2019—2020 学年度上学期高三年级期中考试

数学（文科）试卷

命题人：刘静祎　　审核人：方海燕

第Ⅰ卷（选择题 共 60 分）

一、选择题（每小题5分，共60分。下列每小题所给选项只有一项符合题意，请将正确答案的序号填涂在答题卡上）

1. 下列函数中，既是偶函数又在$(0,+\infty)$上单调递增的是(　　)

A. $y=\ln|x|$　　B. $y=-x^2$　　C. $y=e^x$　　D. $y=\cos x$

2. 等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，已知$a_1=-100, 5S_7-7S_5=70$，则$S_{101}=$(　　)

A. 100　B. 50　C. 0　D. -50

3. 已知曲线$f(x)=x\cos x+3x$在点$(0,f(0))$处的切线与直线$ax+4y+1=0$垂直，则实数a的值为（　　）

A. -4　　B. -1　　C. 1　　D. 4

4. 在ΔABC中，D是AB边上一点，$\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{DB}$，且$\overrightarrow{CD}=\lambda\overrightarrow{AC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$，则$\lambda$的值为（　　）

A. $\frac{1}{4}$　　B. $-\frac{1}{4}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $-\frac{1}{3}$

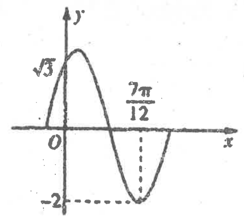
5. 已知双曲线离心率$e=2$，与椭圆$\frac{x^2}{24}+\frac{y^2}{8}=1$有相同的焦点，则该双曲线渐近线方程是( )

A. $y=\pm\frac{1}{3}x$　　B. $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}x$　　C. $y=\pm\sqrt{3}x$　　D. $y=\pm2\sqrt{3}x$

6. 已知角α满足$\cos(\alpha+\frac{\pi}{6})=\frac{1}{3}$，则$\sin(2\alpha-\frac{\pi}{6})=$（　　）

A. $-\frac{4\sqrt{2}}{9}$　　B. $\frac{4\sqrt{2}}{9}$　　C. $-\frac{7}{9}$　　D. $\frac{7}{9}$

7. 已知函数$f(x)=A\sin(wx+\varphi)(A>0,\omega>0,0<\varphi<\frac{\pi}{2})$的部分图象如图所示，则$f(\frac{3\pi}{4})=$（　）



A. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B. $-\frac{1}{2}$　　C. -1　　D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

8. 已知各项不为 0 的等差数列$\{a_n\}$满足$a_5-2a_7^2+2a_8=0$，数列$\{b_n\}$是等比数列且$b_7=a_7$，则b_2b_{12}等于（　　）

A. $\frac{4}{9}$　　B. $\frac{3}{2}$　　C. $\frac{9}{4}$　　D. $\frac{2}{3}$

9. 已知点 P 为双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$右支上一点，点 F_1，F_2 分别为双曲线的左右焦点，点 I 是ΔPF_1F_2的内心（三角形内切圆的圆心），若恒有$S_{\Delta IPF_1}-S_{\Delta IPF_2}\geq\frac{\sqrt{2}}{2}S_{\Delta IF_1F_2}$成立，则双曲线的离心率取值范围是（　　）

A.（1，$\sqrt{2}$）　　B.（1，$2\sqrt{2}$）

C.（1，$2\sqrt{2}$]　　D.（1，$\sqrt{2}$]

10. 函数$f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$向右平移$\varphi(0\leq\varphi\leq\pi)$个单位后得到函数$g(x)$，若$g(x)$在$\left(-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right)$上单调递增，则$\varphi$的取值范围是（）

A. $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$　　B. $\left[0,\frac{2\pi}{3}\right]$　　C. $\left[\frac{\pi}{4},\frac{2\pi}{3}\right]$　　D. $\left[\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{4}\right]$

11. 已知函数 $f(x)=(x^2-2x)e^{x-1}$，若当 $x>1$ 时，$f(x)-mx+1+m\le 0$ 有解，则 m 的取值范围为（　　）

A. $m\le 1$　　B. $m<-1$　　C. $m>-1$　　D. $m\ge 1$

12. 在平面直角坐标系 xOy 中，圆 C_1：$x^2+y^2=4$，圆 C_2：$x^2+y^2=6$，点 $M(1,0)$，动点 A，B 分别在圆 C_1 和圆 C_2 上，且 $MA\perp MB$，N 为线段 AB 的中点，则 MN 的最小值为（　　）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

