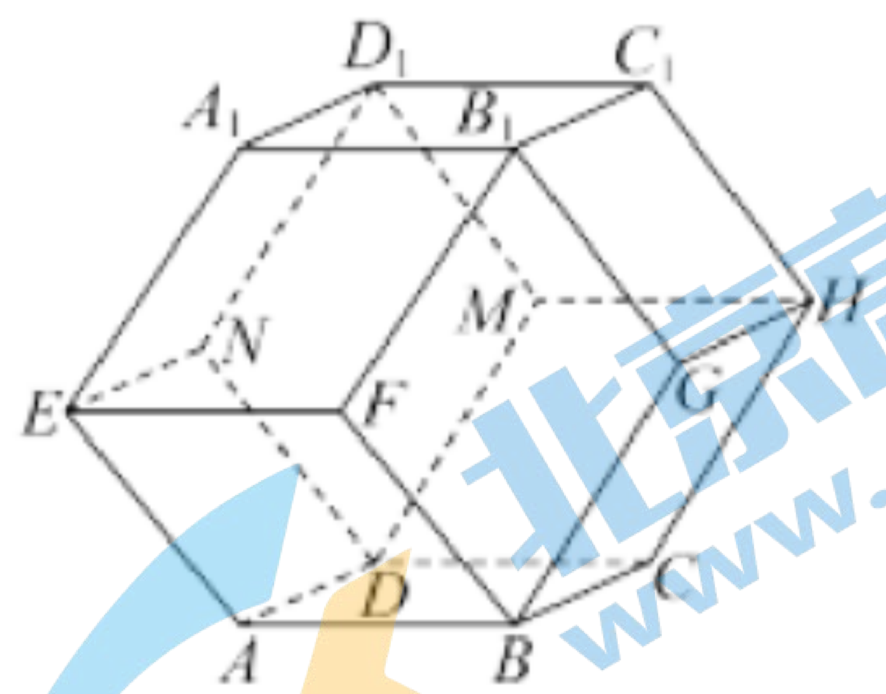


图 4

11. 已知椭圆 $E:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，过椭圆 E 的左焦点 F_1 的直线 l_1 交椭圆 E 于 A、B 两点，过椭圆 E 的左焦点 F_2 的直线 l_2 交椭圆 E 于 C、D 两点，则（ * ）.

（A）若 $\overrightarrow{AF_1}=2\overrightarrow{F_1B}$，则 l_1 的斜率 $k=\frac{\sqrt{6}}{2}$

