第37届全国中学生物理竞赛复赛试题

（2020 年 9 月 19 日上午 9:00-12:00）

考生必读

1、 考生考试前请务必认真阅读本须知。
2、 本试题共 5 页，总分为 320 分。
3、 如遇试题印刷不清楚情况，请务必向监考老师提出。
4、 需要阅卷老师评阅的内容一定要写在答题纸相应题号后面的空白处；阅卷老师只评阅答题纸上的内容；写在试题纸和草稿纸上的解答一律不被评阅。

一、(40 分) 高铁运行的平稳性与列车的振动程度密切相关，列车上安装的空气弹簧可以有效减振。某高铁测试实验采用的空气弹簧模型由主气室（气囊）和附加气室（容积不变）构成，如图 1a 所示。空气弹簧对簧上负载竖直向上的作用力由气囊内被压缩的空气产生的弹力提供。簧上负载处于平衡状态时，主气室内气体的压强和体积分别为 p_{10} 和 V_{10}，附加气室的容积为 V_2，大气压强为 p_0。空气弹簧竖直向上的作用力 F 与主气室内气体压强和大气压强之差的比值称为空气弹簧的有效承载面积 A_e。已知空气的定容摩尔热容 $C_V=\dfrac{5}{2}R$（R 是普适气体常量）。假设在微振幅条件下主气室内气体的体积 V_1 和有效承载面积 A_e 均可视为空气弹簧（气囊）的承载面相对于其平衡位置的竖直位移 y（向下为正）的线性函数，变化率分别为常量 $-\alpha$（$\alpha>0$）和 β（$\beta>0$）。

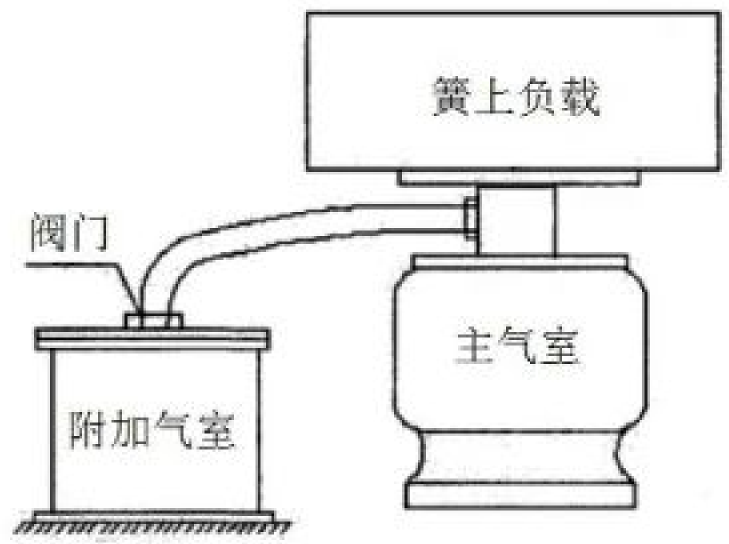


图 1a

（1）附加气室未与主气室连通（阀门关闭），试在下述两种情形下，导出空气弹簧的劲度系数 $K\equiv \mathrm{d}F/\mathrm{d}y$ 与其有效承载面积 A_e 之间的关系：

i）上下乘客（主气室内气体压强和体积的变化满足等温过程）；

ii）列车运行中遇到剧烈颠簸（主气室内气体压强和体积变化满足绝热过程）。

（2）主气室连通附加气室（阀门打开）后，在上述两种情形下，导出空气弹簧的劲度系数 K 与其有效承载面积 A_e 之间的关系。主气室与附加气室之间连通管道的容积可忽略。

二、(40 分) 一质量为 m、半径为 R 的均质实心母球静置于水平桌面上，母球与桌面之间的滑动摩擦因数为 μ。将球杆调整到位于过球心的竖直平面内保持水平，并击打母球上半部，球杆相对于球心所在水平面的高度为 $R/2$，击打时间极短；母球获得的冲量大小为 P，方向水平。假设最大静摩擦力等于滑动摩擦力。重力加速度大小为 g。

（1）问击打后经过多长时间母球开始做纯滚动？求母球达到纯滚动时球心的运动速度；

（2）记母球达到纯滚动时（以此时刻为计时零点）母球上与桌面接触点为 B，求此后的 t' 时刻球上 B 点的位置、速度与加速度。

三、（40 分）负微分电阻效应是指某些电路或电子元件（如隧道二极管）在特定的电压范围内其电流随端电压增加而减少的特性，该效应可在电路中维持高频振荡并输出放大的交流信号。在图 3a 所示的简化电路中，D 为一隧道二极管，其左侧由一定值电阻 R 、一电感 L 和一电容 C 串联组成，回路交流电流记为 $i(t)$ ；其右侧由一理想的高频扼流圈 RFC（直流电阻为零，完全阻断交流信号）和一理想恒压直流电源 V_0 组成，回路直流电流记为 I （ $I >> |i(t)|$ ），已标示电流正方向。D 始终处在特定电压范围内，这时其电阻值为 $-R_0$ （ $R_0 > 0$ ，且为一定值）。

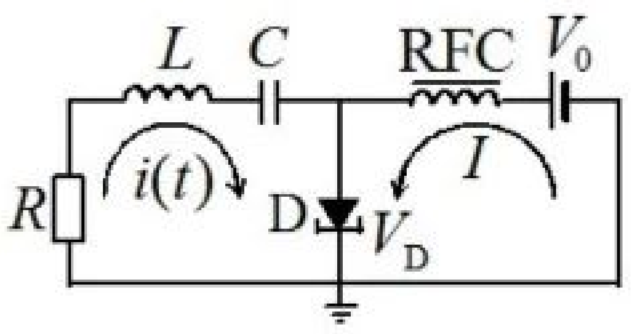


图 3a

（1）已知 $t=0$ 时，$i(0)=0$ ，$\dot{i}(0)=\beta \neq 0$ （ $\dot{a}$ 表示 a 对 t 微商）；交流电流随时间的变化满足

$$i(t)=\alpha_1 e^{\beta_1 t}+\alpha_2 e^{\beta_2 t}，（\alpha_1、\beta_1、\alpha_2、\beta_2 \text{ 为待定常量}）$$

试确定常量 α_1、β_1、α_2、β_2，以确定任意时刻 t 的交流电流 $i(t)$ ；

（2）试说明在什么条件下左侧回路中会发生谐振？并求在发生谐振的情形下左侧回路中电流 $i_H(t)$ 和谐振频率 f_H ；

（3） 试说明在什么条件下左侧回路中会发生 RLC 阻尼振荡？并求此时左侧回路中电流 $i_D(t)$ 和振荡频率 f_D ；

（4）已知该隧道二极管 D 正常工作（即能保持其具有负微分电阻效应）的范围为

$$V_{\min} \le V_D \le V_{\max}，\quad（V_{\min}、V_{\max} \text{ 为已知常量}）$$

试求该隧道二极管上交流部分可能达到的最大平均功率 $\bar{P}_{\max}$ 、以及此时理想恒压直流电源的输出电压 V_0 。

四、（40 分）劳伦斯（E. O. Lawrence）在 1930 年首次提出了回旋加速器的原理：用两个半圆形磁场，使带电粒子沿圆弧形轨道旋转，反复通过两半圆缝隙间的高频电场加速而获得较高能量。他因这个极富创意的方案而获得了 1939 年的诺贝尔物理学奖。

（1）目前全球最大的回旋加速器是费米实验室中的高能质子同步加速器 Tevatron（粒子运行最大回旋圆轨道的周长为 $L_{\max}=6436\ \text{m}$ ），可以将一质子加速到的最大能量为 $E_{p,\max}^{(\text{tevatron})}=1.00\times10^6\ \text{MeV}$ 。假设质子在被加速过程中始终在垂直于均匀磁场的平面内运动，不计电磁辐射引起的能量损失。求该同步加速器 Tevatron 将质子加速到上述最大能量所需要的磁感应强度的最小值 $B_{\min}$ 。

（2）高能入射质子轰击静止的质子（靶质子），可产生反质子 $\bar{\text{p}}$ ，反应式为

$$\text{p}+\text{p}\rightarrow \text{p}+\text{p}+\text{p}+\bar{\text{p}}$$

求能产生反质子时入射质子的最小动能，并判断第（1）问中的 Tevatron 加速的质子是否可以轰击静止的靶质子而产生反质子。

已知数据：质子质量 $m_p = 938.3\ \text{MeV}/c^2$ ，真空中的光速 $c=3.00\times10^8 \text{m/s}$ 。

五、(40 分)星际飞行器甲、乙、丙如图 5a 所示:在惯性系Σ(坐标系O-xy)中观测到飞行器甲和乙在同一直线上朝y轴负方向匀速飞行,飞行器丙在另一直线上朝y轴正方向匀速飞行;两条飞行直线相互平行,相距d。三艘飞行器的速度在惯性系Σ中分别为$\boldsymbol{v}_{甲\Sigma}=(-2c/3)\hat{\boldsymbol{y}}$、$\boldsymbol{v}_{乙\Sigma}=(-c/3)\hat{\boldsymbol{y}}$、$\boldsymbol{v}_{丙\Sigma}=(2c/3)\hat{\boldsymbol{y}}$($\hat{\boldsymbol{y}}$是沿$y$轴正方向的单位矢量),图中飞行器旁的箭头表示其飞行速度的方向。假设飞行器甲、乙、丙的尺寸远小于d。

