2018 北京顺义区高三第一次统一练习

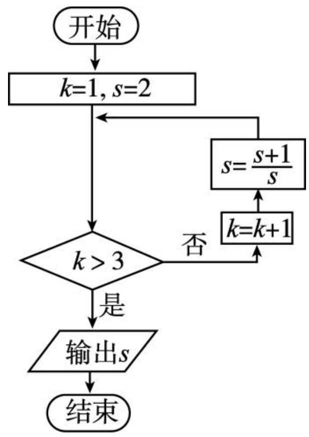
数　　学（理）

第一部分(选择题 共 40 分)

一、选择题（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分，在每小题给出的四个选项中，选出符合题目要求的一项）

1.　已知集合 $A=\{x||x|<3\}$，$B=\{x|x<-4$ 或 $x>1\}$，则 $A\cap B=$

A. $\{x|-4<x<-3\}$　　B. $\{x|-4<x<3\}$　　C. $\{x|-3<x<1\}$　　D. $\{x|1<x<3\}$



2. 若复数 $\dfrac{m+i}{1+i}$ 在复平面内对应的点在第四象限，则实数 m 的取值范围是

A. $(-\infty,-1)$　B. $(-1,1)$　C. $(1,+\infty)$　D. $(-1,+\infty)$

3. 执行如图所示的程序框图，输出的 s 值为

A. $\dfrac{13}{8}$　B. $\dfrac{8}{5}$　C. $\dfrac{5}{3}$　D. $\dfrac{3}{2}$

4. 已知点 $P(x,y)$ 的坐标满足条件 $\begin{cases}2x+3y-9\le 0,\\ 2x-3y+9\ge 0\\ y-1\ge 0,\end{cases}$，且点 P 在直线 $3x+y-m=0$ 上.

则 m 的取值范围是

A. $[-9,9]$　B. $[-8,9]$　C. $[-8,10]$　D. $[9,10]$

5. 已知向量 $\vec{a}=(1,m),\vec{b}=(4,-2)$，其中 $m\in R$，则"$m=1$"是"$\vec{a}\perp(\vec{a}-\vec{b})$"的

A. 充分而不必要条件　　B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

6. 已知 $x,y\in R$，且 $0<x<y<1$，则

A. $x^{-1}<y^{-1}<1$　　B. $1<\lg x<\lg y$

C. $(\dfrac{1}{2})^x<(\dfrac{1}{2})^y<2$　　D. $0<\sin x<\sin y$

7. 已知点 $A(0,-1),B(2,0)$，O 为坐标原点，点 P 在圆 $C:x^2+y^2=\dfrac{4}{5}$ 上. 若 $\overrightarrow{OP}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}$，则 $\lambda+\mu$ 的最小值为

A. -3　B. -1　C. 1　D. 3

8. 某食品的保鲜时间 y（单位：小时）与储藏温度 x（单位：$°C$）满足函数关系 $y=e^{kx+b}$（$e=2.718\cdots$ 为自然对数的底数，k,b 为常数）. 若该食品在 $0°C$ 的保鲜时间是 192 小时，在 $14°C$ 的保鲜时间是 48 小时，则该食品在 $21°C$ 的保鲜时间是

A. 16 小时　B. 20 小时　C. 24 小时　D. 28 小时

第二部分(非选择题 共 110 分)

二、填空题（本大题共 6 个小题，每小题 5 分，共 30 分）

9. 已知双曲线 $\dfrac{x^2}{m}-y^2=1$ 和椭圆 $\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 焦点相同, 则该双曲线的方程为________.

10. 在 $(3x-1)^6$ 的展开式中, x^2 的系数为________. (用数字作答)

11. 在 ΔABC 中, $AC=1, BC=3, A+B=60^0$,, 则 $AB=$ ________ .

12. 在极坐标系中, 直线 $\sqrt{3}\rho\cos\theta-\rho\sin\theta=0$ 与圆 $\rho=4\sin\theta$ 交于 A, B 两点, 则

$|AB|$ =______.

