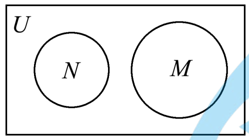
2024届高三一轮复习联考(三)　全国卷

文科数学参考答案及评分意见

1.D　**【解析】**因为 M,N 是全集 U 的非空子集,且 $M\subseteq \complement_U N$,所以韦恩图为:

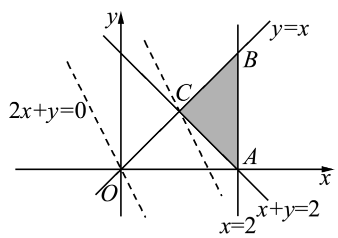


由韦恩图可知,D正确.故选D.

2.B　**【解析】**因为 $(1+\mathrm{i})z=-2+\mathrm{i}$,所以 $z=\frac{-2+\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=\frac{(-2+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}=\frac{-1+3\mathrm{i}}{2}=-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\mathrm{i}$.故选B.

3.B　**【解析】**由 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|$ 及向量的减法法则,可得向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行且同向;若 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$,可得向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 平行且同向或者反向,因此"$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$"是"$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|$"的必要不充分条件.故选B.

4.B　**【解析】**画出可行域,如图阴影部分所示,当 $z=0$ 时,画出初始目标函数表示的直线 $2x+y=0$,平移目标函数后,当直线过点 $C(1,1)$时,取得最小值,$z_{\min}=2\times1+1=3$.故选B.



5.D　**【解析】**由 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=28$,得 $b=2\sqrt{7}$,设 AC 边上的高为 h,因为 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}bh$,所以 $h=\frac{ac\sin B}{b}=\frac{6\sqrt{21}}{7}$,即 AC 边上的高为 $\frac{6\sqrt{21}}{7}$.故选D.

6.D　**【解析】**根据题意得2023年初($t=0$)时种群数量为 $k_0\cdot e^{1.4e}$,所以由 $y=k_0\cdot e^{1.4e-0.125n}<20\%\cdot k_0\cdot e^{1.4e}$,化简得 $e^{-0.125n}<\frac{1}{5}$,则 $n>8\ln 5\approx12.9$,又因为 $n\in\mathbf{N}^*$,所以 n 的最小值为13.故选D.

7.B　**【解析】**对于A,因为与同一平面平行的两条直线的位置关系可以是平行,相交,异面,故不能确定两直线位置关系是平行,故A错误;对于B,若 $a\parallel\gamma$,$b\perp\gamma$,则 $b\perp a$,故B正确;对于C,若 $a\parallel\gamma$,$\gamma\perp\beta$,则 a 与 β 可能相交,平行或者包含,故C错误;对于D,由线面垂直的判定定理知,一条直线垂直于一个平面中的两条相交直线时,线与面垂直,本选项不能确定 a,b 相交,故D不正确.故选B.

8.B　**【解析】**因为函数 $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-ax}$ 在区间$[0,1]$上是减函数,令 $g(x)=x^2-ax$,则函数 $g(x)=x^2-ax$ 在区间$[0,1]$上是增函数,所以 $\frac{a}{2}\leqslant0$,则 $a\leqslant0$.故选B.

9.C　**【解析】**函数 $f(x)=\sin(2x+\varphi)$的图象向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度,得 $g(x)=\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}+\varphi\right)$的图象,又函数 $g(x)$是偶函数,则有 $\frac{2\pi}{3}+\varphi=k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$,解得 $\varphi=k\pi-\frac{\pi}{6}$,$k\in\mathbf{Z}$.因为 $\varphi>0$,所以当 $k=1$ 时,φ 取最小值 $\frac{5\pi}{6}$.故选C.

10.A 【解析】由题意得 $f'(x)=(x+1)e^x$，过点(2,0)作曲线 $f(x)=xe^x$ 的两条切线，设切点坐标为$(x_0,x_0e^{x_0})$，则$(x_0+1)e^{x_0}=\dfrac{x_0e^{x_0}}{x_0-2}$，即$(x_0^2-2x_0-2)e^{x_0}=0$，由于 $e^{x_0}>0$，故 $x_0^2-2x_0-2=0$，$\Delta=12>0$，由题意可知 x_1,x_2 为 $x_0^2-2x_0-2=0$ 的两个解，故 $x_1+x_2=2$，$x_1x_2=-2$.故选 A.

