保密★启用前　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　试卷类型：A

2021 年深圳市高三年级第二次调研考试

数　学

2021．4

本试卷共 6 页，22 小题，满分 150 分。考试用时 120 分钟。

注意事项：

1．答卷前，考生务必用黑色字迹的签字笔在答题卡指定位置填写自己的学校、姓名和考生号，并将条形码正向准确粘贴在答题卡的贴条形码区，请保持条形码整洁、不污损.

2．选择题每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答案涂在答题卷相应的位置上.

3．非选择题必须用 0.5 毫米黑色字迹的签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新的答案；不准使用铅笔和涂改液. 不按以上要求作答的答案无效.

4．考生必须保持答题卡的整洁，考试结束后，将答题卡交回.

一、单项选择题：本题共 8 道小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．已知 $A=\{x\in\mathbf{N}|x<7\}$，$B=\{5,6,7,8\}$，则集合 $A\cup B$ 中的元素个数为

A. 7　　　　B. 8　　　　C. 9　　　　D. 10

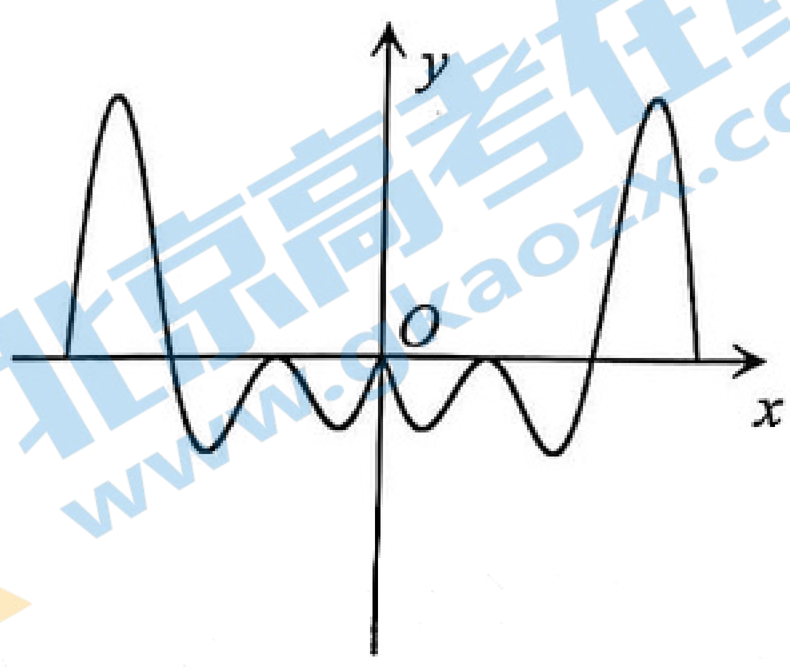
2．已知复数 $z=1+\sqrt{2}\mathrm{i}$（i 为虚数单位），设 $\overline{z}$ 是 z 的共轭复数，则 $z\cdot\overline{z}=$

A. $\sqrt{2}$　　　　B. $\sqrt{3}$　　　　C. 2　　　　D. 3

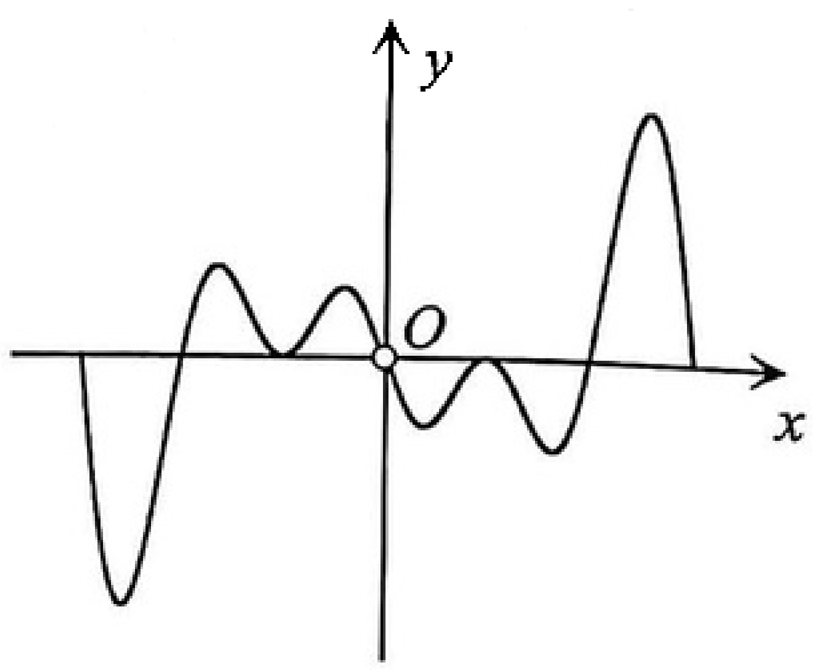
3．五一国际劳动节放假三天，甲、乙两名同学计划去敬老院做志愿者，若甲同学在三天中随机选一天，乙同学在前两天中随机选一天，且两名同学的选择互不影响，则他们在同一天去的概率为

A. $\frac{1}{6}$　　　　B. $\frac{1}{3}$　　　　C. $\frac{1}{2}$　　　　D. $\frac{2}{3}$

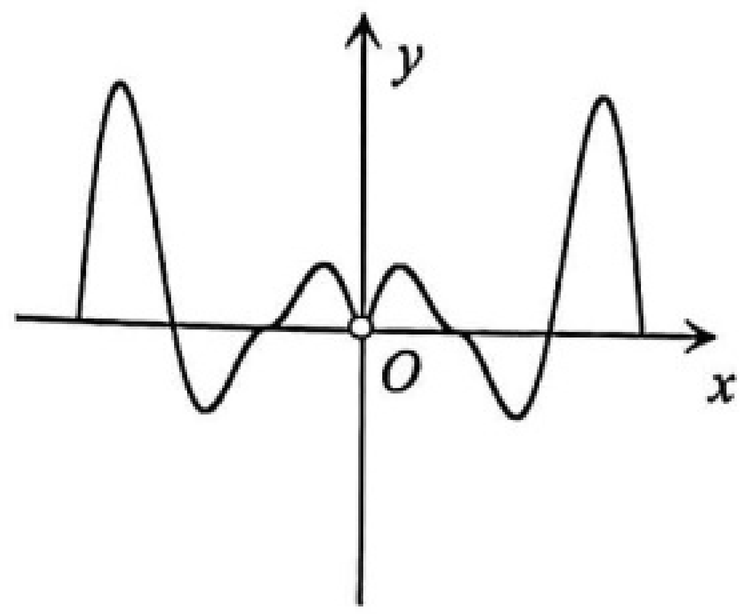
4．函数 $y=x^{\frac{2}{3}}\cdot\sin(\pi x)\cdot\log_2|x|$ 的图象大致为



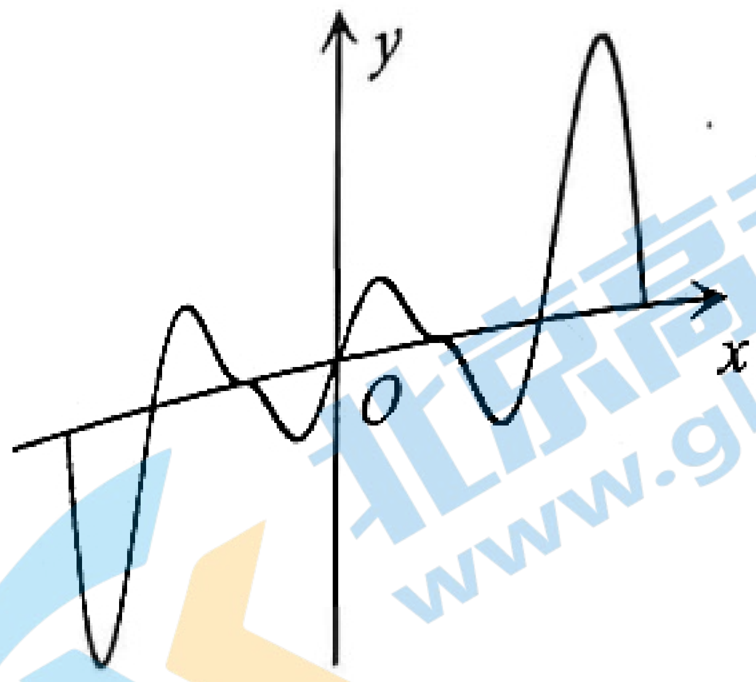
A



B



C



D

5. 已知 $\cos x=\dfrac{1}{3}$，则 $\sin(2x-\dfrac{\pi}{2})=$

A. $\dfrac{7}{9}$　　B. $-\dfrac{7}{9}$　　C. $\dfrac{8}{9}$　　D. $-\dfrac{8}{9}$

6. 设 α，β 为两个不同的平面，直线 $l\subset\alpha$，则“$l/\!/\beta$”是“$\alpha/\!/\beta$”的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