（B）$|AF_1|+4|BF_1|$ 的最小值为 $\frac{27}{4}$

（C）以 AF_1 为直径的圆与圆 $x^2+y^2=4$ 相切

（D）若 $l_1\perp l_2$，则四边形 $ABCD$ 面积的取值范围为 $\left[\frac{288}{49},6\right]$

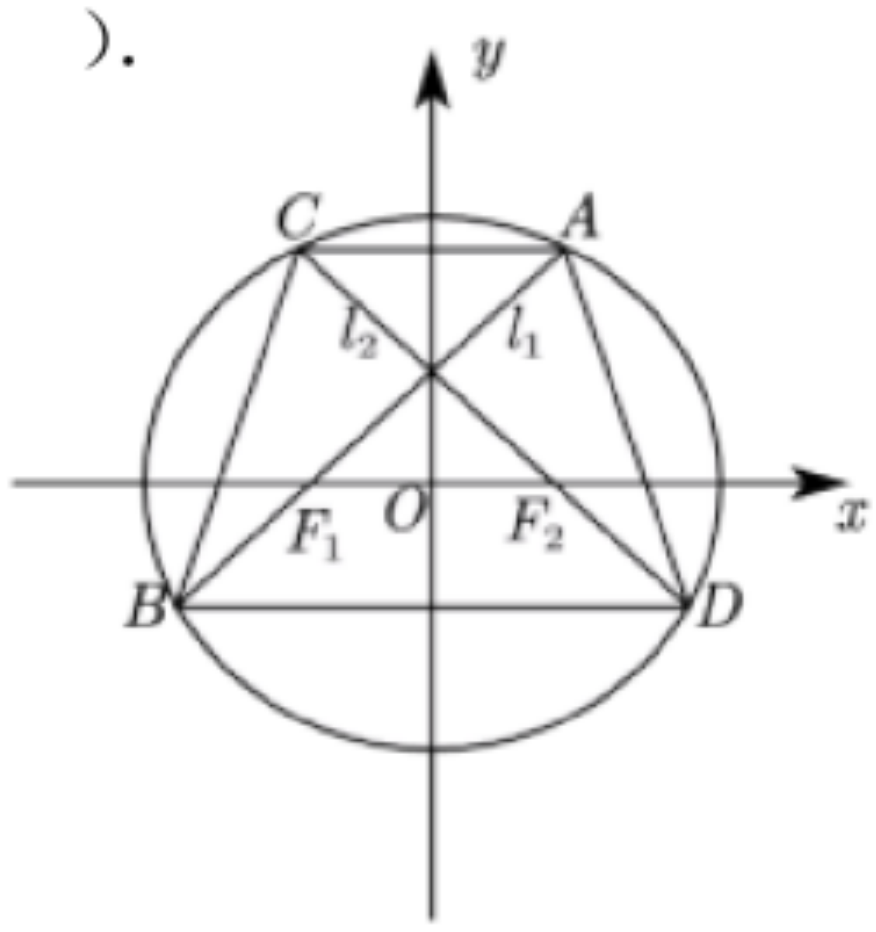


图 5

12. 已知正实数 m，n，q 满足：$\begin{cases}2^m+3^n=6^q\\ 2^m\cdot 3^n=5^q\end{cases}$，则（ * ）.

（A）$\ln 2<q<1$

（B）$0<mn<\frac{1}{2}$

（C）$\sqrt{2}<\frac{m+n}{q}<\sqrt{6}$

（D）$\frac{\ln 5}{\ln 6}<m^2+n^2<\ln 5+\ln 6$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 在 $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{x}\right)^4$ 的展开式中，$\sqrt{x}$ 的系数是________.（用数字作答）

14. 函数 $f(x)=\sin|x|+|\cos x|, x\in(0,2\pi)$ 的极值点个数为________.

15. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}(x+1)^2, x\le 0\\ \ln x, x>0\end{cases}$，若方程 $f(x)=m$ 有三个不同的实根 a，b，c，则 $S=|af(a)+bf(b)+cf(c)|$ 的取值范围是__________.

16. 若实数 a，b 满足 $a^2+b^2\le 6a$，则 $(2a+b)(2b-a+3)\le 0$ 的概率为__________.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17.（10 分）已知在 $\triangle ABC$ 中，角 A、B、C 所对的边分别为 a，b，c．且有 $\tan A+\tan B-\sqrt{3}\tan A\tan B=-\sqrt{3}$．

（1）求 $\sin C$；

（2）若 $c=2$，记 AB 的中点为 M，求 CM 的取值范围．

18.（12 分）在阅读完（选择性必修 第三册）课本第 53 页《贝叶斯公式与人工智能》后，小李同学决定做一个相关的概率试验，试验过程如下：

小李同学找来了小王同学；

小李同学制作了三张标号，分别为 1，2，3 的相同规格纸片；

每轮开始前，小李同学心里默想 1，2，3 中的一个随机数字；

小王同学先选定一张纸片，小李同学将剩余 2 张纸片中挑走 1 张不与自己默想数字相同标号的纸片；

小王同学再进行一次选择；

小王同学选定最终结果后，若其选择的纸片标号与小李默想的一致，就记录一次 1 分，否则记录一次 0 分；

重复进行多轮试验．

（1）为了尽可能多计分，如果你是小王同学，第二轮选择时你会怎样选？说明理由；

（2）在（1）的情境下，求进行 2 轮试验总计分的数学期望 $E(X_2)$；

19.（12 分）记数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，已知 $S_n=na_{n+1}-n^2-n$．

（1）证明：$\{a_n\}$ 是等差数列；

（2）若 $a_1=\frac{4}{3}$，证明：$\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\frac{1}{S_3}+\cdots+\frac{1}{S_n}<\frac{27}{20}$．

20.（12 分）如图 6，在四棱柱 $ABCD-A'B'C'D'$ 中，底面 $ABCD$ 和侧面 $BB'C'C$ 均为正方形，$AB=2$．连接 $B'D$，点 E、F 分别为 $B'D$、$C'D'$ 的中点．