11.D 【解析】由题意，数列$\{a_n\}$的前 n 项和满足 $a_{n+1}=2S_n(n\in\mathbf{N}^*)$，当 $n\geqslant2$ 时，$a_n=2S_{n-1}$，两式相减，可得 $a_{n+1}-a_n=2(S_n-S_{n-1})=2a_n$，可得 $a_{n+1}=3a_n$，即$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=3(n\geqslant2)$，又由 $a_1=1$，当 $n=1$ 时，$a_2=2S_1=2$，所以$\dfrac{a_2}{a_1}=2$，所以数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=\begin{cases}1,n=1,\\2\cdot3^{n-2},n\geqslant2,\end{cases}$ 故数列$\{a_n\}$既不是等差数列也不是等比数列，所以 A、B 选项错误；当 $n\geqslant2$ 时，$S_n=\dfrac{1}{2}a_{n+1}=3^{n-1}$，又由 $n=1$ 时，$S_1=a_1=1$，符合上式，所以数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 $S_n=3^{n-1}$.又由$\dfrac{S_{n+1}}{S_n}=3$，所以数列$\{S_n\}$为公比为 3 的等比数列，故 D 正确，C 错误.故选 D.

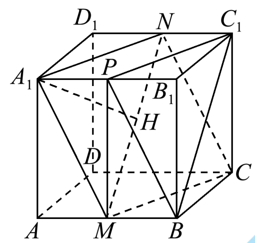
12.A 【解析】因为 $f(x+1)$为偶函数，所以 $f(x+1)=f(-x+1)$，所以 $f(x)$的图象关于直线 $x=1$ 对称，$f(x+2)=f(-x)$.又因为 $f(x)$不是常数函数，$f(x)$不恒等于 0，所以 $f(x)$不关于点(1,0)中心对称，B 错误；因为 $f(4-x)=f(x)$，所以 $f(2+x)=f(2-x)$，所以 $f(x)$的图象关于直线 $x=2$ 对称.所以由 $\begin{cases}f(2-x)=f(x+2),\\f(x+2)=f(-x),\end{cases}$ 得$f(x+2)=f(x)$，所以 $f(x)$是周期为 2 的函数，故 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=f\left(\dfrac{1}{2}+2\right)=f\left(\dfrac{5}{2}\right)$，C 错误，D 错误，由$\begin{cases}f(x+2)=f(x),\\f(x+2)=f(-x),\end{cases}$ 得 $f(-x)=f(x)$，所以 $f(x)$为偶函数，A 正确.故选 A.

13.1 【解析】由题意可得：$f(-5)=f(-3)=f(-1)=f(1)=\log_2 2=1$.

14.$\dfrac{4}{3}$ 【解析】由 $\sin\alpha+2\cos\alpha=0$，得 $\tan\alpha=-2$，则 $\tan2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\dfrac{2\times(-2)}{1-4}=\dfrac{4}{3}$.

15.$\dfrac{1}{2\ 024}$ 【解析】根据题意可得：$a_n-a_{n+1}=a_{n+1}a_n$，则$\dfrac{1}{a_{n+1}}-\dfrac{1}{a_n}=1$，故数列$\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$是首项为 2，公差为 1 的等差数列，则$\dfrac{1}{a_n}=n+1$，$a_n=\dfrac{1}{n+1}$，故 $a_{2\,023}=\dfrac{1}{2\ 024}$.

16.$8\sqrt{6}$ 【解析】取 AB，D_1C_1 的中点，分别记为 M，N，连接 A_1M，MC，CN，A_1N，PM.因为 $A_1P/\!/NC_1$，$A_1P=NC_1$，所以四边形 A_1PC_1N 是平行四边形，所以 $A_1N/\!/PC_1$，$A_1N=PC_1$.因为 $PM/\!/CC_1$，$PM=CC_1$，所以四边形 $PMCC_1$ 是平行四边形，所以 $MC/\!/PC_1$，$MC=PC_1$，所以 $A_1N/\!/MC$，$A_1N=MC$，所以四边形 A_1MCN 是平行四边形.因为 $PC_1/\!/A_1N$，$PC_1\not\subset$平面 A_1MCN，$A_1N\subset$平面 A_1MCN，所以 $PC_1/\!/$平面 A_1MCN，同理可证 $PB/\!/$平面 A_1MCN，因为 $PC_1\cap PB=P$，$PC_1,PB\subset$平面 PBC_1，所以平面 $PBC_1/\!/$平面 A_1MCN，因此过直线 A_1C 作与平面 PBC_1 平行的截面，即是平行四边形 A_1MCN，连接 MN，作 $A_1H\perp MN$ 于点 H，由 $A_1M=A_1N=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$，$MN=\sqrt{4^2+4^2}=4\sqrt{2}$，可得 $A_1H=\sqrt{(2\sqrt{5})^2-(2\sqrt{2})^2}=2\sqrt{3}$，所以 $S_{\triangle A_1MN}=\dfrac{1}{2}\times MN\times A_1H=\dfrac{1}{2}\times4\sqrt{2}\times2\sqrt{3}=4\sqrt{6}$，所以平行四边形 A_1MCN 的面积为 $2S_{\triangle A_1MN}=8\sqrt{6}$.