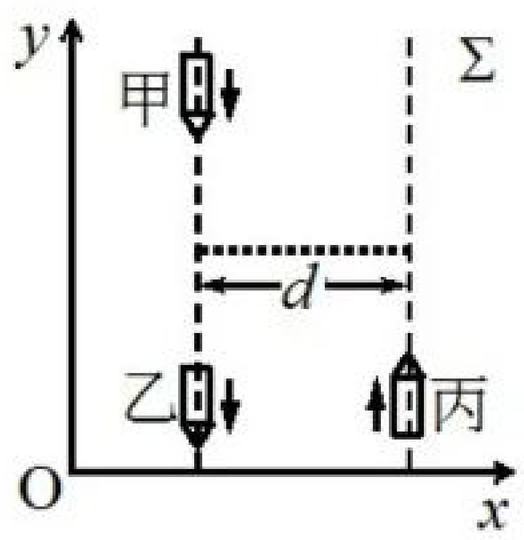


图 5a

(1)某时刻,飞行器甲向乙发射一个光信号,乙收到该信号后立即将其反射回甲。据甲上的原子钟读数,该光信号从发出到返回共经历了时间$(\Delta t_{光信号})_{甲}=T$。试求分别从惯性系Σ和乙上的观测者来看,光信号从甲发出到返回甲,所经历的时间各是多少?从甲上的观测者来看,从甲收到返回的光信号到甲追上乙需要多少时间?

(2)当飞行器甲和丙在惯性系Σ中相距最近时,从甲发射一个小货物(质量远小于飞行器的质量,尺寸可忽略),小货物在惯性系Σ中的速度大小为$v_{货\Sigma}=3c/4$。为了让丙能接收到该货物,从甲上的观测者来看,该货物发射速度的大小和方向是多少?从乙上的观测者来看,货物从甲发射到被丙接收所需时间$(\Delta t_{货})_{乙}$是多少?

六、(40 分)光纤陀螺仪是一种能够精确测定运动物体方位的光学仪器,它是现代航海、航空和航天等领域中被广泛使用的一种惯性导航仪器。光纤陀螺仪导航主要基于下述效应:在一个半径为R、以角速度Ω转动的光纤环路(见图 6a)中,从固定在环上的分束器 A 分出的两束相干光分别沿逆时针(CCW)和顺时针(CW)方向传播后回到 A,两者的光程不一样。检测两束光的相位差或干涉条纹的变化,可确定该光纤环路的转动角速度Ω。真空中的光速为c。

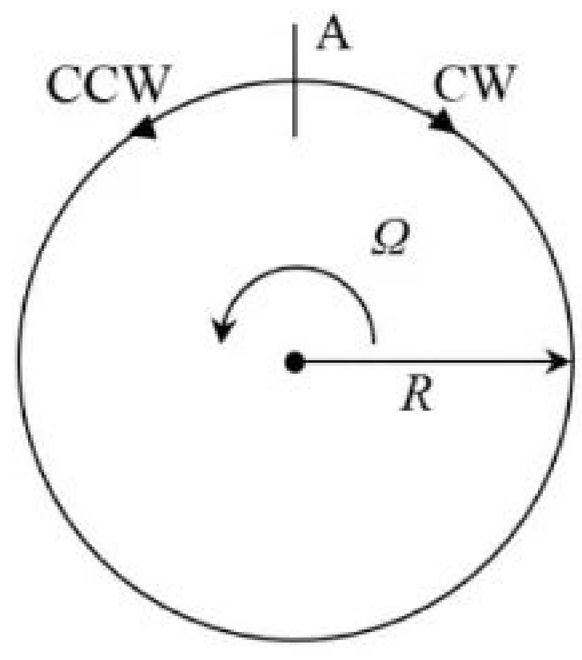


图 6a

(1)如图 6b,光纤由内、外两层介质构成,内、外层介质的折射率分别为n_1、n_2($n_1>n_2$)。为了使光能在光纤内传输,光在输入端口(端口外介质的折射率为n_0)的入射角i应满足什么条件?

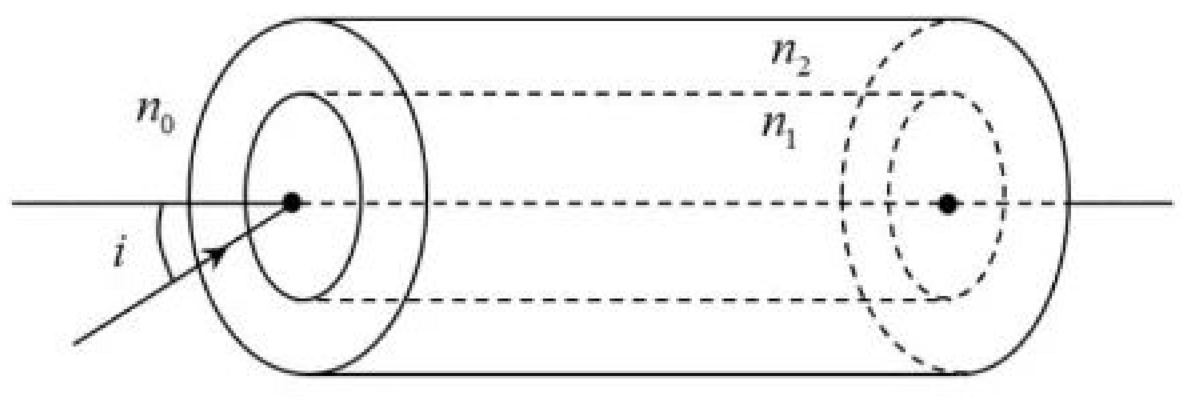


图 6b

(2)考虑沿环路密绕N匝光纤,首尾相接于分束器 A,光纤环路以角速度Ω沿逆时针方向旋转。从 A 分出两束相干光沿光纤环路逆时针和顺时针方向传播,又回到 A。已知光传播介质的折射率为n_1,两束光在真空中的波长为λ_0,问两束相干光分别沿光纤环路逆时针和顺时针方向传播的时间t_{CCW}和t_{CW}为多少?这两束光的相位差为多少?试指出该相差与介质折射率n_1之间的关系。

（3）为了提高陀螺系统的微型化程度，人们提出了谐振式光学陀螺系统。该系统中含有一个沿逆时针方向旋转的光学环形腔，其半径为 R，旋转角速度为 Ω（$R\Omega << c$），已知腔中的介质折射率为 n，在腔内存在沿逆时针和顺时针方向传播的两类共振模式。当环形腔静止时，这些模式的波长 λ_{m0} 由周期边界条件 $2\pi R = m\lambda_{m0}$ 决定，其中 m 为正整数，称为共振模式的级次。当环形腔旋转时，同一级次（均为 m）的沿顺时针和逆时针方向传播的共振模式存在一个共振频率差 Δf，试导出环形腔转动角速度 Ω 与该共振频率差 Δf 之间的关系。

七、（40分）激光干涉引力波天文台（LIGO）2015年首次探测到了十亿光年外双黑洞并合产生的引力波，证实了爱因斯坦理论关于存在引力波和黑洞的预言。黑洞并合过程分为三个阶段：第一阶段（旋近阶段），两黑洞围绕系统质心在同一平面内做近似圆周的运动（见图7a），损失的机械能转化为引力辐射能，两者螺旋式逐渐靠近；第二阶段（并合阶段），双黑洞并合为一个黑洞；最后阶段（衰荡阶段），并合的黑洞弛豫至平衡状态，成为一个稳定的旋转黑洞。在旋近阶段，若忽略黑洞的自转和大小，则双黑洞均可视为质量分别恒为 M 与 m 的质点，它们之间距离 L 随时间而逐渐减小。假定系统除了辐射引力波外无其它能量耗散，不考虑引力辐射的反作用，可用牛顿引力理论进行近似处理。

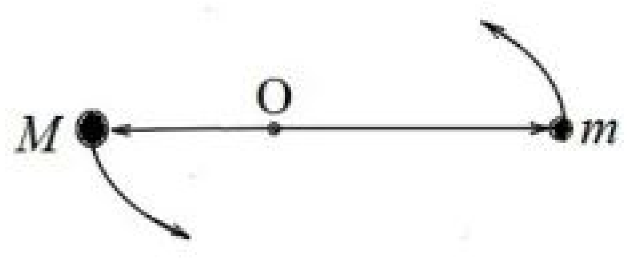


图 7a

（1）引力波辐射功率除了与引力常量 G 成正比之外，还可能与两黑洞的质量 M 与 m、两黑洞之间的距离 L、以及系统绕质心的转动惯量 I、转动角速度 ω 和辐射引力波的传播速度（其大小等于真空中的光速 c）有关，试选取描述转动体系辐射的三个物理量与 G 一起导出引力波辐射功率的表达式（假设其中可能待定的无量纲比例常数为 α）；

（2）若在初始时刻 $t = 0$ 时两黑洞之间的距离为 L_0，且引力波辐射功率表达式中的无量纲比例常数 α 是已知的，求两黑洞从 $t = 0$ 时开始绕系统质心旋转 $360°$ 所需要的时间；