7. F_1、F_2 分别为双曲线 $C:x^2-\dfrac{y^2}{2}=1$ 的左、右焦点，过 F_1 的直线 l 与 C 的左、右两支曲线分别交于 A、B 两点，若 $l\perp F_2B$，则 $\overrightarrow{F_2A}\cdot\overrightarrow{F_2B}=$

A. $4-2\sqrt{3}$　　B. $4+\sqrt{3}$　　C. $6-2\sqrt{5}$　　D. $6+2\sqrt{5}$

8. 在一个正三角形的三边上，分别取一个距顶点最近的十等分点，连接形成的三角形也为正三角形（如图1所示，图中共有2个正三角形）. 然后在较小的正三角形中，以同样的方式形成一个更小的正三角形，如此重复多次，可得到如图2所示的优美图形（图中共有11个正三角形），这个过程称之为迭代. 在边长为243的正三角形三边上，分别取一个三等分点，连接成一个较小的正三角形，然后迭代得到如图3所示的图形（图中共有10个正三角形），其中最小的正三角形面积为

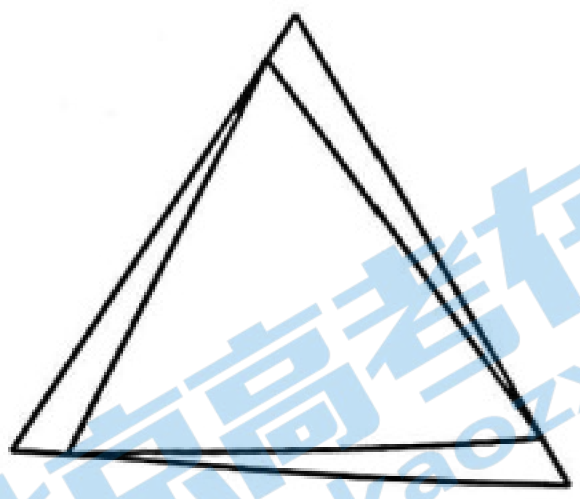


图1

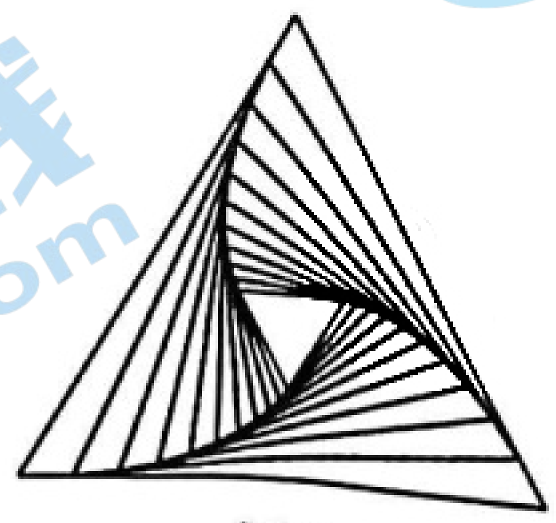


图2

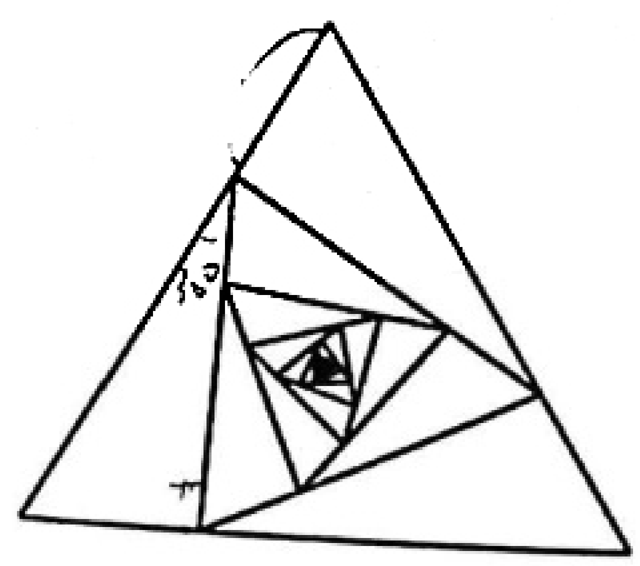


图3

A. $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$　　B. 1　　C. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9．设直线 $l: y=kx+1(k\in\mathbf{R})$ 与圆 $C: x^2+y^2=5$，则下列结论正确的为

A．l 与 C 可能相离

B．l 不可能将 C 的周长平分

C．当 $k=1$ 时，l 被 C 截得的弦长为 $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

D．l 被 C 截得的最短弦长为 4

10．为方便顾客购物，某网上购鞋平台统计了鞋号 y（单位：码）与脚长 x（单位：毫米）的样本数据 (x_i, y_i)，发现 y 与 x 具有线性相关关系，用最小二乘法求得回归方程为 $y=0.2x-10$，则下列结论中正确的为

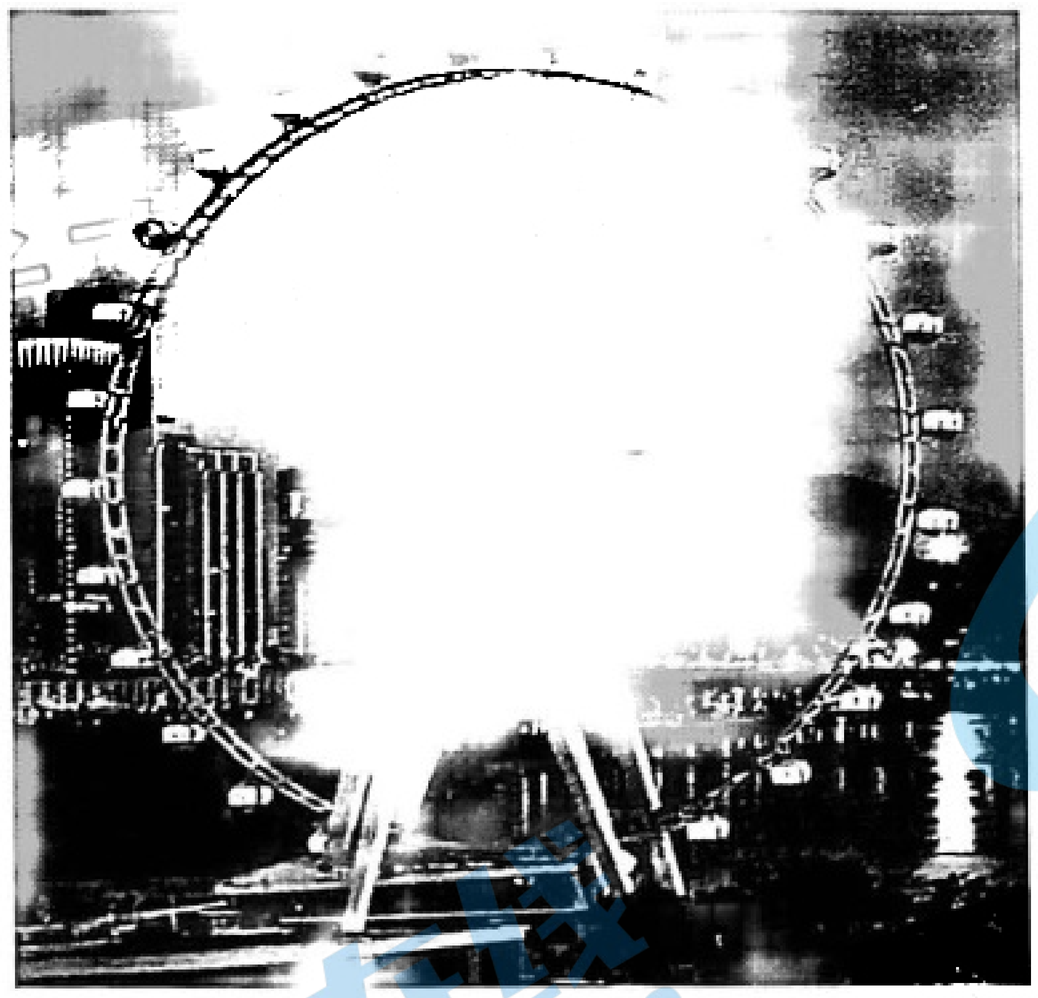
A．回归直线过样本点的中心 $(\bar{x}, \bar{y})$

B．y 与 x 可能具有负的线性相关关系

C．若某顾客的鞋号是 40 码，则该顾客的脚长约为 250 毫米

D．若某顾客的脚长为 262 毫米，在“不挤脚”的前提下，应选择 42 码的鞋

11．摩天轮常被当作一个城市的地标性建筑，如深圳前海的“湾区之光”摩天轮，如图所示，某摩天轮最高点离地面高度 128 米，转盘直径为 120 米，设置若干个座舱，游客从离地面最近的位置进舱，开启后按逆时针匀速旋转 t 分钟，当 $t=15$ 时，游客随舱旋转至距离地面最远处．以下关于摩天轮的说法中，正确的为