17.**解**:(1)设等比数列$\{a_n\}$的公比为q,依题意$q\neq1$,

于是$\begin{cases}a_1(q^4-1)=30,\\ \dfrac{a_1(1-q^4)}{1-q}=30,\end{cases}$ 解得$a_1=2,q=2$, ………… 3分

所以数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=a_1q^{n-1}=2\times2^{n-1}=2^n$. ………… 6分

(2)由(1)知,$b_n=\log_2 a_{n+1}+a_n=\log_2 2^{n+1}+2^n=n+1+2^n$, ………… 8分

所以$T_n=\dfrac{2+(n+1)}{2}\cdot n+\dfrac{2(1-2^n)}{1-2}=\dfrac{n^2+3n}{2}+2^{n+1}-2$. ………… 12分

18.**解**:(1)因为$\boldsymbol{m}=\left(2\sin\left(x-\dfrac{\pi}{12}\right),\sqrt{3}\right)$,$\boldsymbol{n}=\left(\sin\left(x-\dfrac{\pi}{12}\right),\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)\right)$,

所以$f(x)=\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=2\sin^2\left(x-\dfrac{\pi}{12}\right)+\sqrt{3}\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)$ ………… 1分

$=1-\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)+\sqrt{3}\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)=2\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)+1$. ………… 3分

由$-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant2x-\dfrac{\pi}{3}\leqslant\dfrac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$, ………… 4分

得$-\dfrac{\pi}{12}+k\pi\leqslant x\leqslant\dfrac{5\pi}{12}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$,

所以$f(x)$的单调增区间为$\left[-\dfrac{\pi}{12}+k\pi,\dfrac{5\pi}{12}+k\pi\right],k\in\mathbf{Z}$. ………… 6分

(2)由$f(\omega x)-1=0$,得$2\sin\left(2\omega x-\dfrac{\pi}{3}\right)+1=1$,得$\sin\left(2\omega x-\dfrac{\pi}{3}\right)=0$, ………… 7分

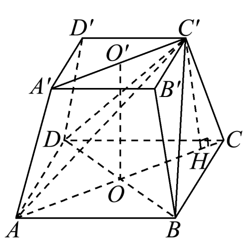
由$0\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{3}$,得$-\dfrac{\pi}{3}\leqslant2\omega x-\dfrac{\pi}{3}\leqslant\dfrac{2\omega\pi}{3}-\dfrac{\pi}{3}$, ………… 9分

因为$f(\omega x)-1=0(\omega>0)$在$\left[0,\dfrac{\pi}{3}\right]$上有唯一解,

所以$0\leqslant\dfrac{2\omega\pi}{3}-\dfrac{\pi}{3}<\pi$, ………… 11分

解得$\dfrac{1}{2}\leqslant\omega<2$,故$\omega$的取值范围是$\left[\dfrac{1}{2},2\right)$. ………… 12分

19.(1)**证明**:如图,连接AC交BD于点O.



由题意可知该几何体为正四棱台，在正方形 $ABCD$ 中，$BD\perp AC$. ………………………………………………… 1 分

取 $A'C'$ 中点 O'，连接 OO'，易知 $OO'\perp$ 底面 $ABCD$.