（1）求 $A'F$ 和 $C'E$ 夹角的正弦值；

（2）求平面 $A'BF$ 和平面 $CC'E$ 的夹角．

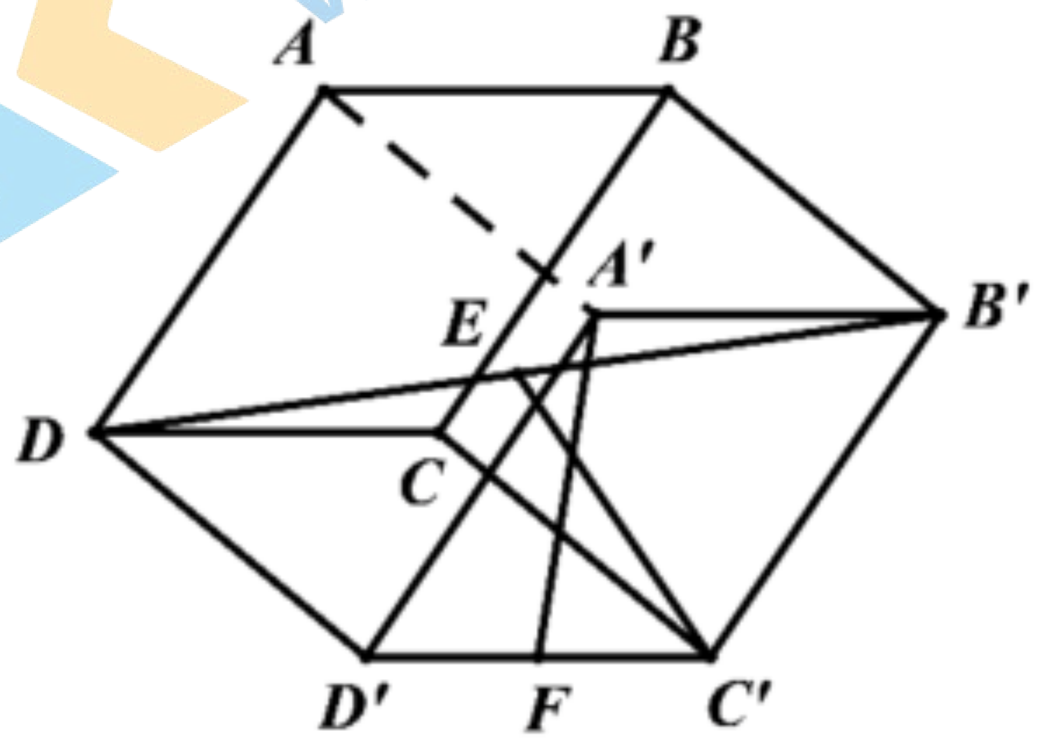


图 6

21.（12 分）如图 7，已知 O 为坐标原点，抛物线的方程为 $x^2=2py(p>0)$，F 是抛物线的焦点，椭圆的方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，过 F 的直线 l 与抛物线交于 M，N 两点，反向延长 OM，ON 分别与椭圆交于 P，Q 两点．

（1）求 k_{OM}、k_{ON} 的值；

（2）若 $|OP|^2+|OQ|^2=5$ 恒成立，求椭圆的方程；

（3）在（2）的条件下，若 $\frac{S_{\triangle OMN}}{S_{\triangle OPQ}}$ 的最小值为 1，求抛物线的方程．（其中 $S_{\triangle OMN}$，$S_{\triangle OPQ}$ 分别是 $\triangle OMN$ 和 $\triangle OPQ$ 的面积）