（第 11 题图）

A．摩天轮离地面最近的距离为 4 米

B．若旋转 t 分钟后，游客距离地面的高度为 h 米，则 $h=-60\cos(\dfrac{\pi}{15}t)+68$

C．若在 t_1，t_2 时刻，游客距离地面的高度相等，则 t_1+t_2 的最小值为 30

D．$\exists t_1, t_2\in[0,20]$，使得游客在该时刻距离地面的高度均为 90 米

12. 设函数 $f(x)=e^x-ex$ 和 $g(x)=\ln x-kx^2+(1-2k)x+\frac{1}{2}$ $(k\in\mathbf{R})$，其中 e 是自然对数的底数（e=2.718 28…），则下列结论正确的为

A. $f(x)$ 的图象与 x 轴相切

B. 存在实数 $k<0$，使得 $g(x)$ 的图象与 x 轴相切

C. 若 $k=\frac{1}{2}$，则方程 $f(x)=g(x)$ 有唯一实数解

D. 若 $g(x)$ 有两个零点，则 k 的取值范围为 $(0,\frac{1}{2})$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知椭圆 C 的焦点在 x 轴上，且离心率为 $\frac{1}{2}$，则 C 的方程可以为__________.

14. 设恒等式 $(1-2x)^5=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5$，则 $a_0+a_3=$__________.

15. 若在母线长为 5，高为 4 的圆锥中挖去一个小球，则剩余部分体积的最小值为__________.

16. 著名的费马问题是法国数学家皮埃尔·德·费马（1601–1665）于 1643 年提出的平面几何极值问题：“已知一个三角形，求作一点，使其与此三角形的三个顶点的距离之和最小.”费马问题中的所求点称为费马点，已知对于每个给定的三角形，都存在唯一的费马点，当 $\triangle ABC$ 的三个内角均小于 $120°$ 时，则使得 $\angle APB=\angle BPC=\angle CPA=120°$ 的点 P 即为费马点. 已知点 P 为 $\triangle ABC$ 的费马点，且 $AC\perp BC$，若 $|PA|+|PB|=\lambda|PC|$，则实数 λ 的最小值为__________.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. （10 分）

在① $2b_2=a_1+a_2$，② $b_2=a_8$，③ $T_3=a_5$ 这三个条件中选择一个，补充在下面问题中，并作出解答.

问题：已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=21n-n^2$，等比数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n，$b_1=a_3$，且______，判断是否存在唯一的 k $(k\in\mathbf{N}^*)$，使得 $b_k>1$，且 $b_{k+1}<1$. 若存在，求出 k 的值；若不存在，请说明理由.

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分.

18．（12分）

$\triangle ABC$的内角A、B、C的对边分别为a、b、c，设$\sin^2 A+\sin^2 B-\sin^2 C=\sqrt{2}\sin A\cdot\sin B$.

(1) 求C；

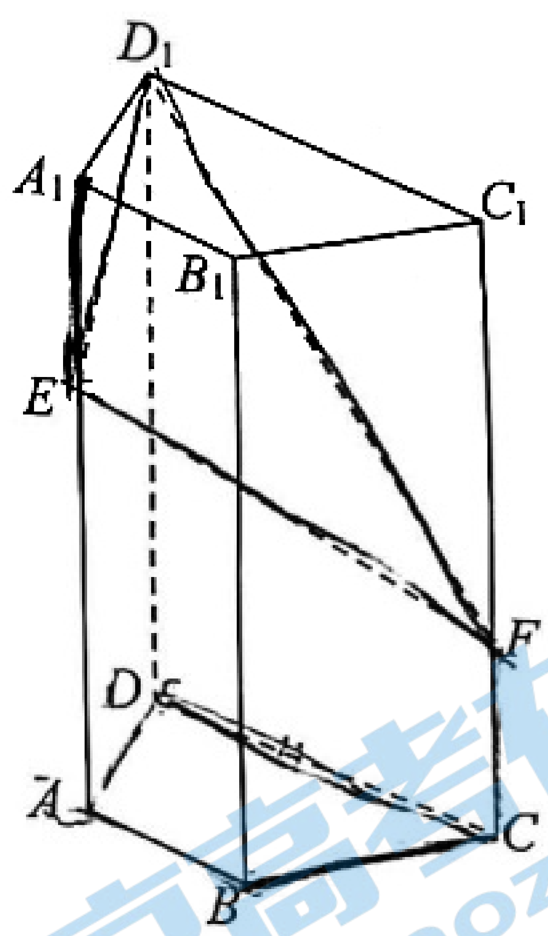
(2) 若$\cos B=\frac{3}{5}$，D是边BC上一点，且$CD=4BD$，$\triangle ACD$的面积为$\frac{7}{5}$，求AC.

19．（12分）

如图，在直四棱柱$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$AB//CD$，$DC=2$，$AA_1=3$，$AB=BC=DA=1$，点E和F分别在侧棱AA_1、CC_1上，且$A_1E=CF=1$.

(1) 求证：$BC//$平面D_1EF；

(2) 求直线AD与平面D_1EF所成角的正弦值.



（第19题图）

20．（12分）

已知某高校共有10000名学生，其图书馆阅览室共有994个座位，假设学生是否去自习是相互独立的，且每个学生在每天的晚自习时间去阅览室自习的概率均为0.1.

(1) 将每天的晚自习时间去阅览室自习的学生人数记为X，求X的期望和方差；

(2) 18世纪30年代，数学家棣莫弗发现，如果随机变量X服从二项分布$B(n,p)$，那么当n比较大时，可视为X服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$. 任意正态分布都可变换为标准正态分布（$\mu=0$且$\sigma=1$的正态分布），如果随机变量$Y\sim N(\mu,\sigma^2)$，那么令$Z=\frac{Y-\mu}{\sigma}$，则可以证明$Z\sim N(0,1)$. 当$Z\sim N(0,1)$时，对于任意实数a，记$\Phi(a)=P(Z<a)$.

已知下表为标准正态分布表（节选），该表用于查询标准正态分布对应的概率值. 例如当 $a=0.16$ 时，由于 $0.16=0.1+0.06$，则先在表的最左列找到数字 0.1（位于第三行），然后在表的最上行找到数字 0.06（位于第八列），则表中位于第三行第八列的数字 0.5636 便是 $\Phi(0.16)$ 的值.

(i) 求在晚自习时间阅览室座位不够用的概率；

(ii) 若要使在晚自习时间阅览室座位够用的概率高于 0.7，则至少需要添加多少个座位？

a	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6404	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224

21. （12 分）

在平面直角坐标系 xOy 中，O 是坐标原点，P 是直线 $x=-2$ 上的动点，过 P 作两条相异直线 l_1 和 l_2，其中 l_1 与抛物线 $C:y^2=4x$ 交于 A、B 两点，l_2 与 C 交于 M、N 两点，记 l_1、l_2 和直线 OP 的斜率分别为 k_1、k_2 和 k_3.

(1) 当 P 在 x 轴上，且 A 为 PB 中点时，求 $|k_1|$；

(2) 当 AM 为 $\triangle PBN$ 的中位线时，请问是否存在常数 μ，使得 $\dfrac{1}{k_1}+\dfrac{1}{k_2}=\mu k_3$？若存在，求出 μ 的值；若不存在，请说明理由.

22. （12 分）

已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)=x^2+a\cos x+(a-2)e^{-x}$，$a\in\mathbf{R}$.（其中常数 e 是自然对数的底数，e=2.718 28⋯）

(1) 当 $a=2$ 时，求 $f(x)$ 的极值；

(2) (i) 若 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上单调递增，求实数 a 的取值范围；

(ii) 当 $n\in\mathbf{N}^*$ 时，证明：$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(n+k)\tan\frac{1}{n+k}}>n-\frac{1}{4n+2}$.