第Ⅱ卷（共90分）

二、填空题：（本大题共 4 小题，每题 5 分，共 20 分）

13. 已知向量 $\vec{a}=(\sqrt{3},-1)$，$\vec{b}=(\sqrt{3},1)$，则 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 方向上的投影为__________

14. 若函数 $f(x)=e^x(x-3)-\frac{1}{3}kx^3+kx^2$ 只有一个极值点，则 k 的取值范围为_______

15. 已知抛物线 $E:y^2=12x$ 的焦点为 F，准线为 l，过 F 的直线 m 与 E 交于 A，B 两点，过 A 作 $AM\perp l$，垂足为 M，AM 的中点为 N，若 $AM\perp FN$，则 $|AB|=$__

16. 数列 $\{a_n\}$ 为 1，1，2，1，1，2，3，1，1，2，1，1，2，3，4，…，首先给出 $a_1=1$，接着复制该项后，再添加其后继数 2，于是 $a_2=1$，$a_3=2$，然后再复制前面所有的项 1，1，2，再添加 2 的后继数 3，于是 $a_4=1$，$a_5=1$，$a_6=2$，$a_7=3$，接下来再复制前面所有的项 1，1，2，1，1，2，3，再添加 4，…，如此继续，则 $a_{2019}=$______.

三、解答题：（本大题共6小题，共70分，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。）

17.（本小题满分 10 分）

已知 ΔABC 的面积为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，且 $\overline{AB}\cdot\overline{AC}=-1$ 且 $AB>AC$

（1）求角 A 的大小；

（2）设 M 为 BC 的中点，且 $AM=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\angle BAC$ 的平分线交 BC 于 N，求线段 MN 的长度。

18.（本小题满分 12 分）

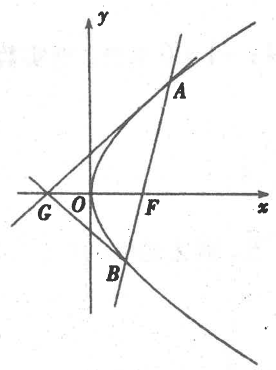
已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，等比数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n，且 $a_1=1, b_1=1, a_2+b_2=4$.

（1）若 $a_3+b_3=7$，求 $\{b_n\}$ 的通项公式；

（2）若 $T_3=13$，求 S_5.

19.（本小题满分 12 分）

已知点 F 为抛物线 E：$y^2=2px(p>0)$ 的焦点，点 $A(2, m)$ 在抛物线 E 上，且 $|AF|=3$.



(1)求抛物线 E 的方程；

(2)已知点 $G(-1, 0)$，延长 AF 交抛物线 E 于点 B，证明：以点 F 为圆心且与直线 GA 相切的圆必与直线 GB 相切.

20．（本小题满分 12 分）

已知数列$\{a_n\}$的各项均为正数，对任意$n\in\mathbf{N}^*$，它的前n项和S_n满足$S_n=\frac{1}{6}(a_n+1)(a_n+2)$，并且$a_2$，$a_4$，$a_9$成等比数列.

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）设$b_n=(-1)^{n+1}a_na_{n+1}$，T_n为数列$\{b_n\}$的前n项和，求T_{2n}.

21．（本小题满分 12 分）

已知函数$f(x)=(x-1)\ln x$，$g(x)=x-\ln x-\frac{3}{\mathrm{e}}$.

（Ⅰ）求函数$f(x)$的单调区间；

（Ⅱ）令$h(x)=mf(x)+g(x)(m>0)$两个零点$x_1,x_2(x_1<x_2)$，证明：$x_1+e>x_2+\frac{1}{\mathrm{e}}$.

22．（本小题满分 12 分）

在平面直角坐标系xOy中，已知椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的焦距为 4，且过点$(2,\sqrt{2})$.

（1）求椭圆C的方程

（2）设椭圆C的上顶点为B，右焦点为F，直线l与椭圆交于M、N两点，问是否存在直线l，使得F为ΔBMN的垂心，若存在，求出直线l的方程；若不存在，说明理由.