（3）当两黑洞从 $t = 0$ 时开始绕系统质心旋转多少度时，它们间的距离恰好是其初始距离的一半？

八、（40 分）将电传输信号调制到光信号的过程称为电光调制。电光调制器的主要工作原理是电光效应：以铌酸锂电光晶体为例，其折射率在电场作用下发生变化，从而改变输入光束的光程，使电信号信息转移到光信号上。电光调制器光路图如图 8a 所示，P_1、P_2 分别为起偏器和检偏器，两者结构相同但偏振方向相互垂直（图中 $P_1(\|x_1)$、$P_2(\|x_2)$ 表示 P_1、P_2 的偏振方向分别与 x_1、x_2 坐标轴平行），长度为 l、厚度为 d 的电光晶体置于 P_1、P_2 之间，晶体两端面之间加有电压 V（以产生沿 x_3 方向的电场，强度大小为 E）；真空中波长为 λ_0 的光波经过起偏器 P_1（$\|x_1$）后沿 x_3 方向入射至电光晶体，折射后分为两束偏振方向（分别与快轴 x_1' 和慢轴 x_2' 平行）相互垂直的光波，x_1' 轴与 x_1 轴、x_2' 轴与 x_2 轴均成 $45°$ 夹角；电光晶体内沿 x_1'、x_2' 方向的折射率分别为

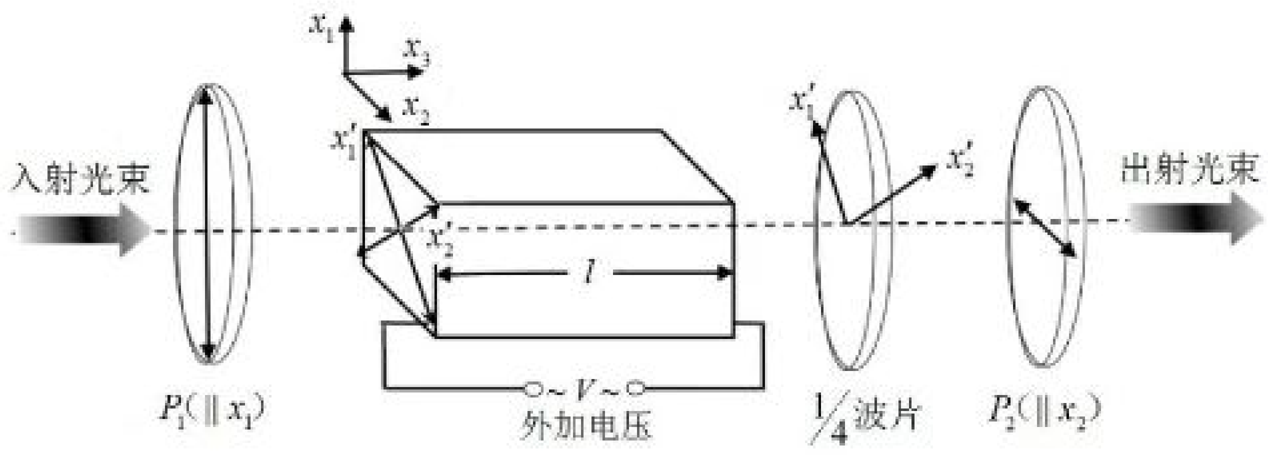


图 8a

$$\begin{cases} n_{x_1'} = n_o - \dfrac{1}{2} n_o^3 \gamma E \\ n_{x_2'} = n_o + \dfrac{1}{2} n_o^3 \gamma E \end{cases}$$

其中 n_o 为 o 光的折射率，γ 为常量，由晶体本身性质决定；两束光从电光晶体出射后经 1/4 波片，最终由检偏器 P_2（$\parallel x_2$）获取。

（1）一束圆频率为 ω 的光入射到电光晶体左端面，电场强度为

$$\begin{cases} E_{x_1'} = E_0 \cos\omega t \\ E_{x_2'} = E_0 \cos\omega t \end{cases}$$

求光通过电光晶体后的相位变化和光强变化；当出射光束之间的相位差为 π 时，电光晶体起到一个“1/2 波片”的作用，此时所用的外加电压称为半波电压 V_π，求 V_π。

（2）设外加电信号电压为

$$V = V_m \sin\omega_m t \qquad (V_m << V_\pi)$$

ω_m 是调制信号频率。若光波不经过 1/4 波片而直接进入检偏器 P_2，求出射光束的光强透过率（出射光与入射光强度之比）与电信号电压的关系。只有在电光调制器的透过率与调制电压具有良好的线性关系时，电信号转移到光信号后信号才不失真。求光线经过 1/4 波片和检偏器 P_2 时，出射的光束光强透过率与电信号电压的关系，并指出 1/4 波片所起的作用。

（3）电光调制器的等效电路如图 8b 左半部所示：电光晶体置于两平行板电极间，两平行板间的电光晶体可等效为由电阻 R 和电容 C 的电阻-电容并联电路；V 为外加信号电压，R_m 为调制电源和导线的电阻，通常满足 $R >> R_m$。试证明：在图 8b 中开关断开的情形下，当 $\omega_m >> (R_m C)^{-1}$，实际加载至电光晶体上的电压 V_c 满足 $|V_c| << |V|$，即调制效率极低。

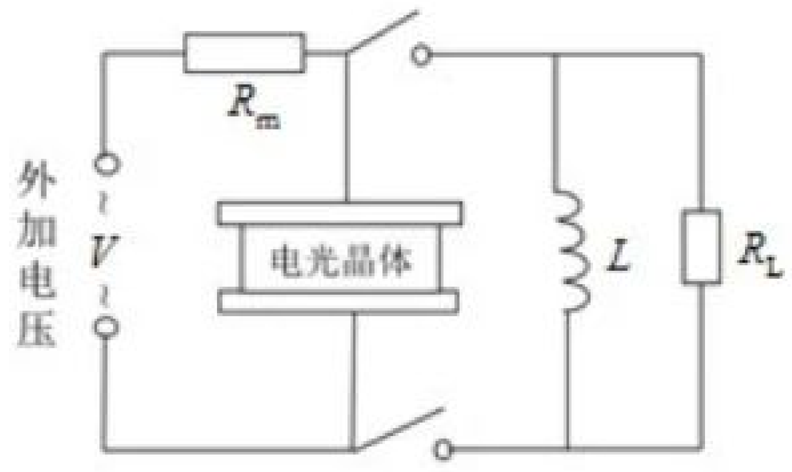


图 8b

（4）为了提高调制效率，添加（即将图 8b 中开关合上）如图 8b 右半部所示的并联谐振回路（图中，R_L 为负载电阻，L 为线圈的电感），试证明 $|V_c| \approx |V|$。

第 37 届全国中学生物理竞赛复赛试题参考解答

（2020 年 9 月 19 日 9:00-12:00）

一、

（1）依题意，空气弹簧主气室对簧上负载竖直向上的作用力为

$$F = (p_1 - p_0)A_e \qquad ①$$

式中，p_1 是主气室内空气的压强。

当空气弹簧承受的负载发生变化时，主气室内气体的压强 p_1 和体积 V_1 均会发生变化。为了统一处理题给的两种情形，考虑气体压强和体积变化的过程方程为

$$p_1 V_1^n = \text{常量} \qquad ②$$

式中，n 是常数。①式左右两边对空气弹簧承载面的竖直位移 y 微商，可知空气弹簧的劲度系数 K 满足

$$K \equiv \frac{dF}{dy} = (p_1 - p_0)\frac{dA_e}{dy} + \frac{dp_1}{dy}A_e \qquad ③$$

②式左右两边对 y 微商得

$$\frac{dp_1}{dy}V_1^n + kp_1 V_1^{n-1}\frac{dV_1}{dy} = 0 \qquad ④$$

由题意知，空气弹簧主气室内体积 V_1 和有效承载面积 A_e 相对于平衡位置的竖直位移的变化率为

$$\frac{dV_1}{dy} = -\alpha, \qquad \frac{dA_e}{dy} = \beta \qquad ⑤$$

联立①③④⑤式得，空气弹簧的劲度系数 K 与其有效承载面积 A_e 之间的关系为

$$K = \alpha \frac{kp_{10}V_{10}^n}{V_1^{k+1}} A_e + \beta\left[p_{10}\left(\frac{V_{10}}{V_1}\right)^n - p_0\right] \qquad ⑥$$

在高铁上下乘客的情形下，主气室内气体压强和体积变化满足等温过程

$$n = 1 \qquad ⑦$$

由⑥⑦式得

$$K = \alpha \frac{p_{10}V_{10}}{V_1^2} A_e + \beta\left[p_{10}\frac{V_{10}}{V_1} - p_0\right] \qquad ⑧$$

在列车运行中遇到强烈颠簸的情形下，主气室内气体压强和体积变化满足绝热过程

$$n = \gamma \qquad ⑨$$

式中，γ 是空气的定压摩尔热容 C_p 与定容摩尔热容 C_V 之比

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{C_V + R}{C_V} = \frac{\frac{7}{2}R}{\frac{5}{2}R} = \frac{7}{5} \qquad ⑩$$

由⑥⑨式得

$$K = \alpha \frac{7p_{10}V_{10}^{7/5}}{5V_1^{12/5}} A_e + \beta\left[p_{10}\left(\frac{V_{10}}{V_1}\right)^{7/5} - p_0\right] \qquad ⑪$$

（2）主气室连通附加气室后，如果车辆振动频率较低，例如情形 i)，空气弹簧变形较慢，可认为在任意瞬间，空气弹簧主气室的压强与附加气室的压强相同，两气室间的压强差可视为零。两气室的空气作为一个整体，经历等温过程。空气弹簧的劲度系数 K 与其有效承载面积 A_e 之间的关系

$$K=\alpha\frac{p_{10}\left(V_{10}+V_2\right)}{\left(V_1+V_2\right)^2}A_e+\beta\left[p_{10}\frac{V_{10}+V_2}{V_1+V_2}-p_0\right] \tag{12}$$