13. 在 1，2，3，4，5，6，7 这七个数字组成的没有重复数字的三位数中，至多有一个数字是奇数的共有___________个.（用数字作答）

14. 数列 $\{a_n\}$ 的各项排成如图所示的三角形形状，其中每一行比上一行增加两项，若 $a_n=a^n\ (a\neq 0)$， 则位于第 10 行的第 1 列的项等于_______， a_{2018} 在图中位于________.（填第几行的第几列）

a_1

a_2　a_3　a_4

a_5　a_6　a_7　a_8　a_9

……………………

三、解答题（本大题共 6 小题，共 80 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

15.（本小题满分 13 分）

已知函数 $f(x)=\sin(2x+\dfrac{\pi}{6})-2\cos^2 x$.

(I) 求 $f(x)$ 的最小正周期;

(II) 求 $f(x)$ 在区间 $\left[-\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{6}\right]$ 上的最大值.

16.（本小题满分 13 分）

已知 $\{a_n\}$ 是等差数列，$\{b_n\}$ 是单调递增的等比数列，且 $a_2=b_2=3, b_1+b_3=10, b_1b_3=a_5$.

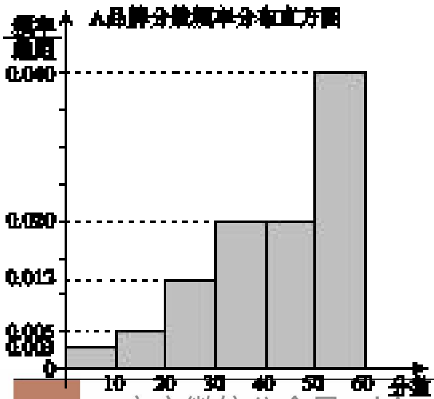
(I) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(II) 设 $c_n=a_{2n-1}+b_{2n-1}$，求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和.

17. （本小题满分 13 分）

为了解市民对 A，B 两个品牌共享单车使用情况的满意程度，分别从使用 A，B 两个品牌单车的市民中随机抽取了 100 人，对这两个品牌的单车进行评分，满分 60 分.

根据调查，得到 A 品牌单车评分的频率分布直方图，和 B 品牌单车评分的频数分布表：



B 品牌分数频数分布表

分数区间	频数
[0,10)	1
[10,20)	3
[20,30)	6
[30,40)	15
[40,50)	40
[50,60]	35

根据用户的评分，定义用户对共享单车评价的“满意度指数”如下：

评分	$[0,30)$	$[30,50)$	$[50,60]$
满意度指数	0	1	2

（Ⅰ）求对 A 品牌单车评价“满意度指数”为 0 的人数；

（Ⅱ）从该市同时使用 A，B 两个品牌单车的用户中随机抽取 1 人进行调查，试估计其对 A 品牌单车评价的“满意度指数”比对 B 品牌单车评价的“满意度指数”高的概率；

（Ⅲ）如果从 A，B 两个品牌单车中选择一个出行，你会选择哪一个？说明理由.

18. （本小题满分 13 分）

已知函数 $f(x)=x(\ln x-1)+\ln x+1$.

（Ⅰ）求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程；

（Ⅱ）若不等式 $x^2+x(m-f'(x))+1\geq 0$ 恒成立，求实数 m 的取值范围.

19. （本小题满分 14 分）

已知抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 经过点 $M(1,2)$，焦点为 F.

（Ⅰ）求抛物线 C 的方程，并求其焦点 F 的坐标；

（Ⅱ）若过点 $N(-1,0)$ 的直线 l 与 C 相交于 P,Q 两点，点 P 关于 x 轴的对称点为 S.

求证：S,F,Q 三点共线.

20.（本小题满分 14 分）

对于数列 $\{a_n\}$，如果存在一个数列 $\{b_n\}$，使得对于任意的 $n\in N^*$，都有 $a_n\geq b_n$，则把 $\{b_n\}$ 叫做 $\{a_n\}$ 的“基础数列”.