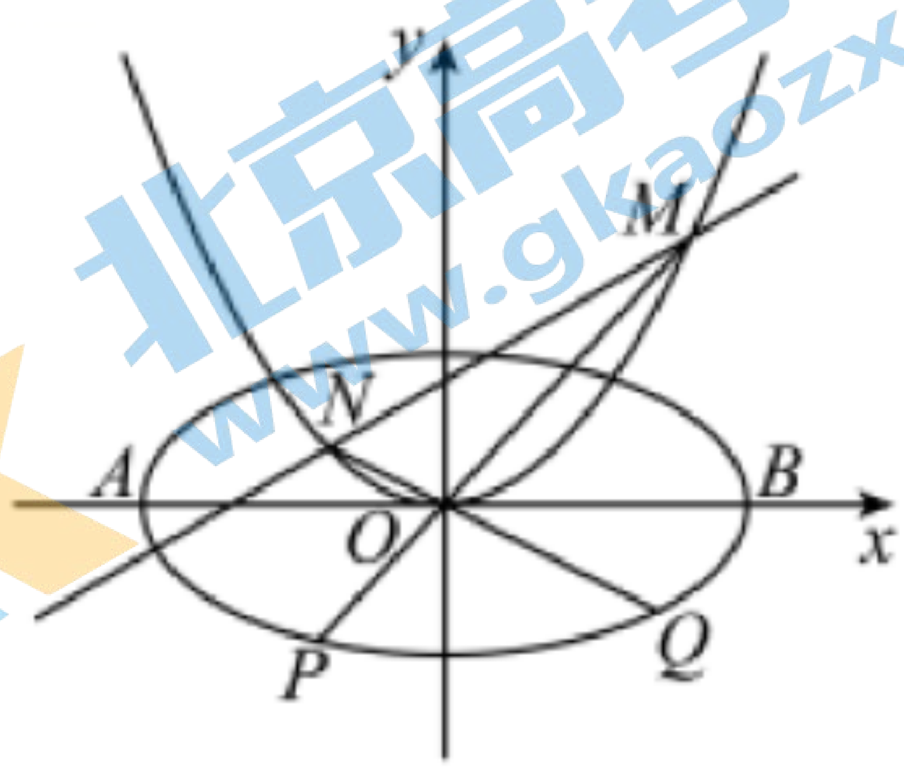


图 7

22.（12 分）已知函数 $f(x)=a\ln x-x+\ln a-1$，$g(x)=\frac{ax^a}{e^{x+1}}-1$．（其中 $a>0$）

（1）若 $\exists x_0>0$，$f(x_0)\geq e^2+1$，求 a 的取值范围；

（2）若 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 有且仅有一个交点，求实数 a 的值．

2024 年广东省新高考数学一模练习卷（一）

数学 参考答案

一、选择题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	B	D	D	A	B	C	A	B

二、选择题

题号	9	10	11	12
答案	BCD	ABC	BCD	ABC

三、填空题

题号	13	14	15	16
答案	4	4	$[0, e-2]$	$\frac{1}{2}$

四、解答题

17.（1）

由题 $\tan A+\tan B-\sqrt{3}\tan A\tan B=-\sqrt{3}\ \Rightarrow \tan A+\tan B=-\sqrt{3}(1-\tan A\tan B)$

$\Rightarrow \dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=-\sqrt{3}\ \Rightarrow \tan(A+B)=-\sqrt{3}\ \Rightarrow \tan C=-\tan(A+B)=\sqrt{3}\ \Rightarrow C=\dfrac{\pi}{3}$