对于情形ii)，车辆系统的振动频率较高，空气弹簧主气室内部的压力和体积变化较快，主气室与附加气室之间来不及进行气体流动，此时空气弹簧的容积相当于主气室容积单独作用，经历绝热过程。空气弹簧的劲度系数 K 与其有效承载面积 A_e 之间的关系为

$$K=\alpha\frac{7p_{10}V_{10}^{7/5}}{5V_1^{12/5}}A_e+\beta\left[p_{10}\left(\frac{V_{10}}{V_1}\right)^{7/5}-p_0\right] \tag{13}$$

评分标准：

本题共 40 分。

第（1）问 32 分，①②③④式各 3 分，⑤式 2 分，⑥式 4 分，⑦式 2 分，⑧式 4 分，⑨⑩式各 2 分，⑪式 4 分；

第（2）问 8 分，⑫⑬式各 4 分。

二、

（1）对击球过程应用刚体质心运动的动量定理，有

$$P=mu_0-0 \tag{1}$$

式中，u_0 是击打结束后的瞬间母球质心的速度（与冲量P同向）。母球受到的相对于其质心的冲量矩为

$$J=P\frac{R}{2} \tag{2}$$

对击球过程应用刚体转动的角动量定理有

$$J=I\omega_0-0 \tag{3}$$

式中，ω_0 是在击打结束后的瞬间母球的转动角速度。母球的转动惯量为

$$I=\frac{2}{5}mR^2 \tag{4}$$

在击球结束后的瞬间，母球上与桌面相接触的点A的速度为

$$v_A=u_0-R\omega_0 \tag{5}$$

由①②③④⑤式可知，在击球结束的瞬间，母球上A点的速度为

$$v_A=-\frac{P}{4m}<0 \tag{6}$$

A点沿着x轴（取x轴正向与P同向）负方向滑动。小球受到沿x轴正方向的摩擦力 F_f 为

$$F_f=\mu mg \tag{7}$$

在击球结束后的时刻t，应用刚体的质心运动定理和相对于质心的动量矩定理有

$$m\dot{u}=F_f \tag{8}$$

$$I\dot{\omega}=-\mu mgR \tag{9}$$

式中，取ω与ω_0同向为正。由①①②③④⑧⑨式可知，t时刻母球质心的速度和绕质心转动的角速度分别为

$$u(t) = u_0 + \dot{u}t = u_0 + \mu g t \tag{⑩}$$

$$\omega(t) = \omega_0 + \dot{\omega}t = \frac{PR}{2I} - \frac{\mu m g R t}{I} \tag{⑪}$$

在t时刻，A点的速度为

$$v_{\mathrm{A}}(t) = u(t) - R\omega(t) = \frac{7}{2}\mu g t - \frac{P}{4m} \tag{⑫}$$

由⑫式可知，接触点A的速度随时间的增加逐渐由负值变为

$$v_{\mathrm{A}}(t_0) = 0$$

时，母球开始做纯滚动。由上式和⑫式得，母球被击打后经过时间

$$t_0 = \frac{P}{14\mu m g} \tag{⑬}$$

开始做纯滚动，此时母球球心C的速度为

$$u_{\mathrm{c}} = \mu g t_0 + u_0 = \frac{15P}{14m} \tag{⑭}$$

（2）由纯滚动条件知，在任意时刻$t' > 0$，水平滚动距离等于B点（此点就是在击球结束后的瞬间母球上与桌面相接触的点A）从时刻$t' = 0$到时刻t'经过的弧长，该弧长对应的圆心角为

$$\theta = \frac{u_{\mathrm{c}}}{R} t' \tag{⑮}$$

B点在时刻t'的位置为

$$x_{\mathrm{B}} = u_{\mathrm{c}} t' - R\sin\theta = \frac{15P}{14m} t' - R\sin\frac{u_{\mathrm{c}} t'}{R} = \frac{15Pt'}{14m} - R\sin\frac{15Pt'}{14mR} \tag{⑯}$$

$$y_{\mathrm{B}} = R(1-\cos\theta) = R\left(1-\cos\frac{u_{\mathrm{c}} t'}{R}\right) = R\left(1-\cos\frac{15Pt'}{14mR}\right) \tag{⑰}$$

这里，以B点在$t' = 0$的位置为坐标原点，x轴与P同向，y轴正向竖直向上。⑯⑰式两边对时间求导得，B点速度分量为

$$v_{\mathrm{B}x} = u_{\mathrm{c}}(1-\cos\theta) = u_{\mathrm{c}}\left(1-\cos\frac{u_{\mathrm{c}} t'}{R}\right)$$

$$v_{\mathrm{B}y} = u_{\mathrm{c}}\sin\theta = u_{\mathrm{c}}\sin\frac{u_{\mathrm{c}} t'}{R}$$

B点速度的大小为

$$v_{\mathrm{B}} = \sqrt{v_x{}^2 + v_y{}^2} = 2u_{\mathrm{c}}\sin\frac{u_{\mathrm{c}} t'}{2R} = \frac{15P}{7m}\sin\frac{15Pt'}{28mR} \tag{⑱}$$

设B点速度的方向与水平方向的夹角为α，则

$$\tan\alpha = \frac{v_{\mathrm{B}y}}{v_{\mathrm{B}x}} = \frac{\sin\frac{u_{\mathrm{c}} t'}{R}}{1-\cos\frac{u_{\mathrm{c}} t'}{R}} = \frac{2\sin\frac{u_{\mathrm{c}} t'}{2R}\cos\frac{u_{\mathrm{c}} t'}{2R}}{2\sin^2\frac{u_{\mathrm{c}} t'}{2R}} = \cot\frac{u_{\mathrm{c}} t'}{2R}$$

故

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{u_{\mathrm{c}} t'}{2R} = \frac{\pi}{2} - \frac{15Pt'}{28mR} \tag{⑲}$$

将B点速度分量对时间求导得，B点的加速度分量为

$$a_{\mathrm{B}x}=\frac{u_{\mathrm{c}}^2}{R}\sin\frac{u_{\mathrm{c}}t'}{R},$$

$$a_{\mathrm{B}y}=\frac{u_{\mathrm{c}}^2}{R}\cos\frac{u_{\mathrm{c}}t'}{R}$$

加速度大小为

$$a_{\mathrm{B}}=\frac{u_{\mathrm{C}}^2}{R}=\left(\frac{15}{14}\right)^2\frac{P^2}{m^2R} \tag{20}$$

方向指向母球球心 C。

评分标准： 本题共 40 分。

第（1）问 28 分，①②③④⑤⑥⑦⑧⑨⑩⑪⑫⑬⑭式各 2 分；

第（2）问 12 分，⑮⑯⑰⑱⑲⑳式各 2 分。

三、

（1）左侧回路电势之和为零，有

$$Ri(t)+L\dot{i}(t)+\frac{1}{C}\int_0^t i(t')dt'+(-R_0)i(t)=0 \tag{1}$$

题给的 $i(t)$ 的一般形式是

$$i(t)=\alpha_1e^{\beta_1t}+\alpha_2e^{\beta_2t} \tag{2}$$

由初始条件有

$$\begin{cases}i(0)=\alpha_1+\alpha_2=0\\ i'(0)=\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2=\beta\end{cases} \tag{3}$$

由③式知

$$\alpha_1\neq 0,\quad \alpha_2\neq 0. \tag{4}$$

将②式代入①式得

$$(R-R_0)(\alpha_1e^{\beta_1t}+\alpha_2e^{\beta_2t})+L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\alpha_1e^{\beta_1t}+\alpha_2e^{\beta_2t})+\frac{1}{C}\int_0^t(\alpha_1e^{\beta_1t'}+\alpha_2e^{\beta_2t'})dt'=0$$

得

$$\alpha_1[(R-R_0)+L\beta_1+\frac{1}{C\beta_1}]e^{\beta_1t}+\alpha_2[(R-R_0)+L\beta_2+\frac{1}{C\beta_2}]e^{\beta_2t}=\frac{1}{C}(\frac{\alpha_1}{\beta_1}+\frac{\alpha_2}{\beta_2})$$

两边对 t 微商得

$$\alpha_1[L\beta_1^2+(R-R_0)\beta_1+\frac{1}{C}]e^{\beta_1t}+\alpha_2[L\beta_2^2+(R-R_0)\beta_2+\frac{1}{C}]e^{\beta_2t}=0$$

不失普遍性，可设 $\beta_1\neq\beta_2$（因为 $\beta_1=\beta_2$ 可视为 $\beta_1\neq\beta_2$ 但 $\beta_1\to\beta_2$ 的极限情形）。上式对任意的时刻 t 都等于零；因而，各指数项的系数均应为零，即

$$\begin{cases} L\beta_1^2+(R-R_0)\beta_1+\dfrac{1}{C}=0, \\ L\beta_2^2+(R-R_0)\beta_2+\dfrac{1}{C}=0. \end{cases} \quad ⑤$$

解得

$$\begin{cases} \beta_1=\beta_+=-\dfrac{R-R_0}{2L}+\sqrt{\left(\dfrac{R-R_0}{2L}\right)^2-\dfrac{1}{LC}} \\ \beta_2=\beta_-=-\dfrac{R-R_0}{2L}-\sqrt{\left(\dfrac{R-R_0}{2L}\right)^2-\dfrac{1}{LC}} \end{cases} \quad ⑥$$