（Ⅰ）设 $a_n=n^2$，$b_n=2n-1$，求证：$\{b_n\}$ 是数列 $\{a_n\}$ 的“基础数列”；

（Ⅱ）设 $a_n=-n^2$，$\{b_n\}$ 是数列 $\{a_n\}$ 的“基础数列”，请判断 $\{b_n\}$ 是否可能为等差数列？并加以证明；

（Ⅲ）设 $a_n=n^3-n^2-2tn+t^2$ $(t\in R)$，$b_n=n^3-2n^2-n+\dfrac{5}{4}$，$(n\in N^*)$，且 $\{b_n\}$ 是 $\{a_n\}$ 的“基础数列”，求实数 t 的取值范围.

数学试题答案

一、 DCBC ADBC

二、9. $\frac{x^2}{7}-y^2=1$ 10.135 11. $\sqrt{13}$ 12. $2\sqrt{3}$ 13. 78

14. a^{82} ，第 45 行的第 82 列

三、

15. 解：(I) $f(x)=\sin 2x\cos\frac{\pi}{6}+\cos 2x\sin\frac{\pi}{6}-(1+\cos 2x)$ ……………………4 分

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x+\frac{1}{2}\cos 2x-1-\cos 2x$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x-\frac{1}{2}\cos 2x-1$ ……………………………………5 分

$=\sin(2x-\frac{\pi}{6})-1$ ……………………………………7 分

所以 $f(x)$ 的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$． ……………………………………8 分

(II) 因为 $-\frac{\pi}{3}\le x\le\frac{\pi}{6}$，

所以 $-\frac{5\pi}{6}\le 2x-\frac{\pi}{6}\le\frac{\pi}{6}$. ……………………………………10 分

当 $2x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$，即 $x=\frac{\pi}{6}$ 时， ……………………………………11 分

$f(x)$ 取得最大值为 $-\frac{1}{2}$． ……………………………………13 分

16. 解：(I) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 q．

由 $\begin{cases}b_2=3,\\ b_1+b_3=10,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}b_1q=3,\\ b_1+b_1q=10,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}b_1=1,\\ q=3.\end{cases}$ ……………………2 分

由 $\begin{cases}a_2=3,\\ b_1b_3=a_5,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}a_1+d=3,\\ a_1+4d=9,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a_1=1,\\ d=2.\end{cases}$ ……………………4 分

所以 $a_n=2n-1$. ……………………………………6 分

(II) 设数列$\{c_n\}$的前n项和为S_n.

由(I)可知$a_n=2n-1$，$b_n=b_1q^{n-1}=3^{n-1}$.

所以$a_{2n-1}=4n-3, b_{2n-1}=3^{2n-2}=9^{n-1}$.

所以$S_n=c_1+c_2+\cdots+c_n=(a_1+b_1)+(a_3+b_3)+\cdots+(a_{2n-1}+b_{2n-1})$

$=(a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1})+(b_1+b_3+\cdots+b_{2n-1})$

$=(1+5+9+\cdots+4n-3)+(1+9+9^2+\cdots+9^{n-1})$……………………10 分

$=\dfrac{n(1+4n-3)}{2}+\dfrac{1-9^n}{1-9}$ ……………………12 分

$=2n^2-n+\dfrac{9^n-1}{8}$. ……………………………13 分

17.解：（Ⅰ）由对 A 品牌单车评分的频率分布直方图，得

对 A 品牌评价“满意度指数”为 0 的频率为 $(0.003+0.005+0.012)\times10=0.2$，

所以，对 A 品牌评价“满意度指数”为 0 的人数为 $100\times0.2=20$ 人.

……………………3 分

（Ⅱ）设“对 A 品牌单车评价的‘满意度指数’比对 B 品牌单车评价的‘满意度指数’高”为事件 C.

记“对 A 品牌单车评价‘满意度指数’为 1”为事件 A_1；“对 A 品牌单车评价‘满意度指数’为 2”为事件 A_2；“对 B 品牌单车评价‘满意度指数’为 0”为事件 B_0；“对 B 品牌单车评价‘满意度指数’为 1”为事件 B_1. 由用频率估计概率得：

$P(A_1)=0.4$ ，$P(A_2)=0.4$ ，$P(B_0)=\frac{1+3+6}{100}=0.1$ ， $P(B_1)=\frac{14+40}{100}=0.55$.