因为 $BD\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $OO'\perp BD$，………………………………………………………………………… 2 分

因为 $AC\cap OO'=O$，AC，$OO'\subset$ 平面 $ACC'A'$，

所以 $BD\perp$ 平面 $ACC'A'$. ………………………………………………………………………………………………… 3 分

而 $AC'\subset$ 平面 $ACC'A'$，所以 $AC'\perp BD$. ………………………………………………………………………… 4 分

(2)**解**：$S_{\triangle BCD}=\dfrac{1}{2}\times4\times4=8$，…………………………………………………………………………………… 6 分

因为底面 $ABCD$ 是边长为 4 的正方形，底面 $A'B'C'D'$ 是边长为 2 的正方形，所以底面 $ABCD$、底面 $A'B'C'D'$ 的对角线长的一半分别为 $2\sqrt{2}$，$\sqrt{2}$. ………………………………………………………………………………… 8 分

设 $C'H\perp AC$，垂足为 H，所以高 $C'H=\sqrt{(\sqrt{5})^2-(2\sqrt{2}-\sqrt{2})^2}=\sqrt{3}$，………………………………… 10 分

所以 $V_{D-BCC'}=V_{C'-BCD}=\dfrac{1}{3}S_{\triangle BCD}\cdot C'H=\dfrac{1}{3}\times8\times\sqrt{3}=\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$. ……………………………………… 12 分

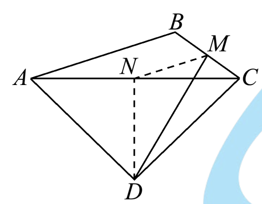
20.**解**：(1)在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理，得 $AC^2=AB^2+BC^2-2AB\times BC\times\cos\dfrac{2\pi}{3}=4+1-2\times2\times1\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)=7$.… …… 2 分

取 AC 中点 N，连接 DN，MN，

$\because AD=CD$，$AD\perp CD$，N 为 AC 的中点，

$\therefore DN\perp AC$，$DN=\dfrac{1}{2}AC$. ……………………………………………………………………………………………… 4 分

则 $\triangle ACD$ 的面积 $S_{\triangle ACD}=\dfrac{1}{2}\times AC\times DN=\dfrac{1}{4}AC^2=\dfrac{7}{4}$. ………………………………………………………… 5 分



(2)设 $\angle ABC=\alpha$，$\angle BAC=\beta$.

$\because M$，N 分别为边 BC，AC 的中点，

$\therefore MN\parallel AB$，$MN=\dfrac{1}{2}AB=1$，$\angle MNC=\angle BAC=\beta$. …………………………………………………… 6 分

在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理，得 $AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cdot\cos\alpha=5-4\cos\alpha$. ……………………………… 7 分

由正弦定理 $\dfrac{AC}{\sin\alpha}=\dfrac{BC}{\sin\beta}$，

得 $\sin\beta=\dfrac{BC\cdot\sin\alpha}{AC}=\dfrac{\sin\alpha}{AC}$. ……………………………………………………………………………………… 8 分

在 $\triangle MDN$ 中，$\cos\angle MND=\cos(\angle MNC+\angle CND)=\cos\left(\beta+\dfrac{\pi}{2}\right)=-\sin\beta$，

由余弦定理,得 $DM^2=MN^2+DN^2-2MN\cdot DN\cdot\cos\angle MND$

$=1+\frac{1}{4}AC^2+2\times1\times\frac{1}{2}AC\times\sin\beta$

$=1+\frac{1}{4}\times(5-4\cos\alpha)+2\times1\times\frac{1}{2}AC\times\frac{\sin\alpha}{AC}$.

$=\frac{9}{4}-\cos\alpha+\sin\alpha$, …………………………………………………………………………………………… 9 分

$=\frac{9}{4}+\sqrt{2}\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$,其中 $0<\alpha<\pi$,

当 $\alpha-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$,即 $\alpha=\frac{3}{4}\pi$ 时,DM 有最大值:

$\sqrt{\frac{9}{4}+\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{8+4\sqrt{2}+1}{4}}=\sqrt{\left(\frac{2\sqrt{2}+1}{2}\right)^2}=\frac{2\sqrt{2}+1}{2}$.

∴DM 长度的最大值为$\frac{2\sqrt{2}+1}{2}$. ……………………………………………………………………………… 12 分

21.(1)**证明**:$f(x)=x(a\ln x-x-1)=ax\ln x-x^2-x$ 的定义域为$(0,+\infty)$,

当 $a=1$ 时,$f'(x)=\ln x-2x$.……………………………………………………………………………………… 1 分

设 $g(x)=\ln x-2x$,则 $g'(x)=\frac{1}{x}-2=\frac{1-2x}{x}$,

由 $g(x)=0$,得 $x=\frac{1}{2}$,当 $0<x<\frac{1}{2}$时,$g'(x)>0$;当 $x>\frac{1}{2}$时,$g'(x)<0$.