所以 $\sin C=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

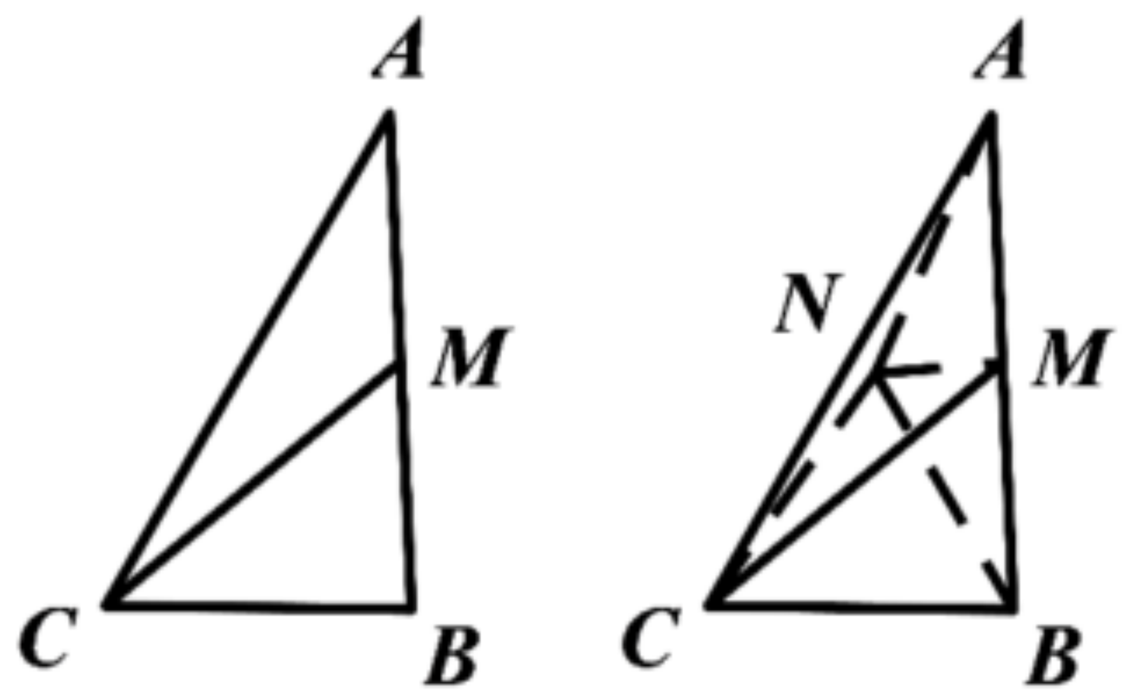
（2）

如图所示，构造 $\triangle ABC$ 的外心 N，连接 AN，BN，CN，MN

由题得 $AM=BM=1$，$AN=CN=BN=R=\frac{2c}{\sin C}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，$MN=\frac{1}{2}AN=\frac{\sqrt{3}}{3}$

由三角形三边关系得 $CN-MN\le CM\le CN+MN$，

即 $\frac{\sqrt{3}}{3}\le CM\le\sqrt{3}$，故 $CM\in\left[\frac{\sqrt{3}}{3},\sqrt{3}\right]$.



18.（1）记事件 A_1 为“第二次选择时不换纸片”，A_2 为“第二次选择时换纸片”，B_1 为“记 1 分”，B_2 为“记 0 分”，由贝叶斯公式得：

$$P(B_1|A_1)=\frac{P(B_1)P(A_1|B_1)}{P(A_1)}=\frac{P(B_1)P(A_1|B_1)}{P(B_1)P(A_1|B_1)+P(B_2)P(A_1|B_2)}=\frac{1}{3}$$

$$P(B_1|A_2)=1-P(B_1|A_1)=\frac{2}{3}>P(B_1|A_1)$$

所以如果我是小王同学，我会选择换纸片

（2）记 2 轮的总得分为 X，结合（1）得 X 的分布列为

$$P(X=0)=\frac{1}{9},\ P(X=1)=\frac{4}{9},\ P(X=2)=\frac{4}{9}$$

用表格表示 X 的分布列，如下表所示：

X	0	1	2
P	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$

$$E(X_2)=0\times\frac{1}{9}+1\times\frac{4}{9}+2\times\frac{4}{9}=\frac{4}{3}$$

故进行 2 轮试验总计分的数学期望 $E(X_2)$ 为 $\frac{4}{3}$

19.（1）

由题意 $S_n=na_{n+1}-n^2-n$，$S_n+a_{n+1}=S_{n+1}=(n+1)a_{n+1}-n^2-n$

$=(n+1)(a_{n+1}-n)=(n+1)a_{n+2}-(n+1)^2-(n+1)=(n+1)(a_{n+2}-n-2)$，

所以 $a_{n+1}-n=a_{n+2}-n-2$，即 $a_{n+2}=a_{n+1}+2$，所以 $\{a_n\}$ 是以 2 为公差的等差数列

（2）

由（1）及题意得等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和

$$S_n=\frac{n}{2}(a_1+a_n)=\frac{n}{2}\left(\frac{2}{3}+2n\right)=n\left(n+\frac{1}{3}\right)$$

$$\frac{1}{S_n}=\frac{1}{n\left(n+\frac{1}{3}\right)}=\frac{3}{n(3n+1)}$$

$$\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\cdots+\frac{1}{S_n}=3\left(\frac{1}{1\times4}+\frac{1}{2\times7}+\cdots+\frac{1}{n\times(3n+1)}\right)$$

即证 $\frac{3}{3\times4}+\frac{3}{6\times7}+\cdots+\frac{3}{3n\times(3n+1)}<\frac{9}{20}$