…………………6 分

因为事件 A_i 与 B_j 相互独立，其中 $i=1,2$ ，$j=0,1$.

所以 $P(C)=P(A_1B_0+A_2B_0+A_2B_1)$

$$=P(A_1)P(B_0)+P(A_2)P(B_0)+P(A_2)P(B_1)$$

$$=0.4\times0.1+0.4\times0.1+0.4\times0.55=0.3 .$$

所以 该用户对 A 品牌评价的 "满意度指数" 比对 B 品牌评价的 "满意度指数" 高的概率为 0.3. …………………9 分

（Ⅲ）如果从用户对 A，B 两个品牌评价的 "满意度指数" 的期望角度看：

A 品牌 "满意度指数" X 的分布列为：

X	0	1	2
P	0.2	0.4	0.4

B 品牌 "满意度指数" Y 的分布列为：

Y	0	1	2
P	0.1	0.55	0.35

……………………………………11 分

因为 $E(X)=0\times0.2+1\times0.4+2\times0.4=1.2$ ；

$E(Y)=0\times0.1+1\times0.55+2\times0.35=1.25$ ，

所以 $E(X)<E(Y)$ ，所以会选择 B 品牌的单车出行． ………………13 分

注：本题答案不唯一．只要考生言之合理即可．

18.解：（Ⅰ）$\because f'(x)=\ln x-1+x\bullet\frac{1}{x}+\frac{1}{x}=\ln x+\frac{1}{x}$ ……………………..2 分

$\therefore f'(1)=0+1=1$　又$\because f(1)=(\ln 1-1)+\ln 1+1=0$ ……………………..4 分

$\therefore$曲线$y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线方程为$y=x-1$，即$x-y-1=0$

……………………..5 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）知$f'(x)=\ln x+\frac{1}{x}$，所以不等式$x^2+x(m-f'(x))+1\geq 0$可以化为：

$x^2+mx-x\ln x\geq 0$，而$x>0$，$\therefore$上式等价于$m\geq \ln x-x$ ……………7 分

令$g(x)=\ln x-x$，则$g'(x)=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}$，

当$g'(x)=0$时，$x=1$ ……………………..9 分

则x，$g'(x)$，$g(x)$随的变化而变化情况如下表：

x	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$g'(x)$	$+$	0	$-$
$g(x)$	↗	极大值	↘

由上表知$x=1$是$g(x)$的最大值点，即$g(x)\leq g(1)=-1$．所以$m\geq -1$

综上所述，实数m的取值范围是$[-1,+\infty)$. ……………………..13 分

19. 解：（Ⅰ）将点$M(1,2)$坐标代入抛物线方程$y^2=2px$得：$2p=4$ ……………2 分

$\therefore$抛物线C的方程为$y^2=4x$，焦点坐标为$F(1,0)$ ----------4 分

（Ⅱ）方法一：设设直线l的方程为$y=k(x+1)$，联立方程组$\begin{cases}y=k(x+1)\\ y^2=4x\end{cases}$

消去y得：$k^2x^2+(2k^2-4)x+k^2=0$ ……………………5 分

设$P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2)$，则$S(x_1,-y_1)$，则$x_1+x_2=-\frac{2k^2-4}{k^2}$，$x_1x_2=1$---7 分

$\because k_{FQ}=\frac{y_2}{x_2-1},k_{FS}=\frac{-y_1}{x_1-1}$， ……………………9 分

$\therefore k_{FQ}-k_{FS}=\dfrac{y_2}{x_2-1}+\dfrac{y_1}{x_1-1}=\dfrac{k(x_2+1)(x_1-1)+k(x_1+1)(x_2-1)}{(x_1-1)(x_2-1)}$