上学期期中考试文科数学答案

ACCDC　　DCC DD　　CA

13. 1

14. $[0,e]\cup\left\{\frac{e^2}{2}\right\}$

15. 16

16. 1

由数列$\{a_n\}$的构造方法可知$a_1=1$，$a_3=2$，$a_7=3$，$a_{15}=4$，

可得：$a_{2^n-1}=n$

即：$a_{2^{n-1}+k}=a_k\left(1\le k<2^n-1\right)$

$\therefore a_{2019}=a_{996}=a_{485}=a_{230}=a_{103}=a_{40}=a_9=a_2=1$

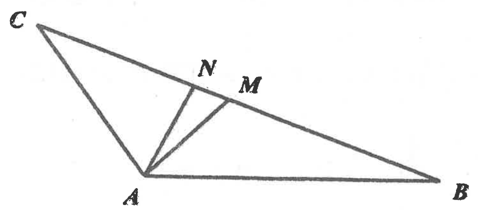
17、(1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-1$　　$\Rightarrow\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot\cos A=bc\cos A=-1$

又$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$，即$bc\sin A=\sqrt{3}$

$\therefore\frac{bc\sin A}{bc\cos A}=\frac{\sin A}{\cos A}=\tan A=-\sqrt{3}$

又$A\in(0,\pi)$　　$\therefore A=\frac{2\pi}{3}$

（2）如下图所示：



在ΔABC中，AM为中线　　$\therefore 2\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$

$\therefore 4\left|\overrightarrow{AM}\right|^2=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)^2=\left|\overrightarrow{AB}\right|^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\left|\overrightarrow{AC}\right|^2=c^2+b^2$

$\therefore b^2+c^2=5$

由（1）知：$bc\sin A=\sqrt{3}$　　$\Rightarrow bc=2$

又$c>b$　　$\therefore c=2$，$b=1$

由余弦定理可得：$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=5+2=7$

$\Rightarrow a=\sqrt{7}$

$S_{\Delta ANC}=\frac{1}{2}|AN|\cdot b\sin\angle CAN=\frac{1}{2}|AN|\sin\angle CAN$

$S_{\Delta BAN}=\frac{1}{2}|AN|\cdot c\sin\angle BAN=|AN|\sin\angle BAN$

又$\angle CAN=\angle BAN$

$\therefore\frac{S_{\Delta ANC}}{S_{\Delta BAN}}=\frac{|CN|}{|BN|}=\frac{1}{2}$，又$|CN|+|BN|=a=\sqrt{7}$

$\therefore|CN|=\frac{\sqrt{7}}{3}$

$\therefore|MN|=|CM|-|CN|=\frac{1}{2}a-|CN|=\frac{\sqrt{7}}{2}-\frac{\sqrt{7}}{3}=\frac{\sqrt{7}}{6}$

【点睛】

18、【答案】(1) $b_n=2^{n-1}$；(2) 5或75.

【解析】

【分析】

(1)设等差数列$\{a_n\}$公差为d，等比数列$\{b_n\}$公比为$q(q\neq0)$，由已知条件求出q，再写出通项公式；(2) 由$T_{13}=13$，求出q的值，再求出d的值，求出S_5.

【详解】

设等差数列$\{a_n\}$公差为d，等比数列$\{b_n\}$公比为$q(q\neq0)$有$(1+d)+q=4$，即$d+q=3$.

(1) $\because(1+2d)+q^2=7$，结合$d+q=3$得$q=2$，

$\therefore b_n=2^{n-1}$.

(2) $\because T_3=1+q+q^2=13$，解得$q=-4$或3，

当$q=-4$时，$d=7$，此时$S_5=5+\frac{5\times4}{2}\times7=75$；

当$q=3$时，$d=0$，此时$S_5=5a_1=5$.

19、【答案】(1) $y^2=4x$. (2) 见证明

【解析】

【分析】

(1)$|AF|=2+\frac{p}{2}$即$2+\frac{p}{2}=3$，解得$p=2$，所以抛物线E的方程为$y^2=4x$.

(2) 由抛物线的对称性，不妨设$A(2,2\sqrt{2})$. 联立方程得到$B\left(\frac{1}{2},-\sqrt{2}\right)$，计算以$k_{GA}+k_{GB}=0$，从而$\angle AGF=\angle BGF$，得到结论.

【详解】

(1)解：由抛物线的定义知$|AF|=2+\frac{p}{2}$.

因为$|AF|=3$，即$2+\frac{p}{2}=3$，解得$p=2$，

所以抛物线E的方程为$y^2=4x$.

(2)证明：证法一：因为点$A(2，m)$在抛物线E：$y^2=4x$上，

所以$m=\pm2\sqrt{2}$.

由抛物线的对称性，不妨设$A(2,2\sqrt{2})$.

由$A(2,2\sqrt{2})$，$F(1,0)$可得直线AF的方程为$y=2\sqrt{2}(x-1)$.

由$\begin{cases}y=2\sqrt{2}(x-1)\\y^2=4x\end{cases}$得$2x^2-5x+2=0$，解得$x=2$或$x=\frac{1}{2}$，从而$B\left(\frac{1}{2},-\sqrt{2}\right)$.