∴$g(x)$在$\left(0,\frac{1}{2}\right)$上单调递增,在$\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$上单调递减,………………………………………………… 3 分

∴$g(x)$的最大值为 $g\left(\frac{1}{2}\right)=\ln\frac{1}{2}-1=-\ln 2-1<0$,

∴$g(x)<0$,即 $f'(x)<0$ 在$(0,+\infty)$上恒成立, ……………………………………………………………… 4 分

∴$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减. …………………………………………………………………………………… 5 分

(2)**解**:由 $f(x)+x=0$,得 $ax\ln x-x^2=0$.当 $a=0$ 时,得 $x^2=0$,此时两根相等,不满足题意,故 $a\neq0$,

$a\ln x=x\Rightarrow\frac{\ln x}{x}=\frac{1}{a}$. ……………………………………………………………………………………… 6 分

设 $h(x)=\frac{\ln x}{x}(x>0)$,则 $h'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$,

由 $h'(x)=0$,得 $x=\mathrm{e}$,

当 $x\in(0,\mathrm{e})$时,$h'(x)>0$,函数 $h(x)$单调递增,

当 $x\in(\mathrm{e},+\infty)$时,$h'(x)<0$,函数 $h(x)$单调递减,…………………………………………………………… 8 分

∴$h(x)$有极大值也是最大值 $h(\mathrm{e})=\frac{1}{\mathrm{e}}$.

当 $0<x<1$ 时,$h(x)<0$,当 $x>1$ 时,$h(x)>0$,且 $x\to+\infty$时,$h(x)\to0$. ………………………………… 10 分

要使 $f(x)+x=0$ 有两个不同的实数根 x_1,x_2,则 $0<\frac{1}{a}<\frac{1}{\mathrm{e}}$,

即 $a>\mathrm{e}$,即实数 a 的取值范围为$(\mathrm{e},+\infty)$. ………………………………………………………………… 12 分

22.**解**:(1)由$\begin{cases}x=5\sin\alpha,\\ y=3\cos\alpha,\end{cases}$消去 α 得$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$,

所以曲线 C 的普通方程为$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$. ………………………………………………………………… 2 分

(2)直线 l 的极坐标方程为$\rho=\frac{3}{\sqrt{2}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)}$,故其直角坐标方程为 $x-y+3=0$,显然点 $P(-1,2)$在直线 l 上,

直线 l 的参数方程为$\begin{cases}x=-1+\frac{\sqrt{2}}{2}t,\\ y=2+\frac{\sqrt{2}}{2}t.\end{cases}$ ………………………………………………………………… 5 分

把$\begin{cases}x=-1+\frac{\sqrt{2}}{2}t,\\ y=2+\frac{\sqrt{2}}{2}t,\end{cases}$代入$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$,整理得 $17t^2+41\sqrt{2}t-116=0$, ………………………………… 7 分

设点 A,点 B 对应的参数分别为 t_1,t_2,

则 $t_1+t_2=-\frac{41\sqrt{2}}{17}$,$t_1t_2=-\frac{116}{17}<0$,

所以$||PA|-|PB||=||t_1|-|t_2||=|t_1+t_2|=\frac{41\sqrt{2}}{17}$. ………………………………………………… 10 分

23.(1)**解**:当 $x\leqslant1$ 时,不等式可化为:$3-2x\leqslant5\Rightarrow x\in[-1,1]$, ………………………………………… 1 分

当 $1<x<2$ 时,不等式可化为 $1\leqslant5\Rightarrow x\in(1,2)$, ………………………………………………………… 2 分

当 $x\geqslant2$ 时,不等式可化为 $2x-3\leqslant5\Rightarrow x\in[2,4]$, ………………………………………………… 3 分

综上,$|x-1|+|x-2|\leqslant5$ 的解集为$[-1,4]$. ………………………………………………………… 5 分

(2)**证明**:$\because a+b+c=1$,$a,b,c\in\mathbf{R}^+$,

$\therefore\left(\frac{1}{a+b}-1\right)\left(\frac{1}{b+c}-1\right)\left(\frac{1}{c+a}-1\right)=\frac{c}{a+b}\times\frac{a}{b+c}\times\frac{b}{c+a}$. ………………………………………… 7 分

故$\frac{c}{a+b}\times\frac{a}{b+c}\times\frac{b}{c+a}\leqslant\frac{c}{2\sqrt{ab}}\times\frac{a}{2\sqrt{bc}}\times\frac{b}{2\sqrt{ca}}=\frac{1}{8}$. ………………………………………………… 9 分

当且仅当 $a=b=c=\frac{1}{3}$时,取等号. ………………………………………………………………… 10 分