绝密★启封并使用完毕前 **试题类型：A**

2021年深圳市高三第二次调研考试

数学试题答案及评分参考

一、单项选择题：

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	C	D	B	B	A	B	C	A

二、多项选择题：

题号	9	10	11	12
答案	BD	AC	BC	ACD

12. 设函数 $f(x)=e^x-ex$ 和 $g(x)=\ln x-kx^2+(1-2k)x+\frac{1}{2}$ $(k\in\mathbf{R})$，其中 e 是自然对数的底数（e=2.718 28…），则下列结论正确的为

A. $f(x)$ 的图象与 x 轴相切

B. 存在实数 $k<0$，使得 $g(x)$ 的图象与 x 轴相切

C. 若 $k=\frac{1}{2}$，则方程 $f(x)=g(x)$ 有唯一实数解

D. 若 $g(x)$ 有两个零点，则 k 的取值范围为 $(0,\frac{1}{2})$

解析：$f(x)=e^x-ex$，则 $f'(x)=e^x-e$；$g(x)=\ln x-kx^2+(1-2k)x+\frac{1}{2}$，

则 $g'(x)=-\dfrac{2kx^2+(2k-1)x-1}{x}=-\dfrac{(2kx-1)(x+1)}{x}(x>0)$.

（选项 A）易知 $x=1$ 是 $f(x)$ 的极小值点，且 $f(1)=0$，所以 $f(x)$ 的图象与 x 轴相切，故选项 A 正确.

（选项 B）显然当 $k<0$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 无极值点，则 $g(x)$ 的图象与 x 轴不可能相切，故选项 B 错误.

（选项 C）易知函数 $f(x)$ 的最小值 $f(1)=e^1-e\times1=0$；当 $k=\frac{1}{2}$，

则函数 $g(x)$ 的最大值 $g(\frac{1}{2k})=g(1)=\ln1-\frac{1}{2}+(1-2\times\frac{1}{2})\times1+\frac{1}{2}=0$，

因此方程 $f(x)=g(x)$ 有唯一解 $x=1$.

（选项 D）（解法一）易知当 $k>0$ 时，$x=\frac{1}{2k}$ 是 $g(x)$ 的极大值点，

若函数 $g(x)$ 有两个零点，则须有 $g(\frac{1}{2k})>0$，即 $\ln\frac{1}{2k}-k(\frac{1}{2k})^2+(1-2k)\times\frac{1}{2k}+\frac{1}{2}>0$，

化简得$\frac{1}{4k}-\frac{1}{2}>\ln(2k)$，不难解得$0<k<\frac{1}{2}$，

当$x\to 0^+$时，$g(x)\to -\infty$，

显然当$0<k<\frac{1}{2}$时，有$\frac{1}{k^2}>\frac{1}{2k}$，

又$g(\frac{1}{k^2})=\ln\frac{1}{k^2}-k(\frac{1}{k^2})^2+(1-2k)\times\frac{1}{k^2}+\frac{1}{2}\le\frac{1}{k^2}-1-\frac{1}{k^3}+\frac{1}{k^2}-\frac{2}{k}+\frac{1}{2}$

$=-\frac{1}{k^3}+\frac{2}{k^2}-\frac{2}{k}-\frac{1}{2}=\frac{1}{k^2}(2-\frac{1}{k})-(\frac{2}{k}+\frac{1}{2})$，当$0<k<\frac{1}{2}$时，$g(\frac{1}{k^2})<0$，故选项 D 正确.

（解法二）$g(x)$有两个零点$\Leftrightarrow \ln x-kx^2+(1-2k)x+\frac{1}{2}=0$

$\Leftrightarrow\frac{\ln x+\frac{1}{2}}{x}=kx+2k-1\Leftrightarrow\frac{\ln x}{x}+\frac{1}{2x}=kx+2k-1$，

构造函数$u(x)=\frac{\ln x}{x}+\frac{1}{2x}$和$v(x)=kx+2k-1$，

则$u'(x)=\frac{1-2\ln x}{2x^2}$，易知$x=\sqrt{e}$是$u(x)$的极大值点，极大值$u(\sqrt{e})=\frac{1}{\sqrt{e}}$，

函数$v(x)=kx+2k-1$的图象是过定点$(-2,-1)$的直线，

直线$y+1=k(x+2)$与函数$u(x)$的图象相切于点$(x_0,u(x_0))$，则$u'(x_0)=\frac{u(x_0)+1}{x_0+2}$，

则$\frac{1-2\ln x_0}{2x_0^2}=\frac{\frac{\ln x_0}{x_0}+\frac{1}{2x_0}+1}{x_0+2}\Leftrightarrow 2-2x_0^2-(4+4x_0)\ln x_0\Leftrightarrow 1-x_0=2\ln x_0\Leftrightarrow x_0=1$，

则$k=u'(1)=\frac{1-2\ln 1}{2}=\frac{1}{2}$，

则k的取值范围为$(0,\frac{1}{2})$，故选项 D 正确.

综上所述，选项 ACD 正确.

三、填空题：

13. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$（答案不唯一）；　14. -79；　15. $\frac{15\pi}{2}$；　16. $2\sqrt{3}+2$.

13. **解析：**$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，形如$\frac{x^2}{4m}+\frac{y^2}{3m}=1(m>0)$这样的方程均可.

16. 著名的费马问题是法国数学家皮埃尔·德·费马（1601–1665）于 1643 年提出的平面几何极值问题：“已知一个三角形，求作一点，使其与此三角形的三个顶点的距离之和最小.”费马问题中的所求点称为费马点，已知对于每个给定的三角形，都存在唯一的费马点，当$\triangle ABC$的三个内角均小于$120°$时，则使得$\angle APB=\angle BPC=\angle CPA=120°$的点$P$即为费马点. 已知点$P$为$\triangle ABC$的费马点，且$AC\perp BC$，若

$|PA|+|PB|=\lambda|PC|$，则实数 λ 的最小值为________.

解析：（解法一） 不妨设 $|PA|=m|PC|$，$|PB|=n|PC|$，且 $|PC|=x$，

$\therefore$ 由余弦定理得 $|CA|^2=x^2+m^2x^2-2mx^2\cos120°=(m^2+m+1)x^2$，

$|CB|^2=x^2+n^2x^2-2nx^2\cos120°=(n^2+n+1)x^2$，

$|AB|^2=m^2x^2+n^2x^2-2mnx^2\cos120°=(m^2+n^2+mn)x^2$，

$\because |AB|^2=|CA|^2+|CB|^2$，

$\therefore (m^2+n^2+mn)x^2=(m^2+m+1)x^2+(n^2+n+1)x^2$，即 $m+n+2=mn$，

又 $mn\le\dfrac{(m+n)^2}{4}$，

$\therefore m+n+2\le\dfrac{(m+n)^2}{4}$，

显然 $m+n=\lambda$，

$\therefore \lambda^2-4\lambda-8\ge0$，解得 $\lambda\ge2+2\sqrt{3}$，或 $\lambda\le2-2\sqrt{3}$（舍去），

易知当 $m=n=\sqrt{3}+1$ 时，等号成立，

$\therefore$ 实数 λ 的最小值为 $2\sqrt{3}+2$，故应填 $2\sqrt{3}+2$.

（解法二） 不妨设 $\angle PCA=\theta$，则 $\angle PCB=\dfrac{\pi}{2}-\theta$，$\angle PAC=\dfrac{\pi}{3}-\theta$，$\angle PBC=\theta-\dfrac{\pi}{6}$，

$\therefore$ 由正弦定理得 $\dfrac{|PA|}{|PC|}=\dfrac{\sin\theta}{\sin(\frac{\pi}{3}-\theta)}=\dfrac{\sin\theta}{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta-\frac{1}{2}\sin\theta}$，

及 $\dfrac{|PB|}{|PC|}=\dfrac{\sin(\frac{\pi}{2}-\theta)}{\sin(\theta-\frac{\pi}{6})}=\dfrac{\cos\theta}{\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta-\frac{1}{2}\cos\theta}$，

$\therefore \lambda=\dfrac{\sin\theta}{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta-\frac{1}{2}\sin\theta}+\dfrac{\cos\theta}{\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta-\frac{1}{2}\cos\theta}=\dfrac{\sqrt{3}-\sin2\theta}{\sin2\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2\sin2\theta-\sqrt{3}}-1$，

易知 $\dfrac{\pi}{6}<\theta<\dfrac{\pi}{3}$，

$\therefore 2\sin2\theta-\sqrt{3}\le2-\sqrt{3}$，

$\therefore \lambda=\dfrac{\sqrt{3}}{2\sin2\theta-\sqrt{3}}-1\ge\dfrac{\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}-1=2\sqrt{3}+2$，即 $\lambda\ge2\sqrt{3}+2$，

易知当 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ 时，等号成立，

$\therefore$ 实数 λ 的最小值为 $2\sqrt{3}+2$，故应填 $2\sqrt{3}+2$.