另一种选择 $\beta_1=\beta_-$、$\beta_2=\beta_+$ 导致同样的结果。由③⑥式得

$$\alpha_1=\frac{\beta}{2\sqrt{\left(\dfrac{R-R_0}{2L}\right)^2-\dfrac{1}{LC}}},\ \alpha_2=\frac{-\beta}{2\sqrt{\left(\dfrac{R-R_0}{2L}\right)^2-\dfrac{1}{LC}}} \quad ⑦$$

由②⑥⑦式得

$$i(t)=\frac{\beta}{2\sqrt{\left(\dfrac{R-R_0}{2L}\right)^2-\dfrac{1}{LC}}}\left[e^{\left(-\frac{R-R_0}{2L}+\sqrt{\left(\frac{R-R_0}{2L}\right)^2-\frac{1}{LC}}\right)t}-e^{\left(-\frac{R-R_0}{2L}-\sqrt{\left(\frac{R-R_0}{2L}\right)^2-\frac{1}{LC}}\right)t}\right] \quad ⑧$$

（2）要在左侧回路中产生谐振（即电流 $i(t)$ 持续等幅振荡），须使电路的能量不随时间耗损，同时电流随时间期性变化。因而有

$$\begin{cases} R-R_0=0, \\ \left(\dfrac{R-R_0}{2L}\right)^2-\dfrac{1}{LC}<0. \end{cases} \quad ⑨$$

注意，⑨式第一式直接导致⑨式第二式。所以，⑨式第一式是此电路发生谐振的条件。由⑧式和⑨式第一式得

$$i_{\mathrm{H}}(t)=\beta\sqrt{LC}\,\frac{e^{j\frac{t}{\sqrt{LC}}}-e^{-j\frac{t}{\sqrt{LC}}}}{2j}=\beta\sqrt{LC}\sin\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right) \quad ⑩$$

谐振频率为

$$f_{\mathrm{H}}=\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad ⑪$$

（3）要在左侧回路中产生 RLC 阻尼振荡（即电流 $i(t)$ 振幅随时间 t 衰减），须使电路的能量不断随时间耗损，同时电流随时间周期性变化。因而有

$$R-R_0>0 \quad ⑫$$

$$\left(\frac{R-R_0}{2L}\right)^2-\frac{1}{LC}<0 \quad ⑬$$

由⑫⑬式得

$$R_0<R<R_0+2\sqrt{\frac{L}{C}} \quad ⑭$$

这是电路发生阻尼振荡的条件。由⑧⑭式得

$$i(t)=\frac{\beta}{\sqrt{\frac{1}{LC}-\left(\frac{R-R_0}{2L}\right)^2}}\frac{e^{\left(-\frac{R-R_0}{2L}+j\sqrt{\frac{1}{LC}-\left(\frac{R-R_0}{2L}\right)^2}\right)t}-e^{\left(-\frac{R-R_0}{2L}-j\sqrt{\frac{1}{LC}-\left(\frac{R-R_0}{2L}\right)^2}\right)t}}{2j}$$

$$=\frac{\beta}{\sqrt{\frac{1}{LC}-\left(\frac{R-R_0}{2L}\right)^2}}e^{-\frac{R-R_0}{2L}t}\sin\left[\sqrt{\frac{1}{LC}-\left(\frac{R-R_0}{2L}\right)^2}t\right] \tag{15}$$

振荡频率为

$$f_{\rm D}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{LC}-\left(\frac{R-R_0}{2L}\right)^2} \tag{16}$$

（4）若要使得隧道二极管上交流部分的平均功率最大，同时又要确保隧道二极管始终工作在负电阻区域，则须使隧道二极管上的直流偏置电压处在工作电压范围的中间位置

$$\bar{V}=\frac{V_{\max}+V_{\min}}{2} \tag{17}$$

此时的交流部分电压可达到最大振幅

$$V_{\rm D\max}=\frac{V_{\max}-V_{\min}}{2} \tag{18}$$

考虑到右侧回路中电压源为理想恒压电源，且理想的高频扼流圈 RFC 的直流电阻为零，由回路电势之和为零可知

$$V_0=\bar{V}=\frac{V_{\max}+V_{\min}}{2} \tag{19}$$

此时，隧道二极管交流部分的最大平均功率为

$$\bar{P}_{\max}=\frac{1}{2}\frac{V_{\rm D\max}^2}{R_0}=\frac{(V_{\max}-V_{\min})^2}{8R_0} \tag{20}$$

评分标准： 本题共 40 分。

第（1）问 18 分，①③式各 3 分，④式 1 分，⑤⑥⑦式各 3 分，⑧式 2 分；

第（2）问 7 分，⑨式第一式 2 分，⑩式各 3 分，⑪式 2 分；

第（3）问 9 分，⑫⑬式各 2 分[或⑭式 4 分]，⑮式 3 分，⑯式 2 分；

第（4）问 6 分，⑰⑱式各 1 分，⑲⑳式各 2 分。

四、

（1）设带电粒子运动的速度为 $\boldsymbol{v}$，均匀磁场的磁感应强度为 $\boldsymbol{B}$，由相对论粒子运动方程有

$$\frac{d\boldsymbol{p}_{\mathrm{p}}}{dt}=e\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B} \quad ①$$

式中 $\boldsymbol{p}_{\mathrm{p}}$ 是质子的动量，e 为质子的电量。

$$\boldsymbol{p}_{\mathrm{p}}=\frac{m_{\mathrm{p}}\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad ②$$

不计辐射能量损失，质子仅受到磁场作用，有

$$\left|\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\right|=\frac{v^2}{R} \quad ③$$

将②式代入①式，有

$$\frac{m_{\mathrm{p}}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left|\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\right|=evB \quad ④$$

将③式代入④式得

$$B=\frac{m_{\mathrm{p}}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{v}{eR}=\frac{p_{\mathrm{p}}}{eR} \quad ⑤$$

[解法（二）

不计辐射的能量损失，带电粒子的粒子动量的大小不随时间变化，有

$$\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{p}_{\mathrm{p}}=e(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{R})\times\boldsymbol{B}=e\omega B\boldsymbol{R}=e\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{B}) \quad ②$$

式中 $\boldsymbol{\omega}$ 是粒子转动的角速度，满足

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{R} \quad ③$$

由①②式得

$$\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{p}_{\mathrm{p}}=\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{B}) \quad ④$$

由题意，$\boldsymbol{p}_{\mathrm{p}}$ 和 $\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{B}$ 都与 $\boldsymbol{\omega}$ 垂直，故有

$$\boldsymbol{p}_{\mathrm{p}}=e\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{B}$$

两边取数值即有

$$B_{\mathrm{p}}=\frac{p_{\mathrm{p}}}{eR} \quad ⑤$$

]

Tevatron 加速器中粒子运行轨道的半径 R 满足

$$R\geq\frac{L_{\max}}{2\pi} \quad ⑥$$

由⑤⑥式得

$$B=\frac{p_{\mathrm{p}}}{eR}\geq\frac{2\pi p_{\mathrm{p}}}{eL_{\max}} \quad ⑦$$

由狭义相对论中粒子的能量-动量关系有

$$E_{\mathrm{p}}^2=p_{\mathrm{p}}^2c^2+m_{\mathrm{p}}^2c^4 \quad ⑧$$

于是，将质子 p 加速到 $E_{\rm p,max}^{(\rm tevatron)}=1.00\times10^{6}$ MeV 所需要的最小磁感强度 $B_{\min}$ 为

$$\begin{aligned}B_{\min}&=\frac{2\pi}{eL_{\max}c}\sqrt{(E_{\rm p,max}^{(\rm tevatron)})^2-(m_{\rm p}c)^2}\\&=\frac{2\pi}{3.00\times10^{8}\times6436}\sqrt{\left(1.00\times10^{12}\right)^2-(938.3\times10^{6})^2}\ \text{T}\\&\approx3.26\ \text{T}\end{aligned} \tag{9}$$

（2）考虑多粒子系统洛仑兹不变质量 M 的平方。对于反应前（相应的量不带撇）实验室参考系中的粒子体系

$$M^2\equiv\left(\frac{E_1+m_{\rm p}c^2}{c^2}\right)^2-\left(\frac{p_1}{c}\right)^2=2\frac{E_1}{c^2}m_{\rm p}+2m_{\rm p}^2 \tag{10}$$

式中，E_1 和 p_1 分别表示实验室参考系中反应前入射质子的能量和动量；对于反应后（相应的量带撇）质心参考系中的粒子体系

$$M^2\equiv E_{\rm t}'^{(\rm cm)}-0\geq(4m_{\rm p})^2 \tag{11}$$

式中 $E_{\rm t}'^{(\rm cm)}$ 是反应后质心参考系中的粒子体系的总能量，已利用质心参考系中总动量等于零的事实。

[解法（二）

在实验室系中，反应前（相应的量不带撇）后（相应的量带撇）能量守恒

$$E_1+m_{\rm p}c^2=\sqrt{(E_{\rm t}'^{(\rm cm)})^2+p_{\rm t}'^2c^2}\geq\sqrt{(4m_{\rm p}c^2)^2+p_{\rm t}'^2c^2} \tag{10}$$