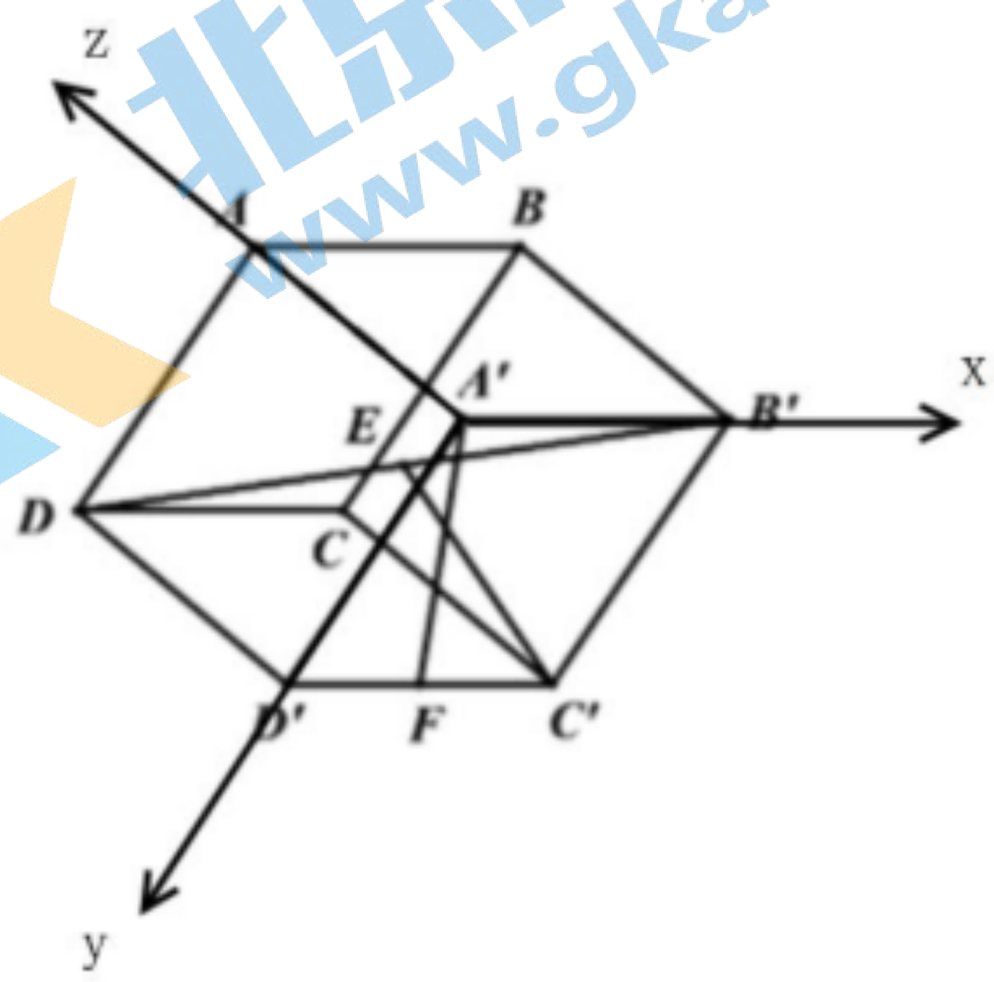
易知 $(3n-1)(3n+2)<3n(3n+1)$

则 $\frac{3}{3n(3n+1)}<\frac{3}{(3n-1)(3n+2)}$

$$\frac{3}{3\times4}+\frac{3}{6\times7}+\cdots+\frac{3}{3n\times(3n+1)}<\frac{1}{4}+\left(\frac{3}{5\times8}+\cdots+\frac{3}{(3n-1)\times(3n+2)}\right)$$

$$=\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{8}+\frac{1}{8}-\frac{1}{11}+\cdots+\frac{1}{3n-1}-\frac{1}{3n+2}\right)<\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=\frac{9}{20}$$

原题得证，证毕



20.（1）

如图，以 A' 为坐标原点，$A'B'$ 为 x 轴，$A'D'$ 为 y 轴，$A'A$ 为 z 轴，建立空间直角坐标系

则 $A(0,0,2)$，$B(2,0,2)$，$C(2,-2,2)$，$D(0,-2,2)$，$B'(2,0,0)$，$C'(2,-2,0)$，$D'(0,-2,0)$，$E(1,-1,1)$，$F(1,-2,0)$

则 $\overrightarrow{A'F}=(1,-2,0)$，$\overrightarrow{C'E}=(-1,1,1)$，

$$\cos<\overrightarrow{A'F},\overrightarrow{C'E}>=\frac{\overrightarrow{A'F}\cdot\overrightarrow{C'E}}{|\overrightarrow{A'F}|\times|\overrightarrow{C'E}|}=\frac{-3}{\sqrt{15}}=-\frac{\sqrt{15}}{5}$$

$$\sin<\overrightarrow{A'F},\overrightarrow{C'E}>=\sqrt{1-\cos^2<\overrightarrow{A'F},\overrightarrow{C'E}>}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

（2）

设 θ 为平面 $A'BF$ 和平面 $CC'E$ 的夹角

由（1）得 $\overrightarrow{A'B}=(2,0,2)$，$\overrightarrow{A'F}=(1,-2,0)$，设平面 $A'BF$ 的法向量 $\overrightarrow{n_1}=(x_1,y_1,z_1)$，则有