四、解答题：解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17.（10 分）

在① $2b_2=a_1+a_2$，② $b_2=a_8$，③ $T_3=a_5$ 这三个条件中选择一个，补充在下面问题中，并作出解答．

问题：已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=21n-n^2$，等比数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n，$b_1=a_3$，且______，判断是否存在唯一的 k ($k\in\mathbf{N}^*$)，使得 $b_k>1$，且 $b_{k+1}<1$．若存在，求出 k 的值；若不存在，请说明理由．

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分．

解：由 $S_n=n(21-n)$，得 $a_1=S_1=20$，…………1 分

当 $n>1$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=(21n-n^2)-\left[21(n-1)-(n-1)^2\right]=22-2n$，

经检验，当 $n=1$ 时，上式也成立，

故 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=22-2n$，…………3 分

则 $b_1=a_3=16$．…………4 分

选择条件①的解答：

由 $a_n=22-2n$，得 $a_1=20$，$a_2=18$，…………5 分

$b_2=\dfrac{a_1+a_2}{2}=\dfrac{20+18}{2}=19$，…………6 分

则等比数列 $\{b_n\}$ 的公比 $q=\dfrac{b_2}{b_1}=\dfrac{19}{16}>1$，…………7 分

则 $\{b_n\}$ 是递增的等比数列，且 $b_n=b_1\cdot q^{n-1}=16\cdot(\dfrac{19}{16})^{n-1}>1$，…………9 分

故不存在 k ($k\in\mathbf{N}^*$)，使得 $b_k>1$，且 $b_{k+1}<1$．…………10 分

选择条件②的解答：

由 $a_n=22-2n$， 得 $a_8=6$，即 $b_2=a_8=6$，…………5 分

则等比数列 $\{b_n\}$ 的公比 $q=\dfrac{b_2}{b_1}=\dfrac{6}{16}=\dfrac{3}{8}$，…………6 分

则 $\{b_n\}$ 的通项公式 $b_n=b_1\cdot q^{n-1}=16\cdot(\dfrac{3}{8})^{n-1}$，…………8 分

则 $\{b_n\}$ 是递减的等比数列，

当 $k=3$ 时，使得 $b_3=\dfrac{9}{4}>1$，且 $b_4=\dfrac{27}{32}>1$，

易知存在唯一的 $k=3$，使得 $b_k>1$，且 $b_{k+1}<1$．…………10 分

选择条件③的解答：

由 $a_n=22-2n$，得 $a_5=12$，…………5 分

设等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 q，

$T_3=b_1+b_1q+b_1q^2=b_1(1+q+q^2)=16(1+q+q^2)=12$，即 $1+4q+4q^2=0$，

解得 $q=-\frac{1}{2}$， ……………………………………………………………7 分

则 $\{b_n\}$ 是摆动的等比数列，且 $b_n=b_1\cdot q^{n-1}=16\cdot(-\frac{1}{2})^{n-1}$， ………………………8 分

当 $k=1$ 时，使得 $b_1=16>1>-8=b_2$，

当 $k=3$ 时，使得 $b_3=4>1>-2=b_4$，

故不存在唯一的 k $(k\in\mathbf{N}^*)$，使得 $b_k>1$，且 $b_{k+1}<1$. ……………………………………10 分

【命题意图】本题主要考查等差数列、等比数列的通项公式及前 n 项和公式等，考察了学生的数学运算、逻辑推理等核心素养.

18.（12 分）

设△ ABC 的内角 A、B、C 的对边分别为 a、b、c，且 $\sin^2 A+\sin^2 B-\sin^2 C=\sqrt{2}\sin A\cdot\sin B$.

(1) 求 C；

(2) 若 $\cos B=\frac{3}{5}$，D 是边 BC 上一点，且 $CD=4BD$，△ ACD 的面积为 $\frac{7}{5}$，求 b.

解：(1)由正弦定理，及 $\sin^2 A+\sin^2 B-\sin^2 C=\sqrt{2}\sin A\cdot\sin B$，可得 $a^2+b^2-c^2=\sqrt{2}ab$，…3 分

由余弦定理，得 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{\sqrt{2}}{2}$， ………………………………………………4 分

$\because C\in(0,\pi)$，

$\therefore C=\frac{\pi}{4}$； ……………………………………………………5 分

（解法一） $\because$ △ ACD 的面积为 $\frac{7}{5}$，且 $CD=4BD$，

$\therefore$ △ ABC 的面积为 $\frac{7}{4}$， ……………………………………………………6 分

$\because \cos B=\frac{3}{5}$，且 $B\in(0,\pi)$，

$\therefore \sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\frac{4}{5}$，……………………………………………………7 分

又 $\because C=\frac{\pi}{4}$，

$\therefore \sin A=\sin(B+C)=\sin(B+\frac{\pi}{4})=\frac{7\sqrt{2}}{10}$， ……………………………………………8 分

在△ ABC 中，由正弦定理，得 $\frac{b}{\sin B}=\frac{a}{\sin A}$，

$\therefore b=\frac{\sin B}{\sin A}\cdot a=\frac{4\sqrt{2}}{7}a$，

$\therefore a=\dfrac{7\sqrt{2}}{8}b$，　　……………………………………………10 分

$\because \triangle ABC$ 的面积为 $\dfrac{7}{4}$，

$\therefore \dfrac{7}{4}=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{7}{16}b^2$，

$\therefore b=2$，

即 $AC=2$．　　……………………………………………12 分

（解法二）设 $BD=x$，$CD=4x$，过 A 作 $AE\perp BC$ 于 E，　　…………………6 分

$\because \cos B=\dfrac{3}{5}$，且 $B\in(0,\pi)$，

$\therefore \tan B=\dfrac{4}{3}$，

则由（1）易知 $AE=\dfrac{\sqrt{2}}{2}AC=\dfrac{\sqrt{2}}{2}b$，$BE=5x-\dfrac{\sqrt{2}}{2}b$，　　……………………7 分

在直角△ ABE 中，有 $\tan B=\dfrac{4}{3}=\dfrac{AE}{BE}=\dfrac{\dfrac{\sqrt{2}}{2}b}{5x-\dfrac{\sqrt{2}}{2}b}$，　　……………………8 分

$\therefore x=\dfrac{7\sqrt{2}}{40}b$，　　…………………………………10 分

$\because S_{\Delta ACD}=\dfrac{1}{2}CD\cdot AC\cdot\sin C=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{7\sqrt{2}}{10}b^2\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{7}{20}b^2=\dfrac{7}{5}$，

$\therefore b=2$，

即 $AC=2$．　　……………………………………………12 分

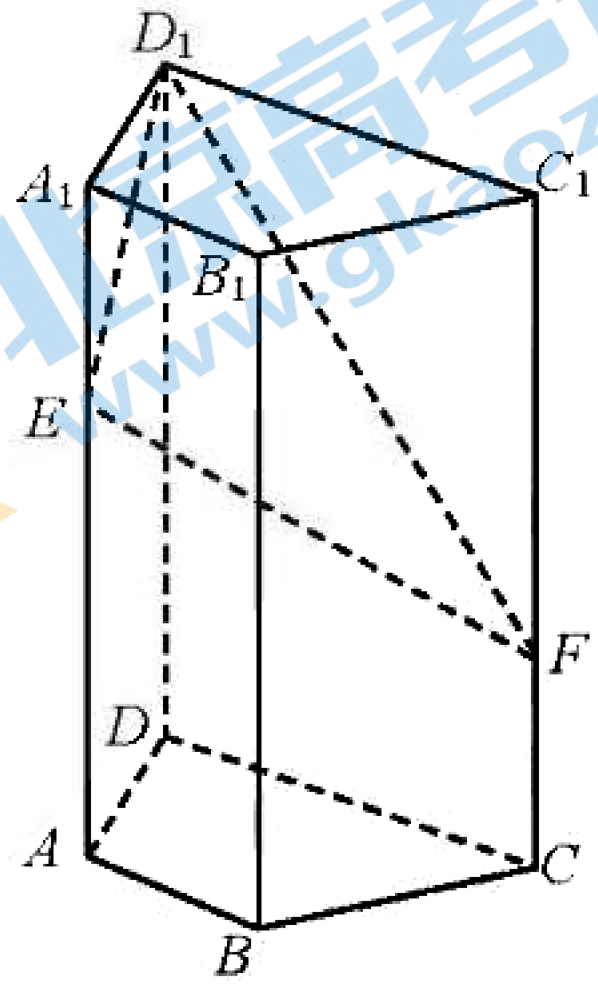
【命题意图】本题主要考察正弦定理、余弦定理、三角恒等变换等知识，渗透数形结合、转化与化归、方程等思想，意在考察学生的逻辑推理，数学运算等核心素养．

19．（12 分）

如图，在直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB//CD$，$DC=2$，$AA_1=3$，$AB=BC=DA=1$，点 E 和 F 分别在侧棱 AA_1、CC_1 上，且 $A_1E=CF=1$.