式中，$p_{\rm t}'$ 表示反应末态粒子的总动量；反应前后动量守恒

$$p_1=p_{\rm t}' \tag{11}$$

]

由相对论能量-动量关系，有

$$E_1^2=p_1^2c^2+(m_{\rm p}c^2)^2 \tag{12}$$

由⑩⑪⑫式得

$$E_1\geq\frac{(4m_{\rm p})^2-2m_{\rm p}^2}{2m_{\rm p}}c^2=7m_{\rm p}c^2\approx6568.1\ \text{MeV} \tag{13}$$

入射质子的动能为

$$E_{1k}\geq7m_{\rm p}c^2-m_{\rm p}c^2=6m_{\rm p}c^2\approx5629.8\ \text{MeV} \tag{14}$$

能产生反质子时入射质子的最小动能 $E_{1k,\min}=5629.8$ MeV，相应于入射质子的最小能量 $E_{1,\min}=6568.1$ MeV 。Tevatron 能加速质子的最大能量

$$E_{\rm p,max}^{(\rm tevatron)}=1.00\times10^{6}\ \text{MeV}>E_{1,\min}\approx6568.1\ \text{MeV} \tag{15}$$

即 Tevatron 可以通过加速质子轰击静止的靶质子而产生反质子。

评分标准： 本题共 40 分。

第（1）问 22 分，①式 4 分，②③式 3 分，④⑤⑥⑦⑧⑨式各 2 分。

第（2）问 18 分，⑩式 2 分，⑪式 6 分，⑫⑬式各 3 分，⑭⑮式各 2 分。

五、

（1）光信号从飞行器甲发出到返回甲，从惯性系Σ中的观测者来看，所需时间为

$$(\Delta t_{光信号})_{\Sigma}=\frac{(\Delta t_{光信号})_{甲}}{\sqrt{1-\frac{v_{甲\Sigma}^{2}}{c^{2}}}}=\frac{3\sqrt{5}}{5}(\Delta t_{光信号})_{甲}=\frac{3\sqrt{5}}{5}T \tag{①}$$

根据狭义相对论速度合成法则，飞行器甲相对于飞行器乙的速度为

$$v_{甲乙}=\frac{v_{甲\Sigma}+v_{\Sigma乙}}{1+\frac{v_{甲\Sigma}v_{\Sigma乙}}{c^{2}}}=\frac{v_{甲\Sigma}+(-v_{乙\Sigma})}{1+\frac{v_{甲\Sigma}(-v_{乙\Sigma})}{c^{2}}}=\frac{-\frac{2c}{3}+\frac{c}{3}}{1+\left(-\frac{2}{3}\right)\frac{1}{3}}=\frac{-\frac{c}{3}}{1-\frac{2}{9}}=-\frac{3}{7}c \tag{②}$$

式中，最后的等号右边的负号表示飞行器甲相对于乙的速度沿 y 轴负方向，余类推。从飞行器乙上的观测者来看，光信号从飞行器甲发出到返回甲所需时间为

$$(\Delta t_{光信号})_{乙}=\frac{(\Delta t_{光信号})_{甲}}{\sqrt{1-\frac{v_{甲乙}^{2}}{c^{2}}}}=\frac{7\sqrt{10}}{20}(\Delta t_{光信号})_{甲}=\frac{7\sqrt{10}}{20}T \tag{③}$$

从飞行器甲上的观测者来看，飞行器甲收到返回的光信号时，飞行器甲和乙间的距离为

$$l=\frac{1}{2}\left(c(\Delta t_{光信号})_{甲}-|v_{乙甲}|(\Delta t_{光信号})_{甲}\right)=\frac{2}{7}c(\Delta t_{光信号})_{甲}=\frac{2}{7}cT \tag{④}$$

从甲收到返回的光信号到甲追上乙所需的时间为

$$(\Delta t_{光信号})=\frac{l}{|v_{乙甲}|}=\frac{2}{3}(\Delta t_{光信号})_{甲}=\frac{2}{3}T \tag{⑤}$$

（2）考虑小货物在惯性系Σ中的速度。为了让小货物能被飞行器丙收到，小货物速度的 y 分量应该与飞行器丙相同，即

$$(v_{货\Sigma})_{y}=v_{丙\Sigma}=\frac{2}{3}c \tag{⑥}$$

据题意，小货物在惯性系Σ中的速度大小为 $v_{货\Sigma}=3c/4$。小货物速度的 x 分量为

$$(v_{货\Sigma})_{x}=\sqrt{v_{货\Sigma}^{2}-(v_{货\Sigma})_{y}^{2}}=\sqrt{\left(\frac{3}{4}c\right)^{2}-\left(\frac{2}{3}c\right)^{2}}=\frac{\sqrt{17}}{12}c \tag{⑦}$$

由题意，这里取正号。

惯性系Σ相对于飞行器甲的速度为

$$(v_{\Sigma甲})_{x}=0,\ (v_{\Sigma甲})_{y}=-(v_{甲\Sigma})_{y}=\frac{2}{3}c \tag{⑧}$$

根据狭义相对论速度合成法则，从飞行器甲上的观察者来看，小货物速度的两个分量分别为

$$(v_{货甲})_{x}=\frac{(v_{货\Sigma})_{x}\sqrt{1-\frac{v_{\Sigma甲}^{2}}{c^{2}}}}{1+\frac{(v_{货\Sigma})_{y}v_{\Sigma甲}}{c^{2}}}=\frac{\frac{\sqrt{17}}{12}c\sqrt{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{2}}}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^{2}}=\frac{\sqrt{85}}{52}c \tag{⑨}$$

$$(v_{货甲})_y=\frac{(v_{货\Sigma})_y+v_{\Sigma甲}}{1+\frac{(v_{货\Sigma})_y v_{\Sigma甲}}{c^2}}=\frac{\frac{2}{3}c+\frac{2}{3}c}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{12}{13}c \tag{⑩}$$

已利用了⑥⑦⑧式。从飞行器甲上的观测者来看，小货物发射速度的大小为

$$v_{货甲}=\sqrt{(v_{货甲})_x^2+(v_{货甲})_y^2}=\frac{\sqrt{2389}}{52}c \tag{⑪}$$

发射方向与飞行器甲的运动方向之间的夹角θ为

$$\theta=\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{(v_{货甲})_y}{(v_{货甲})_x}=\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{48}{\sqrt{85}}=2.95\text{rad}=169^\circ \tag{⑫}$$

回到参考系Σ，货物从发送到接收所用的时间为

$$(\Delta t_{货})_\Sigma=\frac{d}{(u_{货\Sigma})_x}=\frac{12d}{\sqrt{17}c} \tag{⑬}$$

货物在 y 方向上的位移为

$$(\Delta y_{货})_\Sigma=(v_{货\Sigma})_y(\Delta t_{货})_\Sigma=\frac{2}{3}c\times\frac{12d}{\sqrt{17}c}=\frac{8}{\sqrt{17}}d \tag{⑭}$$

从飞行器乙上的观测者来看，设货物从发送到接收的时间为$(\Delta t_{货})_乙$，由洛伦兹变换公式得

$$(\Delta t_{货})_乙=\frac{(\Delta t_{货})_\Sigma-\frac{v_{乙\Sigma}}{c^2}(\Delta y_{货})_\Sigma}{\sqrt{1-\left(\frac{v_{乙\Sigma}}{c}\right)^2}}=\frac{\frac{12d}{\sqrt{17}c}-\frac{1}{c^2}\left(-\frac{c}{3}\right)\left(\frac{8d}{\sqrt{17}}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}}=\frac{11\sqrt{34}}{17}\frac{d}{c} \tag{⑮}$$

评分标准： 本题共 **40** 分。

第（1）问 13 分，①②③式各 3 分，④⑤式各 2 分；

第（2）问 27 分，⑥式 4 分，⑦式 2 分，⑧⑨⑩式各 4 分，⑪⑫式各 2 分，⑬式各 1 分，⑭⑮式 2 分。

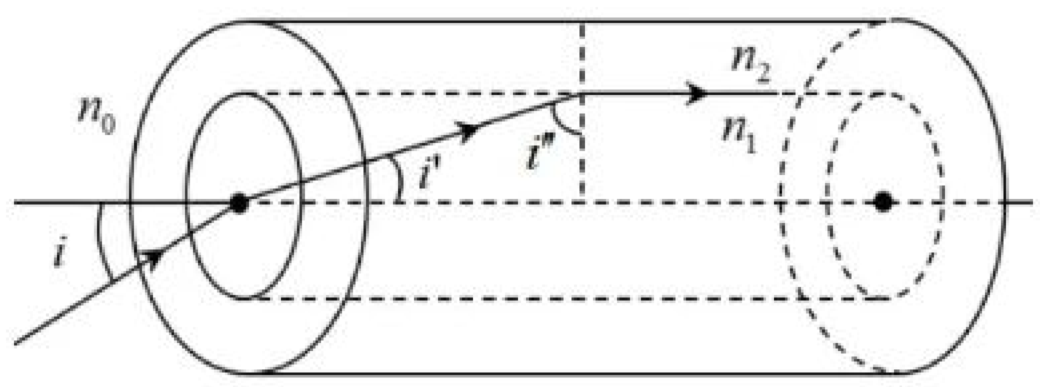
六、

（1）设光在光纤端口以角度 i 入射到内层介质，折射角为 i'，进而以入射角 i'' 入射到内外层分界面上，如解题图 6a 所示。由折射定律得

$$n_0 \sin i = n_1 \sin i' \quad ①$$

为了使光能在光纤内传输（全反射），应有

$$i'' \ge i_c \quad ②$$



解题图 6a

式中，i_c 是内层介质（相对于外层介质）的全反射的临界角，它满足

$$\sin i_c = \frac{n_2}{n_1} \quad ③$$

由几何关系有

$$i' + i'' = \frac{\pi}{2} \quad ④$$

由①②③④式得

$$n_0 \sin i = n_1 \cos i'' \le n_1 \cos i_c = \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$$