又 $G(-1，0)$，所以

$$k_{GA}=\frac{2\sqrt{2}-0}{2-(-1)}=\frac{2\sqrt{2}}{3}，k_{GB}=\frac{-\sqrt{2}-0}{\frac{1}{2}-(-1)}=-\frac{2\sqrt{2}}{3}，$$

所以 $k_{GA}+k_{GB}=0$，从而 $\angle AGF=\angle BGF$，

这表明点 F 到直线 GA，GB 的距离相等，

故以 F 为圆心且与直线 GA 相切的圆必与直线 GB 相切.

证法二：设以点 F 为圆心且与直线 GA 相切的圆的半径为 r.

因为点 $A(2，m)$在抛物线 E：$y^2=4x$ 上，所以 $m=\pm2\sqrt{2}$.

由抛物线的对称性，不妨设 $A(2，2\sqrt{2})$.

由 $A(2，2\sqrt{2})$，$F(1,0)$可得，直线 AF 的方程为 $y=2\sqrt{2}(x-1)$.

由 $\begin{cases}y=2\sqrt{2}(x-1)\\y^2=4x\end{cases}$ 得 $2x^2-5x+2=0$，解得 $x=2$ 或 $x=\frac{1}{2}$，从

而 $B\left(\frac{1}{2},-\sqrt{2}\right)$.

又 $G(-1，0)$，故直线 GA 的方程为 $2\sqrt{2}x-3y+2\sqrt{2}=0$，

从而 $r=\frac{|2\sqrt{2}+2\sqrt{2}|}{\sqrt{8+9}}=\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{17}}$.

又直线 GB 的方程为 $2\sqrt{2}x+3y+2\sqrt{2}=0$，

所以点 F 到直线 GB 的距离 $d=\frac{|2\sqrt{2}+2\sqrt{2}|}{\sqrt{8+9}}=\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{17}}=r$.

这表明以点 F 为圆心且与直线 GA 相切的圆必与直线 GB 相切.

【点睛】

本题考查了抛物线方程，证明直线与圆相切，计算 $k_{GA}+k_{GB}=0$，从而 $\angle AGF=\angle BGF$ 是解题的关键.

20、【答案】(1) $a_n=3n-2$，$n\in\mathbf{N}^*$ (2) $-18n^2-6n$

【解析】

【分析】

(1) 根据 a_n 与 S_n 的关系，利用临差法得到 $a_n-a_{n-1}=3$，知公差为3；再由 $n=1$ 代入递推关系求 a_1；

(2) 观察数列 $\{b_n\}$ 的通项公式，相邻两项的和有规律，故采用并项求和法，求其前 $2n$ 项和.

【详解】

(1) $\because$ 对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，有 $S_n=\frac{1}{6}(a_n+1)(a_n+2)$，①

$\therefore$ 当 $a=1$ 时，有 $S_1=a_1=\frac{1}{6}(a_1+1)(a_1+2)$，解得 $a_1=1$ 或 2.

当 $n\geq2$ 时，有 $S_{n-1}=\frac{1}{6}(a_{n-1}+1)(a_{n-1}+2)$.②

①-②并整理得 $(a_n+a_{n-1})(a_n-a_{n-1}-3)=0$.

而数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数，$\therefore a_n-a_{n-1}=3$.

当 $a_1=1$ 时，$a_n=1+3(n-1)=3n-2$，

此时 $a_4^2=a_2a_9$ 成立；

当 $a_1=2$ 时，$a_n=2+3(n-1)=3n-1$，此时 $a_4^2=a_2a_9$，不成立，舍去.

$\therefore a_n=3n-2$，$n\in\mathbf{N}^*$.

(2)

$T_{2n}=b_1+b_2+\cdots+b_{2n}=$

$a_1a_2-a_2a_3+a_3a_4-a_4a_5+\cdots-a_{2n}a_{2n+1}$

$=a_2(a_1-a_3)+a_4(a_3-a_5)+\cdots+a_{2n}(a_{2n-1}-a_{2n+1})$

$=-6a_2-6a_4-\cdots-6a_{2n}$

$=-6(a_2+a_4+\cdots+a_{2n})$

$=-6\times\frac{n(4+6n-2)}{2}=-18n^2-6n$.

21、【答案】(Ⅰ) $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $[1,+\infty)$ 上单调递增.(Ⅱ) 见证明

【解析】

【分析】

(Ⅰ) 求得函数的导数 $f'(x)=\ln x+1-\frac{1}{x}$，且 $f'(1)=0$，进而利用导数的符号，即可求得函数单调区间；

(Ⅱ) 由 $h(x)=m(x-1)\ln x+x-\ln x-\frac{3}{e}$ 有两个零点，利用导数求得函数 $h(x)$ 的单调性与最值，结合图象，即可得出证明.