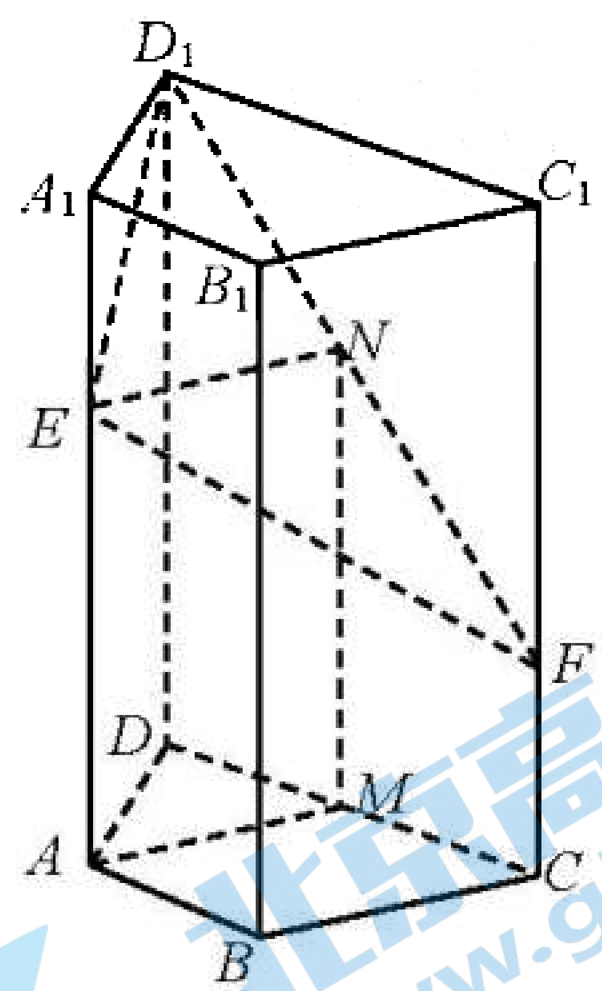
(1) 求证：$BC//$平面 D_1EF；

(2) 求直线 AD 与平面 D_1EF 所成角的正弦值.



（第 19 题图）

解：(1) 证明：如图所示，分别取 CD，FD_1 的中点 M，N，连接 MN，AM，EN.…1 分



∵ M，N 分别是 CD，FD_1 的中点，

∴ MN 是梯形 CFD_1D 的中位线，

∴ $MN//CF//D_1D$，且 $MN=\frac{1}{2}(CF+D_1D)=2$.

∵ $A_1E=1$，$A_1A//D_1D$，

∴ $EA=2=MN$，且 $EA//MN$，

∴四边形 $AENM$ 是平行四边形，

∴ $EN//AM$. ·························3 分

易证四边形 $AMCB$ 是平行四边形，

∴ $BC//AM//EN$，

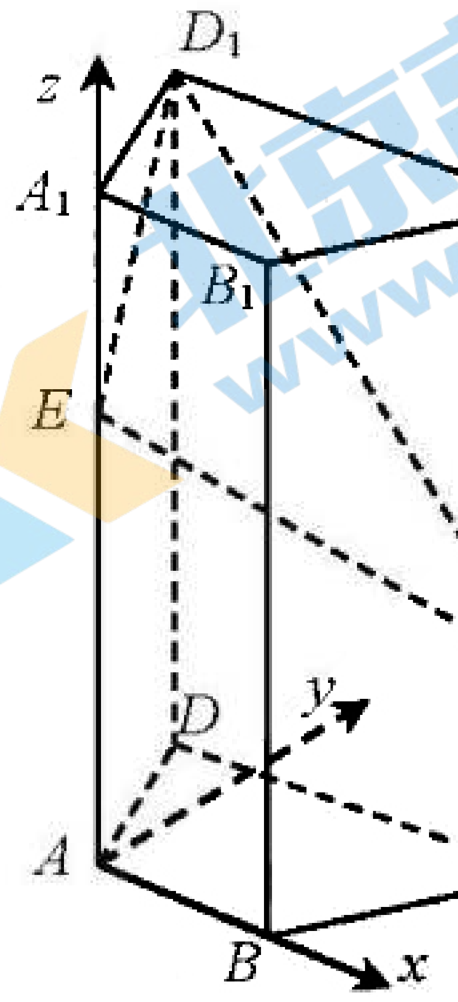
又∵ $EN\subset$平面 D_1EF，$BC\not\subset$平面 D_1EF，

∴ $BC//$平面 D_1EF. ··5 分

(2)（**解法一**）以 A 为坐标原点，AB 为 x 轴，过点 A 并垂直于 AB 的直线为 z 轴，AA_1 为 y 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，··························6 分

易得 $A(0,0,0)$，$E(0,0,2)$，$D(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0)$，$D_1(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},3)$，$F(\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},1)$，················7 分

则有 $\overrightarrow{AD}=(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0)$，$\overrightarrow{D_1E}=(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2},-1)$，$\overrightarrow{D_1F}=(2,0,-2)$，　　……………8 分



设平面 ABS 的法向量为 $\vec{m}=(x_1,y_1,z_1)$，

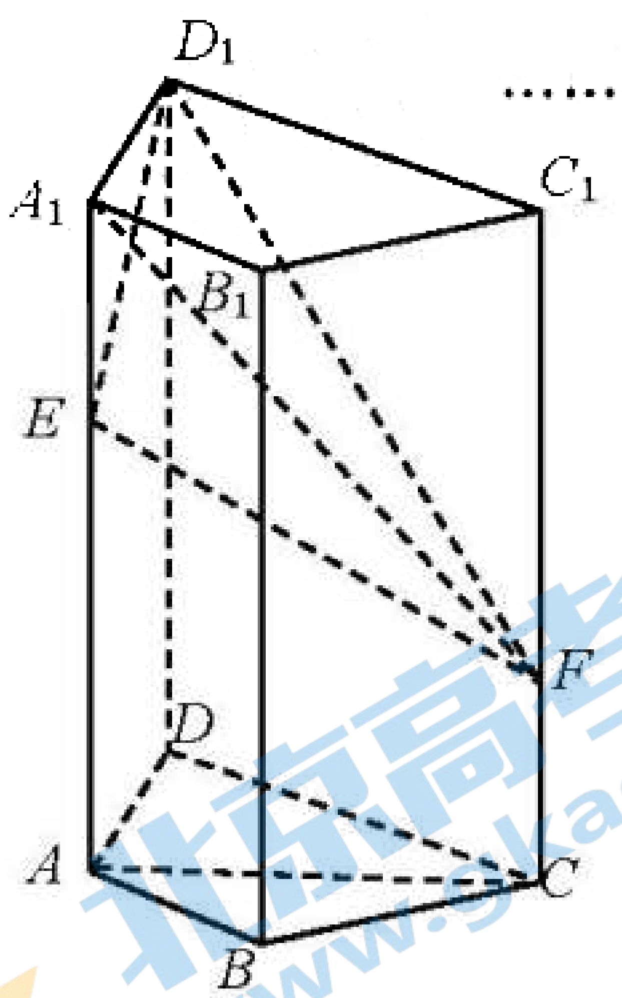
则 $\begin{cases}\overrightarrow{D_1E}\cdot\vec{m}=0,\\ \overrightarrow{D_1F}\cdot\vec{m}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}\frac{1}{2}x_1-\frac{\sqrt{3}}{2}y_1-z_1=0,\\ 2x_1+0y_1-2z_1=0,\end{cases}$　　……………9 分

则平面 ABS 的一个法向量为 $\vec{m}=(\sqrt{3},-1,\sqrt{3})$，　……10 分

$\cos<\overrightarrow{AD},\vec{m}>=\frac{\overrightarrow{AD}\cdot\vec{m}}{|\overrightarrow{AD}|\cdot|\vec{m}|}=\frac{-\sqrt{3}}{1\times\sqrt{7}}=-\frac{\sqrt{21}}{7}$，　…………11 分

设直线 AD 与平面 D_1EF 所成角为 θ，则 $\sin\theta=\left|\cos<\overrightarrow{AD},\vec{m}>\right|=\frac{\sqrt{21}}{7}$.　　………12 分