即

$$i \le \arcsin \frac{\sqrt{n_1^2 - n_2^2}}{n_0} \quad ⑤$$

（2）当圆环形陀螺仪沿逆时针方向以角速度 Ω 转动时，其环路切向线速率为 ΩR，由狭义相对论速度变换公式知，沿逆时针和顺时针方向传播的光相对实验室参照系的线速率分别为

$$v_{\mathrm{CCW}} = \frac{\frac{c}{n_1} + \Omega R}{1 + \frac{\frac{c}{n_1}\Omega R}{c^2}} = \frac{\frac{c}{n_1} + \Omega R}{1 + \frac{\Omega R}{n_1 c}} = \frac{c^2 + n_1 \Omega R c}{n_1 c + \Omega R} \quad ⑥$$

$$v_{\mathrm{CW}} = \frac{\frac{c}{n_1} - \Omega R}{1 - \frac{\frac{c}{n_1}\Omega R}{c^2}} = \frac{\frac{c}{n_1} - \Omega R}{1 - \frac{\Omega R}{n_1 c}} = \frac{c^2 - n_1 \Omega R c}{n_1 c - \Omega R} \quad ⑦$$

式中，n_1 为光传播所通过的介质的折射率。设沿逆时针和顺时针方向传播的光绕行 N 周回到出发点所需要的时间为 t_{CCW} 和 t_{CW}，它们分别由以下方程决定

$$v_{\mathrm{CCW}} t_{\mathrm{CCW}} = N 2\pi R + \Omega R t_{\mathrm{CCW}} \quad ⑧$$

$$v_{\mathrm{CW}} t_{\mathrm{CW}} = N 2\pi R - \Omega R t_{\mathrm{CW}} \quad ⑨$$

由⑧⑨式得

$$t_{\mathrm{CCW}} = \frac{N 2\pi R}{v_{\mathrm{CCW}} - \Omega R} = \frac{N 2\pi R (n_1 c + \Omega R)}{c^2 - (\Omega R)^2} \quad ⑩$$

$$t_{\mathrm{CW}}=\frac{N2\pi R}{v_{\mathrm{CW}}+\Omega R}=\frac{N2\pi R(n_1c-\Omega R)}{c^2-(\Omega R)^2} \tag{11}$$

沿逆时针和顺时针方向传播的这两束光的相差为

$$\Delta\phi=\frac{2\pi c}{\lambda_0}(t_{\mathrm{CCW}}-t_{\mathrm{CW}})=\frac{2\pi c}{\lambda_0}\frac{N4\pi R^2\Omega}{c^2-(\Omega R)^2} \tag{12}$$

从⑫式可看出，

相差 $\Delta\phi$ 与介质的折射率 n_1 无关 ⑬

（3）在旋转的环形腔中，存在沿逆时针方向和顺时针方向传播的共振模式。沿顺时针和逆时针方向传播的共振光波的波长满足以下条件（用 m 表示谐振波的级次）

$$L_{\mathrm{CW}}=m\lambda_{\mathrm{CW}} \tag{14}$$

$$L_{\mathrm{CCW}}=m\lambda_{\mathrm{CCW}} \tag{15}$$

这里，L_{CW}、L_{CCW} 分别表示在环形腔旋转的情况下沿顺时针和逆时针方向传播的两共振光波的波前从分束器 A 发出又回到 A 所经过的路程，即

$$L_{\mathrm{CW}}=v_{\mathrm{CW}}t_{\mathrm{CW}} \tag{16}$$

$$L_{\mathrm{CCW}}=v_{\mathrm{CCW}}t_{\mathrm{CCW}} \tag{17}$$

由⑥⑦⑧⑨⑩⑪式，并（由题意）取 N=1 及 $n_1=n$，可得

$$v_{\mathrm{CW}}t_{\mathrm{CW}}=\frac{2\pi R(c^2-n\Omega Rc)}{c^2-(\Omega R)^2} \tag{18}$$

$$v_{\mathrm{CCW}}t_{\mathrm{CCW}}=\frac{2\pi R(c^2+n\Omega Rc)}{c^2-(\Omega R)^2} \tag{19}$$

由⑭⑮⑯⑰⑱⑲式得，沿顺时针和逆时针方向传播的同一级次（m 相同）的两个共振模式之间的频率差为

$$\Delta f=f_{\mathrm{CW}}-f_{\mathrm{CCW}}=\frac{c}{n}\left(\frac{1}{\lambda_{\mathrm{CW}}}-\frac{1}{\lambda_{\mathrm{CCW}}}\right)=\frac{mc}{n}\left(\frac{1}{L_{\mathrm{CW}}}-\frac{1}{L_{\mathrm{CCW}}}\right)$$
$$=\frac{m\Omega}{\pi}\frac{c^2-(\Omega R)^2}{c^2-(n\Omega R)^2}\approx\frac{m\Omega}{\pi}\quad（或\frac{2R\Omega}{\lambda_{\mathrm{m0}}}）$$

即

$$\Omega=\frac{\pi}{m}\Delta f\quad（或=\frac{\lambda_{\mathrm{m0}}}{2R}\Delta f） \tag{20}$$

评分标准：

本题共 40 分。

第（1）问 10 分，①②③④⑤式各 2 分；

第（2）问 18 分，⑥⑦式各 3 分，⑧⑨⑩⑪⑫式各 2 分，结论⑬2 分；

第（3）问 12 分，⑭⑮式各 1 分，⑯⑰⑱⑲⑳式各 2 分。

七、

（1）描述转动体系辐射的三个物理量可选为系统的转动惯量 I 、转动角速度 ω 和辐射引力波的传播速度 c 。引力波辐射功率的表达式可表示为

$$P=\alpha G I^{\lambda}\omega^{\xi}c^{\sigma} \qquad ①$$

式中 α 是无量纲的比例系数，λ、ξ、σ 是待定幂次。比较①式两边物理量的量纲，有

$$[P]=ML^{2}T^{-3}=M^{\lambda-1}L^{2\lambda+\sigma+3}T^{-\xi-\sigma-2} \qquad ②$$

由②式得

$$\begin{cases}\lambda-1=1\\ 2\lambda+\sigma+3=2\\ \xi+\sigma+2=3\end{cases} \qquad ③$$

由方程组③解得

$$\lambda=2，\ \xi=6，\ \sigma=-5 \qquad ④$$

将④式代入①式得

$$P=\frac{\alpha G I^{2}\omega^{6}}{c^{5}} \qquad ⑤$$

（2）两黑洞绕系统质心做近似圆周运动，设质量为 M 和 m 的两黑洞相距 L ，到系统质心的距离分别为 R 和 r ，由牛顿引力定律有

$$G\frac{Mm}{L^{2}}=m\omega^{2}r \qquad ⑥$$

$$G\frac{Mm}{L^{2}}=M\omega^{2}R \qquad ⑦$$

由⑥⑦式得

$$\omega^{2}=\frac{G(M+m)}{L^{3}} \qquad ⑧$$

系统总能量为

$$E=-\frac{GMm}{2L}=-\frac{G^{2/3}Mm}{2(M+m)^{1/3}}\omega^{2/3} \qquad ⑨$$

由⑨式得，引力波辐射功率 P 满足

$$P=-\frac{dE}{dt}=\frac{G^{2/3}Mm}{3(M+m)^{1/3}}\omega^{-1/3}\frac{d\omega}{dt} \qquad ⑩$$

系统对其质心的转动惯量为

$$I=\frac{Mm}{M+m}L^{2} \qquad ⑪$$

由⑤⑧⑪式得

$$P=\frac{\alpha G^{7/3}\omega^{10/3}}{c^{5}}\frac{M^{2}m^{2}}{(M+m)^{2/3}} \qquad ⑫$$

比较⑩⑫式得

$$\omega^{-11/3}\frac{d\omega}{dt}=\frac{3\alpha G^{5/3}}{c^{5}}\frac{Mm}{(M+m)^{1/3}}$$

对上式两边积分

$$\int_{\omega_0}^{\omega}\omega'^{-11/3}d\omega'=\int_0^t\frac{3\alpha G^{5/3}}{c^5}\frac{Mm}{(M+m)^{1/3}}dt' \tag{13}$$

可得

$$\omega=\left[\omega_0^{-8/3}-\frac{8\alpha G^{5/3}}{c^5}\frac{Mmt}{(M+m)^{1/3}}\right]^{-3/8} \tag{14}$$

由$\omega=\dfrac{d\theta}{dt}$积分，并利用⑭式得

$$\begin{aligned}\theta&=\theta_0+\int_0^t\omega'\,dt'\\&=\theta_0+\frac{c^5(M+m)^{1/3}\omega_0^{-5/3}}{5\alpha G^{5/3}Mm}-\frac{c^5(M+m)^{1/3}}{5\alpha G^{5/3}Mm}\left[\omega_0^{-8/3}-\frac{8\alpha G^{5/3}}{c^5}\frac{Mmt}{(M+m)^{1/3}}\right]^{5/8}\end{aligned} \tag{15}$$