$\begin{cases}2x_1+2z_1=0\\x_1-2y_1=0\end{cases}$，令 $x_1=2$ 得 $\begin{cases}y_1=1\\z_1=-2\end{cases}$，所以 $\overrightarrow{n_1}=(2,1,-2)$；

$\overrightarrow{C'C}=(0,0,2)$，$\overrightarrow{C'E}=(-1,1,1)$，设平面 $C'CE$ 的法向量 $\overrightarrow{n_2}=(x_2,y_2,z_2)$，则有

$\begin{cases}2z_2=0\\-x_2+y_2+z_2=0\end{cases}$，令 $x_1=1$ 得 $\begin{cases}y_2=1\\z_2=0\end{cases}$，所以 $\overrightarrow{n_2}=(1,1,0)$；

$$\cos\theta=\cos<\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}>=\frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}|\times|\overrightarrow{n_2}|}=\frac{3}{3\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

又因为 $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $\theta=\frac{\pi}{4}$，

故平面 $A'BF$ 和平面 $CC'E$ 的夹角为 $\frac{\pi}{4}$

21.（1）

设直线 OM 的斜率为 $k_1(k_1>0)$，直线 ON 的斜率为 k_2，由题可知，直线 MN 的斜率不为 0，设 $M(x_1,\ y_1)$，$N(x_2,\ y_2)$，

设直线 MN: $y=kx+\frac{p}{2}$，则由 $\begin{cases}y=kx+\frac{p}{2}\\x^2=2py\end{cases}$，可得 $x^2-2pkx-p^2=0$，

易知 $\Delta > 0$，由韦达定理得 $x_1x_2 = -p^2, y_1y_2 = \frac{(x_1x_2)^2}{4p^2} = \frac{p^2}{4}$，则 $k_1k_2 = \frac{y_1}{x_1}\cdot\frac{y_2}{x_2} = -\frac{1}{4}$；

（2）

设 $P(x_3, y_3)$，$Q(x_4, y_4)$，

由题可知，l_{OM}: $y = k_1x$，$l_{ON}: y = k_2x$，其中$k_1k_2 = -\frac{1}{4}$，

联立方程$\begin{cases} y = k_1x \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases} \Rightarrow x_3^2 = \frac{a^2b^2}{b^2+a^2k_1^2}$，同理 $x_4^2 = \frac{16a^2b^2k_1^2}{a^2+16b^2k_1^2}$，

因为：$|OP|^2 + |OQ|^2 = x_3^2 + y_3^2 + x_4^2 + y_4^2 = x_3^2 + \left(1 - \frac{x_3^2}{a^2}\right)b^2 + x_4^2 + \left(1 - \frac{x_4^2}{a^2}\right)b^2$

$$= 2b^2 + \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)(x_3^2 + x_4^2)$$

$$= 2b^2 + \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2}\right)\left(\frac{a^2b^2}{b^2 + a^2k_1^2} + \frac{16a^2b^2k_1^2}{a^2 + 16b^2k_1^2}\right)$$

$$= 2b^2 + \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2}\right)\cdot a^2 \cdot \frac{a^2b^2 + (32b^4)k_1^2 + 16a^2b^2k_1^4}{a^2b^2 + (a^4 + 16b^4)k_1^2 + 16a^2b^2k_1^4}$$

$= 2b^2 + (a^2 - b^2)\frac{a^2b^2+(32b^4)k_1^2+16a^2b^2k_1^4}{a^2b^2+(a^4+16b^4)k_1^2+16a^2b^2k_1^4}$.

因为 $|OP|^2 + |OQ|^2 = 5$ 为定值，所以上式与 k_1 无关，

所以当 $32b^4 = a^4 + 16b^4$，即 $a^2 = 4b^2$ 时，此时 $a^2 + b^2 = 5$，所以 $a^2 = 4$，$b^2 = 1$，

所以椭圆的方程为$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

（3）因为 $\frac{S_{\triangle OMN}}{S_{\triangle OPQ}} = \frac{\frac{1}{2}|OM||ON|\sin\angle MON}{\frac{1}{2}|OP||OQ|\sin\angle POQ} = \frac{|OM||ON|}{|OP||OQ|} = \left|\frac{x_1x_2}{x_3x_4}\right|$，