（解法二）连接 A_1F，得到三棱锥 $F-A_1DE$，连接 AC，　　………………………6 分



易知 $AC\perp AD$，且 $AC=\sqrt{3}$，$EF=2$，$DE=\sqrt{2}$，$D_1F=2\sqrt{2}$，　　……………7 分

又 $A_1A\perp AC$，则 $AC\perp$ 平面 A_1DE，　……………8 分

那么三棱锥 $F-A_1DE$ 的体积 $V=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times1\times1\times\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{6}$，

$\cos\angle DEF=\frac{(\sqrt{2})^2+(2\sqrt{2})^2-2^2}{2\times\sqrt{2}\times2\sqrt{2}}=\frac{3}{4}$，　……………10 分

则 $\sin\angle DEF=\frac{\sqrt{7}}{4}$，设 A_1 到平面 D_1EF 的距离为 h，

由 $V_{A_1-D_1EF}=V_{F-A_1D_1E}$ 可得 $\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times2\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{7}}{4}\times h=\frac{\sqrt{3}}{6}$，

解得 $h=\frac{\sqrt{21}}{7}$，　　………………………………11 分

设直线 AD 与平面 D_1EF 所成角为 θ，则 $\sin\theta=\frac{h}{A_1D_1}=\frac{\sqrt{21}}{7}$.　　……………………12 分

【命题意图】本题主要考察线面的位置关系，线面平行的判定定理和求线面所成的角. 涉及到的思想方法主要有向量法，数形结合思想. 考察了学生的直观想象，逻辑推理，数学运算等核心素养.

20．（12 分）

已知某高校共有10000 名学生，其图书馆阅览室共有994 个座位，假设学生是否去自习是相互独立的，且每个学生在每天的晚自习时间去阅览室自习的概率均为0.1.

(1) 将每天的晚自习时间去阅览室自习的学生人数记为 X，求 X 的期望和方差；

(2) 18世纪30年代，数学家棣莫弗发现，如果随机变量 X 服从二项分布 $B(n,p)$，那么当 n 比较大时，可视为 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$. 任意正态分布都可变换为标准正态分布（$\mu=0$ 且 $\sigma=1$ 的正态分布），如果随机变量 $Y \sim N(\mu,\sigma^2)$，那么令 $Z=\dfrac{Y-\mu}{\sigma}$，则可以证明 $Z \sim N(0,1)$. 当 $Z \sim N(0,1)$ 时，对于任意实数 a，记 $\Phi(a)=P(Z<a)$.

已知下表为标准正态分布表（节选），该表用于查询标准正态分布对应的概率值. 例如当 $a=0.16$ 时，由于 $0.16=0.1+0.06$，则先在表的最左列找到数字0.1（位于第三行），然后在表的最上行找到数字0.06（位于第八列），则表中位于三行八列的数字0.5636便是 $\Phi(0.16)$ 的值.

(i) 求晚自习时间阅览室座位不够用的概率；

(ii) 现对阅览室进行改造，使在晚自习时间阅览室座位够用的概率高于0.7，则阅览室至少还需要增加多少个座位？

a	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6404	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224

解：(1) 由题意可得，随机变量 X 服从二项分布，…………1 分

则 $E(X)=np=10000\times0.1=1000$，…………2 分

$D(X)=np(1-p)=10000\times0.1\times0.9=900$.…………3 分

(2) (i) 由于 (1) 中二项分布的 n 值较大，

故可以认为随机变量 X 服从正态分布，

由(1)可得，$\mu=1000$，$\sigma=30$，…………4 分

由题意，可得 $X \sim N(1000,900)$，

则 $\dfrac{X-1000}{30} \sim N(0,1)$，

则 $P(X<994)=P(\dfrac{X-1000}{30}<-0.2)=\Phi(-0.2)$，…………5 分

由标准正态分布性质可得，$\Phi(-0.2)=1-\Phi(0.2)$，

故 $P(X<994)=1-\Phi(0.2)$，…………6 分

故 $P(X\geq994)=1-P(X<994)=\Phi(0.2)=0.5793$，

故阅览室晚上座位不够用的概率为0.5793.…………7 分

(ii) 查表可得，$\Phi(0.53)=0.7019$， ……8 分

则 $P(\frac{X-1000}{30}<0.53)=0.7019$，

即 $P(X<1015.9)=0.7019$， ……9 分

又 $P(X<1015)=P(\frac{X-1000}{30}<0.5)=\Phi(0.5)=0.6915<0.7$， ……10 分

故座位数至少要1016个， ……11 分

由于 $1016-994=22$，

则阅览室至少还需要增加22个座位. ……12 分

【命题意图】本题以大学阅览室的座位安排为背景，通过正态分布的相关背景知识，考查学生数学抽象、数学建模、数学运算、逻辑推理等数学核心素养，体现化归与转化的数学思想.

21．（12分）

在平面直角坐标系 xOy 中，O 是坐标原点，P 是直线 $x=-2$ 上的动点，过 P 作两条相异直线 l_1 和 l_2，其中 l_1 与抛物线 $C:y^2=4x$ 交于 A、B 两点，l_2 与 C 交于 M、N 两点，记 l_1、l_2 和直线 OP 的斜率分别为 k_1、k_2 和 k_3.

(1) 当 P 在 x 轴上，且 A 为 PB 中点时，求 $|k_1|$；

(2) 当 AM 为△PBN 的中位线时，请问是否存在常数 μ，使得 $\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}=\mu k_3$？若存在，求出 μ 的值；若不存在，请说明理由.

解：(1)（解法一）由题意易知 $P(-2,0)$，

由对称性，只需考虑 B 在 x 轴上方的情形，不妨设 $B(\frac{y_2^2}{4},y_2)$ $(y_2>0)$，

∵ A 为 PB 中点，

∴ $A(\frac{y_2^2}{8}-1,\frac{y_2}{2})$， ……1 分

∵ A 在 C 上，

∴ $(\frac{y_2}{2})^2=4(\frac{y_2^2}{8}-1)$，

解得 $y_2=4$， ……3 分

∴ $B(4,4)$，

∴ $|k_1|=\frac{4-0}{4-(-2)}=\frac{2}{3}$. ……4 分

（解法二）由题意可知 l_1 的方程为 $x=\frac{1}{k_1}y-2$，

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$， 由对称性，只需考虑 B 在 x 轴上方的情形，不妨设 $y_2>0$，

代入 $C:y^2=4x$，得 $y^2-\dfrac{4}{k_1}y+8=0$， ……………………………………1 分

则 $y_1+y_2=\dfrac{4}{k_1}$①，$y_1y_2=8$②，

$\because$ A 为 PB 中点，

$\therefore$ $y_2=2y_1$③， ……………………………………3 分

联立①②③解得 $y_1=2$，$y_2=4$，$k_1=\dfrac{2}{3}$，

$\therefore |k_1|=\dfrac{2}{3}$. ……………………………………4 分

(2) 设 l_1 的方程为 $y=k_1(x+2)+t$，代入 $C:y^2=4x$，得 $k_1y^2-4y+8k_1+4t=0$，

则 $y_1+y_2=\dfrac{4}{k_1}$①，$y_1y_2=\dfrac{8k_1+4t}{k_1}$②， ……………………………………5 分

$\because$ AM 为△ PBN 的中位线，

$\therefore$ A 为 PB 中点，

$\therefore$ $y_2+t=2y_1$③，

联立①③解得 $y_1=\dfrac{t}{3}+\dfrac{4}{3k_1}$，$y_2=-\dfrac{t}{3}+\dfrac{8}{3k_1}$ ④， ……………………………………7 分

由②④可得 $(-\dfrac{t}{3}+\dfrac{8}{3k_1})\cdot(\dfrac{t}{3}+\dfrac{4}{3k_1})=\dfrac{8k_1+4t}{k_1}$，

进而可得 $(t^2+72)k_1^{\ 2}+32tk_1-32=0$， ……………………………………8 分

$\because$ M 为 PN 中点，

同理可得 $(t^2+72)k_2^{\ 2}+32tk_2-32=0$，

易知 k_1，k_2 为 $(t^2+72)k^2+32tk-32=0$ 的两根(事实上 $\Delta>0$，故关于 k 的上述方程必有两个实数根)，

$\therefore k_1+k_2=-\dfrac{32t}{t^2+72}$，$k_1k_2=-\dfrac{32}{t^2+72}$， ……………………………………10 分

$\therefore \dfrac{k_1+k_2}{k_1k_2}=t$，即 $\dfrac{1}{k_1}+\dfrac{1}{k_2}=t$，

$\because k_3=k_{OP}=-\dfrac{t}{2}$，

$\therefore t=-2k_3$， ……………………………………11 分

$\therefore \dfrac{1}{k_1}+\dfrac{1}{k_2}=-2k_3$，

故存在常数 $\mu=-2$，使得 $\dfrac{1}{k_1}+\dfrac{1}{k_2}=\mu k_3$ 恒成立. ……………………………………12 分

【命题意图】本题以直线与抛物线为载体，其几何关系为背景，利用方程思想、韦达定理来解决问题，利用坐标法解决几何问题贯穿始终，主要考查直线与抛物线的位置关系及探索性问题，考查学生的逻辑推理，数学运算等数学核心素养及思辨能力.