【详解】

(Ⅰ) 由题意，函数 $f(x)=(x-1)\ln x$，则 $f'(x)=\ln x+1-\frac{1}{x}$，

且 $f'(1)=0$，

当 $0<x<1$ 时，$f'(x)<0$，函数 $f(x)$ 单调递减；

当 $x\geq1$ 时，$f'(x)\geq0$，函数 $f(x)$ 单调递增；

所以函数 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $[1,+\infty)$ 上单调递增.

(Ⅱ) 由 $h(x)=m(x-1)\ln x+x-\ln x-\frac{3}{e}$ 有两个零点可知

由 $h'(x)=m(1+\ln x-\frac{1}{x})+1-\frac{1}{x}$ 且 $m>0$ 可知，

当 $0<x<1$ 时，$h'(x)<0$，函数 $h(x)$ 单调递减；

当 $x\geq1$ 时，$h'(x)\geq0$，函数 $h(x)$ 单调增；

即 $h(x)$ 的最小值为 $h(1)=1-\frac{3}{e}<0$，

因此当$x=\frac{1}{e}$时，

$h(\frac{1}{e})=m(\frac{1}{e}-1)(-1)+\frac{1}{e}-(-1)-\frac{3}{e}=\frac{m(e-1)+e-2}{e}>0$，

可知$h(x)$在$(\frac{1}{e},1)$上存在一个零点；

当$x=e$时，$h(e)=m(e-1)+e-1-\frac{3}{e}>0$，

可知$h(x)$在$(1,e)$上也存在一个零点，

因此$x_2-x_1<e-\frac{1}{e}$，即$x_1+e>x_2+\frac{1}{e}$。

【详解】

（1）由已知可得，

$$\begin{cases}2c=4\\ \frac{4}{a^2}+\frac{2}{b^2}=1\\ a^2=b^2+c^2\end{cases}$$

解得$a^2=8$，$b^2=4$，$c=2$，所以椭圆C的方程为$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$.

（2）由已知可得，$B(0，2)$，$F(2，0)$，$\therefore k_{BF}=-1$.$\because$ $BF\perp l$，

$\therefore$可设直线l的方程为$y=x+m$，代入椭圆方程整理，

得$3x^2+4mx+2m^2-8=0$.设$M\left(x_1，y_1\right)$，$N\left(x_2，y_2\right)$，

则$x_1+x_2=-\frac{4m}{3}$，$x_1x_2=\frac{2m^2-8}{3}$，$\because$

$BN\perp MF$，$\therefore\frac{y_1}{x_1-2}\cdot\frac{y_2-2}{x_2}=-1$。

即$y_1y_2+x_1x_2-2y_1-2x_2=0$

$\because$

$y_1=x_1+m,y_2=x_2+m$，$\therefore\left(x_1+m\right)\left(x_2+m\right)+x_1x_2-2\left(x_1+m\right)$

即$2x_1x_2+(m-2)\left(x_1+x_2\right)+m^2-2m=0$，$\because$

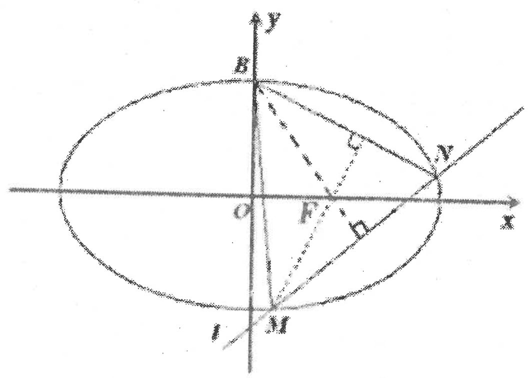
$2\cdot\frac{2m^2-8}{3}+(m-2)\cdot\frac{-4m}{3}+m^2-2m=0$

$\therefore 3m^2+2m-16=0$，$\therefore m=-\frac{8}{3}$或$m=2$.

由$\Delta=(4m)^2-12\left(2m^2-8\right)=96-8m^2>0$，得$m^2<12$

又$m=2$时，直线l过B点，不合要求，$\therefore m=-\frac{8}{3}$，

故存在直线$l:y=x-\frac{8}{3}$满足题设条件.



【点睛】

本题主要考查椭圆方程的求法，直线与椭圆的位置关系应用，以及垂心的定义应用。意在考查学生的数学运算能力。