$=\dfrac{2k(x_1x_2-1)}{(x_1-1)(x_2-1)}=0$ ……………………13 分

即 $k_{FQ}=k_{FS}$，$\therefore S,F,Q$ 三点共线--14 分

方法二：设直线 l 的方程为 $y=k(x+1)$ 代入 $y^2=4x$ 得

$k^2x^2+(2k^2-4)x+k^2=0$ ……………………5 分

设 $P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2)$，则 $S(x_1,-y_1)$

$\therefore x_1+x_2=-\dfrac{2k^2-4}{k^2}$，$x_1x_2=1$，则 $\dfrac{y_1^2}{4}\bullet\dfrac{y_2^2}{4}=1$，即 $y_1y_2=4$ -----7 分

$\because k_{SQ}=\dfrac{y_2+y_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y_2+y_1}{\dfrac{y_2^2-y_1^2}{4}}=\dfrac{4}{y_2-y_1}$， ……………………9 分

$\therefore$ 直线 SQ 的方程为 $y=\dfrac{4}{y_2-y_1}(x-x_1)-y_1=\dfrac{4\left(x-\dfrac{y_1^2}{4}\right)-y_1y_2+y_1^2}{y_2-y_1}$ ---11 分

当 $x=1$ 时，$4\left(1-\dfrac{y_1^2}{4}\right)-y_1y_2+y_1^2=4-y_1^2-4+y_1^2=0$

$\therefore$ 直线 SQ 过抛物线焦点 $F(1,0)$，即 S,F,Q 三点共线. ……………………14 分

20. 证明:（Ⅰ）因为 $a_n-b_n=n^2-2n+1=(n-1)^2$，

所以，对于任意的 $n\in N^*$，都有 $a_n-b_n\geq 0$， ……………………2 分

即对于任意的 $n\in N^*$，都有 $a_n\geq b_n$，

因此，$\{b_n\}$ 是数列 $\{a_n\}$ 的 "基础数列" . ………………………………3 分

（Ⅱ）假设数列$\{b_n\}$是等差数列，则$b_n=kn+b$，（k,b是实常数）. ....4 分

由于$\{b_n\}$是数列$\{a_n\}$的基础数列，则$-n^2\ge kn+b$对于任意的$n\in N^*$均成立，

即$n^2+kn+b\le 0$对于任意的$n\in N^*$均成立，与二次函数的图像和性质相矛盾，

所以，假设不成立，所以$\{b_n\}$不可能为等差数列。 .... 8 分

（Ⅲ）$f(n)=a_n-b_n=n^2-(2t-1)n+t^2-\dfrac{5}{4}$，

$\because$ $\{b_n\}$是$\{a_n\}$的基础数列， $\therefore$ $f(n)\ge 0$任意的$n\in N^*$均成立， ....10 分

令$f(x)=x^2-(2t-1)x+t^2-\dfrac{5}{4}$，

$\Delta=(2t-1)^2-4(t^2-\dfrac{5}{4})=-4t+6$

（1）当$\Delta\le 0$时，即$t\ge\dfrac{3}{2}$时，$f(x)\ge 0$对任意$x\in R$恒成立，即$f(n)\ge 0$对任意的$n\in N^*$均成立，亦即$\{b_n\}$是$\{a_n\}$的基础数列; .... 11 分

（2）当$\Delta>0$时，即$t<\dfrac{3}{2}$时，$\dfrac{2t-1}{2}<1$，即二次函数$f(x)$的对称轴在$x=1$的左端，

此时，$f(n)\ge 0$任意的$n\in N^*$均成立的等价条件是$f(1)\ge 0$,

即$1-(2t-1)+t^2-\dfrac{5}{4}\ge 0$，

亦即$t^2-2t+\dfrac{3}{4}\ge 0$，解得$t\le\dfrac{1}{2}$或$t\ge\dfrac{3}{2}$， $\therefore$ $t\le\dfrac{1}{2}$， .... 13 分

由（1）（2）可知，t的取值范围是$\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\right]\cup\left[\dfrac{3}{2},+\infty\right)$. .... 14 分