式中$\theta_0=\theta(t=0)$。两黑洞从$t=0$时刻开始绕质心旋转一圈

$$\theta=\theta_0+2\pi$$

将上式代入⑮式，并利用⑧式消去ω_0，得

$$t=\frac{c^5L_0^4}{8\alpha G^3Mm(M+m)}\left[1-\left(1-\frac{10G^{5/2}Mm\pi\alpha\sqrt{M+m}}{c^5L_0^{5/2}}\right)^{8/5}\right] \tag{16}$$

（3）由⑧⑭式得

$$L=G^{1/3}(M+m)^{1/3}\left[\omega_0^{-8/3}-\frac{8\alpha G^{5/3}}{c^5}\frac{Mmt}{(M+m)^{1/3}}\right]^{1/4} \tag{17}$$

当$L=\dfrac{1}{2}L_0$ 时，由⑧⑰式得

$$t=\frac{15c^5L_0^4}{128\alpha G^3Mm(M+m)} \tag{18}$$

由⑮⑱式得，相应的旋转度数为

$$\Delta\theta=\theta-\theta_0=\frac{\left(1-\dfrac{\sqrt{2}}{8}\right)c^5L_0^{5/2}}{5\alpha G^{5/2}Mm\sqrt{M+m}}\frac{180^\circ}{\pi} \tag{19}$$

评分标准：本题 40 分。

第（1）问 10 分，①②③④⑤式各 2 分；

第（2）问 24 分，⑥式 3 分，⑦⑧⑨⑩⑪⑫式各 2 分，⑬式 3 分，⑭⑮⑯式各 2 分；

第（3）问 6 分，⑰⑱⑲式各 2 分。

八、

（1）当一束线偏振光沿x_3轴进入晶体，且沿x_1方向偏振时，进入晶体后可以分解为沿x_1'和x_2'方向的两个垂直偏振分量。据题给的折射率与电场强度的关系，相应的相位变化量为

$$\phi_{n_{x_1'}}=\frac{2\pi}{\lambda_0}n_{x_1'}l=\frac{2\pi l}{\lambda_0}\left(n_o-\frac{1}{2}n_o^3\gamma E\right) \tag{1}$$

$$\phi_{n_{x_2'}}=\frac{2\pi}{\lambda_0}n_{x_2'}l=\frac{2\pi l}{\lambda_0}\left(n_o+\frac{1}{2}n_o^3\gamma E\right) \tag{2}$$

这两束光穿过晶体后的相位差为

$$\Delta\phi = \phi_{n_{x_2'}} - \phi_{n_{x_1'}} = \frac{2\pi}{\lambda_0} l n_o^3 \gamma E = \frac{2\pi}{\lambda_0} n_o^3 \gamma V \tag{③}$$

式中$V = El$。入射光强为

$$I_i = k|\boldsymbol{E}|^2 = k\left(\left|\boldsymbol{E}_{x_1'}\right|^2 + \left|\boldsymbol{E}_{x_2'}\right|^2\right) = 2kE_0^2 \tag{④}$$

式中k是与电场强度无关的常量。当光通过长度为l的晶体后，在输出面的x_1'与x_2'方向上的电场为

$$\begin{cases} E_{x_1'}(l) = E_0 \cos(\omega t + \phi_{nx_1'}) \\ E_{x_2'}(l) = E_0 \cos(\omega t + \phi_{nx_2'}) \end{cases} \tag{⑤}$$

出射光强为

$$I_f = k|\boldsymbol{E}(l)|^2 = k\left(\left|\boldsymbol{E}_{x_1'}(l)\right|^2 + \left|\boldsymbol{E}_{x_2'}(l)\right|^2\right) = 2kE_0^2 = I_i \tag{⑥}$$

可见，当光通过长度为l的晶体后，光强未变。

由半波电压V_π的定义有

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda_0} n_o^3 \gamma V_\pi = \pi \tag{⑦}$$

由⑦式得

$$V_\pi = \frac{\lambda_0}{2n_o^3\gamma} \tag{⑧}$$

（2）不经过 1/4 波片，从 P_2 射出的光场强度为x_1'与x_2'的x_2分量之和

$$\begin{aligned} E_{x2} &= -E_{x_1'}(l)\cos 45° + E_{x_2'}(l)\cos 45° \\ &= \frac{E_0}{\sqrt{2}}[-\cos(\omega_0 t + \phi_{n_{x_1'}}) + \cos(\omega_0 t + \phi_{n_{x_2'}})] \\ &= -\frac{2E_0}{\sqrt{2}}\sin(\frac{\Delta\phi}{2})\sin(\omega_0 t + \frac{\phi_{n_{x_2'}} + \phi_{n_{x_1'}}}{2}) \end{aligned} \tag{⑨}$$

输出光强为

$$I_f = k\left(\frac{2E_0}{\sqrt{2}}\sin\frac{\Delta\phi}{2}\right)^2 = 2kE_0^2 \sin^2\frac{\Delta\phi}{2} \tag{⑩}$$

由③④⑧⑩式得，当$\frac{\pi V_m}{2V_\pi} << 1$，光强的透过率为

$$T \equiv \frac{I_f}{I_i} = \sin^2(\frac{\Delta\phi}{2}) = \sin^2(\frac{\pi V}{2V_\pi}) = \sin^2\frac{\pi(V_m \sin\omega_m t)}{2V_\pi} \approx \left[\frac{\pi(V_m \sin\omega_m t)}{2V_\pi}\right]^2 \tag{⑪}$$

T与$V^2 = (V_m \sin\omega_m t)^2$成正比。

加上 1/4 波片，x_1'与x_2'传输的光波分量之间有一个固定的$\pi/2$相位差，由⑪式有

$$\begin{aligned} T &= \sin^2\frac{\Delta\varphi + \frac{\pi}{2}}{2} = \sin^2\left[\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2V_\pi}(V_m \sin\omega_m t)\right] \\ &= \frac{1}{2}\{1 - \cos[2(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi V_m \sin\omega_m t}{2V_\pi})]\} = \frac{1}{2}(1 + \sin\frac{\pi V_m \sin\omega_m t}{V_\pi}) \\ &\approx \frac{1}{2}(1 + \frac{\pi}{V_\pi}V_m \sin\omega_m t) \end{aligned} \tag{⑫}$$

T 与 $V=V_{\mathrm{m}}\sin\omega_{\mathrm{m}}t$ 成线性关系。

可见，未加 1/4 波片时，光强的透过率与调制电压信号 $V=V_{\mathrm{m}}\sin\omega_{\mathrm{m}}t$ 呈非线性关系；添加 1/4 波片的作用是保证系统的工作电压处于线性工作区域，使得光强的透过率和调制电压信号 $V=V_{\mathrm{m}}\sin\omega_{\mathrm{m}}t$ 呈现线性关系。

（3）实际加载至电光晶体上的电压 V_{c} 为

$$V_{\mathrm{c}}=\frac{\left(\dfrac{1}{1/R+i\omega_{\mathrm{m}}C}\right)}{R_{\mathrm{m}}+\dfrac{1}{1/R+i\omega_{\mathrm{m}}C}}V \tag{13}$$

由⑬式得，V_{c} 的模为

$$|V_{\mathrm{c}}|=\frac{R}{\sqrt{\left(R_{\mathrm{m}}+R\right)^2+R_{\mathrm{m}}^2R^2C^2\omega_{\mathrm{m}}^2}}|V|\approx\frac{1}{\sqrt{1+C^2R_{\mathrm{m}}^2\omega_{\mathrm{m}}^2}}|V| \tag{14}$$

当 $\omega_{\mathrm{m}}>>(R_{\mathrm{m}}C)^{-1}$ 时，

$$|V_{\mathrm{c}}|<<|V|$$

电压基本上落在 R_{m} 上，电光晶体调制效率极低。

（4）并联电感 L 和分流电阻 R_{L}（即将图 8b 中的开关都闭合）后，调制器系统的有效阻抗满足

$$\frac{1}{Z}=\frac{1}{R_L}+\frac{1}{i\omega_{\mathrm{m}}L}+\frac{1}{-i/\left(\omega_{\mathrm{m}}C\right)}=\frac{1}{R_L}-i\left(\frac{1}{\omega_{\mathrm{m}}L}-\omega_{\mathrm{m}}C\right) \tag{15}$$

由⑮式得

$$|Z|=\frac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{R_L^2}+\left(\omega_{\mathrm{m}}C-\dfrac{1}{\omega_{\mathrm{m}}L}\right)^2}} \tag{16}$$

由⑯式可知，当 $\omega_{\mathrm{m}}=1/\sqrt{LC}$，调制器阻抗为最大值

$$Z_{\max}=R_{\mathrm{L}} \tag{17}$$

因此，可通过调节电感来使得调制器阻抗达到最大值。特别的，当 $R_{\mathrm{L}}>>R_{\mathrm{m}}$ 时有

$$|V_{\mathrm{c}}|\approx|V| \tag{18}$$

调制电压绝大部分加在在晶体上，从而保证了调制效率。

评分标准：本题 40 分。

第（1）问 12 分，①②③式各 3 分，④⑦⑧式各 1 分；

第（2）问 13 分，⑨式 4 分，⑩⑪⑫各 3 分。

第（3）问 6 分，⑬⑭式各 3 分；

第（4）问 9 分，⑮⑯式各 3 分，⑰式 1 分，⑱式 2 分。