由（2）可知，当$a^2 = 4$，$b^2 = 1$时，$x_3^2 = \frac{4}{1+4k_1^2}$，$x_4^2 = \frac{16k_1^2}{1+4k_1^2}$，$x_1x_2 = -p^2$，

$$\frac{S_{\triangle OMN}}{S_{\triangle OPQ}} = \left|\frac{x_1x_2}{x_3x_4}\right| = \frac{p^2}{\frac{8|k_1|}{1+4k_1^2}} = \frac{p^2}{8}\left(\frac{1}{|k_1|} + 4|k_1|\right) \geq \frac{p^2}{2},$$

故$\frac{p^2}{2} = 1 \Rightarrow p = \sqrt{2}$，当且仅当$k_1 = \pm\frac{1}{2}$时，等号成立，此时抛物线方程为$x^2 = 2\sqrt{2}y$.

22.（1）

$f(x) = a\ln x - x + \ln a - 1, x \in R^+$，$f'(x) = \frac{a}{x} - 1 = \frac{a-x}{x}$，令 $f'(x) = 0$ 得 $x = a$

当 $0 < x < a$ 时，$f'(x) > 0$，$f(x)\uparrow$；当 $x > a$ 时，$f'(x) < 0$，$f(x)\downarrow$.

所以 $f(x)_{\max} = f(a) = a\ln a - a + \ln a - 1 = (a+1)(\ln a - 1)$.

令 $h(a) = (a+1)(\ln a - 1)$，$h'(a) = \ln a + \frac{1}{a} = \frac{a\ln a+1}{a}$，

再令 $\varphi(a)=a\ln a+1$，$\varphi'(a)=1+\ln a$，令 $\varphi'(a)=0$ 得 $a=\frac{1}{e}$

当 $0<a<\frac{1}{e}$ 时，$\varphi'(a)<0$，$\varphi(a)\downarrow$；当 $a>\frac{1}{e}$ 时，$\varphi'(a)>0$，$\varphi(a)\uparrow$.

所以 $\varphi(a)_{\min}=\varphi\left(\frac{1}{e}\right)=1-\frac{1}{e}>0$，即 $\varphi(a)>0$，即 $h'(a)>0$，所以 $h(a)\uparrow$，

原题“$\exists x_0>0$，$f(x_0)\geq e^2+1$”等价于“$f(a)\geq e^2+1$”，

即 $(a+1)(\ln a-1)=h(a)\geq e^2+1$，观察到 $h(e^2)=e^2+1$，又由 $h(a)\uparrow$ 得：

当 $0<a<e^2$ 时，$h(a)<h(e^2)=e^2+1$；当 $a\geq e^2$ 时，$h(a)\geq h(e^2)=e^2+1$

所以 $a\geq e^2$，即 a 的取值范围为 $[e^2,+\infty)$.

（2）

令 $t=f(x)=a\ln x-x+\ln a-1$，则 $e^t=e^{a\ln x-x+\ln a-1}=e^{(\ln a+\ln x^a)-(x+1)}=\frac{ax^a}{e^{x+1}}$

所以 $g(x)=\frac{ax^a}{e^{x+1}}-1=e^t-1$，联立 $f(x)=g(x)$，即 $t=e^t-1$.

令 $\Phi(t)=e^t-1-t$，所以方程“$t=e^t-1$”的解等价于 $\Phi(t)$ 的零点.

$\Phi'(t)=e^t-1$，令 $\Phi'(t)=0$ 得 $t=0$，

当 $t<0$ 时，$\Phi'(t)<0$，$\Phi(t)\downarrow$；当 $t>0$ 时，$\Phi'(t)>0$，$\Phi(t)\uparrow$.

所以 $\Phi(t)_{\min}=\Phi(0)=0$，所以方程“$t=e^t-1$”的解仅为 $t=0$，

再由题意，$t=f(x)=0$ 有且仅有一根，即 $f(x)$ 仅有唯一零点.

$f(x)=a\ln x-x+\ln a-1$，$f'(x)=\frac{a}{x}-1=\frac{a-x}{x}$，令 $f'(x)=0$ 得 $x=a$

当 $0<x<a$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)\uparrow$；当 $x>a$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)\downarrow$.

所以 $f(x)_{\max}=f(a)=a\ln a-a+\ln a-1=(a+1)(\ln a-1)$.

又注意到当 $x\to 0$ 时，$f(x)-\infty$；当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)-\infty$；

所以 $f(x)$ 的唯一零点即其极值点，即 $(a+1)(\ln a-1)=0$，得 $a=-1$（舍）或 $a=e$.

故 a 的值为 e.