22.（12 分）

已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)=x^2+a\cos x+(a-2)e^{-x}$，$a\in\mathbf{R}$．（其中常数 e 是自然对数的底数，e=2.718 28…）

(1) 当 $a=2$ 时，求 $f(x)$ 的极值；

(2)（i）若 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上单调递增，求实数 a 的取值范围；

（ii）当 $n\in\mathbf{N}^*$ 时，证明：$\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{(n+k)\tan\dfrac{1}{n+k}}>n-\dfrac{1}{4n+2}$.

解：(1) 当 $a=2$ 时，$f(x)=x^2+2\cos x$，

$\therefore f'(x)=2(x-\sin x)$，　　……………………1 分

令 $g(x)=x-\sin x$，则 $g'(x)=1-\cos x\ge 0$，

$\therefore g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增，　　…………………………2 分

又 $g(0)=0$，

$\therefore$ 当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$g(x)<g(0)=0$；当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$g(x)>g(0)=0$，

$\therefore$ 当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$f'(x)<0$；当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，

$\therefore f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减；在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

$\therefore f(x)$ 的极小值为 $f(0)=2$，无极大值.　　………………………………3 分

(2) (i) 易知 $f'(x)=2x-a\sin x-(a-2)e^{-x}$，

若 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上单调递增，则 $2x-a\sin x-(a-2)e^{-x}\ge 0$（*）在 $[0,\pi]$ 上恒成立，

（解法一） 显然当 $x\in[0,\pi]$ 时，$\sin x+e^{-x}>0$，

不等式（*）等价于 $a\le\dfrac{2(x+e^{-x})}{\sin x+e^{-x}}$，　　…………………………4 分

下证 $\dfrac{x+e^{-x}}{\sin x+e^{-x}}\ge 1$，$x\in[0,\pi]$，

即证 $x+e^{-x}\ge\sin x+e^{-x}$，$x\in[0,\pi]$，

即证 $x-\sin x\ge 0$，$x\in[0,\pi]$，由（1）可知，显然成立，

$\therefore\dfrac{x+e^{-x}}{\sin x+e^{-x}}\ge 1$，$x\in[0,\pi]$，　　…………………………6 分

或者考虑 $\frac{x+e^{-x}}{\sin x+e^{-x}}=1+\frac{x-\sin x}{\sin x+e^{-x}}\geq 1$ 亦可（由(1)可知 $x-\sin x\geq 0$，$x\in[0,\pi]$），…………………6 分

又当 $x=0$ 时，$\frac{x+e^{-x}}{\sin x+e^{-x}}=1$，

$\therefore a\leq 2$，即实数 a 的取值范围为 $(-\infty,2]$. ……………………………………7 分

（解法二）不等式（*）在 $[0,\pi]$ 上恒成立，

即对于 $\forall x_0\in[0,\pi]$，均有 $-(\sin x_0+e^{-x_0})a+2(x_0+e^{-x_0})\geq 0$，

①当 $a\in(2,+\infty)$ 时，令 $x_0=0$，上述不等式显然不成立；……………………………5 分

②当 $a\in(-\infty,2]$ 时，令 $h(a)=-(\sin x_0+e^{-x_0})a+2(x_0+e^{-x_0})$，

易知 $h(a)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递减，

$\therefore$ 当 $a\in(-\infty,2]$ 时，$h(a)\geq h(2)=2(x_0-\sin x_0)$，……………………………6 分

由(1)可知，当 $x_0\in[0,\pi]$ 时，$x_0-\sin x_0\geq 0$，$\therefore h(a)\geq 0$，

$\therefore$ 当 $a\in(-\infty,2]$ 时，$\forall x_0\in[0,\pi]$，均有 $-(\sin x_0+e^{-x_0})a+2(x_0+e^{-x_0})\geq 0$，

综上所述，当且仅当 $a\in(-\infty,2]$ 时，不等式（*）在 $[0,\pi]$ 上恒成立，即使得 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上单调递增的实数 a 的取值范围为 $(-\infty,2]$. ……………………………………7 分

(ii) 先证当 $x\in(0,1]$ 时，有 $\cos x>1-\frac{x^2}{2}$.

（解法一）由(1)可知，当 $a=2$ 时，$f(x)=x^2+2\cos x$ 在 $[0,\pi]$ 上单调递增，

$\therefore$ 当 $x\in(0,1]$ 时，$f(x)>f(0)$，即 $\cos x>1-\frac{x^2}{2}$，……………………………8 分

（解法二）由 (1) 可知，当 $x\in(0,1]$ 时，$x>\sin x>0$，

$\therefore x^2>\sin^2 x$，$x\in(0,1]$，

$\therefore$ 当 $x\in(0,1]$ 时，$\cos x=1-2\sin^2(\frac{x}{2})>1-2\times(\frac{x}{2})^2=1-\frac{x^2}{2}$，

即 $\cos x>1-\frac{x^2}{2}$，……………………………………8 分

$\therefore$ 当 $x\in(0,1]$ 时，有 $\cos x>1-\frac{x^2}{2}$.

当 $x\in[1,+\infty)$ 时，易知 $1\geq\frac{1}{x}>\sin\frac{1}{x}>0$，

$\therefore \dfrac{1}{x\tan\frac{1}{x}}=\dfrac{\frac{1}{x}}{\tan\frac{1}{x}}>\dfrac{\sin\frac{1}{x}}{\tan\frac{1}{x}}=\cos\dfrac{1}{x}$， ……………………9 分

（解法一） 再证当 $x\in[1,+\infty)$ 时，有 $\cos\dfrac{1}{x}>1-(\dfrac{1}{2x-1}-\dfrac{1}{2x+1})$.

$\because \cos\dfrac{1}{x}>1-\dfrac{1}{2x^2}>1-\dfrac{2}{4x^2-1}=1-(\dfrac{1}{2x-1}-\dfrac{1}{2x+1})$，

$\therefore$ 当 $x\in[1,+\infty)$ 时，有 $\cos\dfrac{1}{x}>1-(\dfrac{1}{2x-1}-\dfrac{1}{2x+1})$，

即 $\dfrac{1}{x\tan\frac{1}{x}}>1-(\dfrac{1}{2x-1}-\dfrac{1}{2x+1})$，$x\in[1,+\infty)$， ……………………10 分

$\therefore \dfrac{1}{(n+1)\tan\frac{1}{n+1}}>1-(\dfrac{1}{2n+1}-\dfrac{1}{2n+3})$，

$\dfrac{1}{(n+2)\tan\frac{1}{n+2}}>1-(\dfrac{1}{2n+3}-\dfrac{1}{2n+5})$，

…，

$\dfrac{1}{2n\tan\frac{1}{2n}}>1-(\dfrac{1}{4n-1}-\dfrac{1}{4n+1})$，

将上述不等式相加得，$\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{(n+k)\tan\frac{1}{n+k}}>n-\dfrac{1}{2n+1}+\dfrac{1}{4n+1}$， ……………………11 分

又 $n-\dfrac{1}{2n+1}+\dfrac{1}{4n+1}>n-\dfrac{1}{2n+1}+\dfrac{1}{4n+2}=n-\dfrac{1}{4n+2}$，

$\therefore \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{(n+k)\tan\frac{1}{n+k}}>n-\dfrac{1}{4n+2}$. ……………………12 分

（解法二） 不难知道当 $x\in(-1,+\infty)$ 时，有 $\ln(1+x)\le x$（证明略），

下证当 $x\in[2,+\infty)$ 时，有 $\cos\dfrac{1}{x}>1+\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{2x-1}{2x+1}$. ……………………9 分

$\because$ 易知当 $x\in[2,+\infty)$ 时，$\dfrac{(x-1)(x+1)}{x^2}>\dfrac{2x-1}{2x+1}$，

$\therefore \cos\dfrac{1}{x}-1>-\dfrac{1}{2x^2}\ge\dfrac{1}{2}\ln(1-\dfrac{1}{x^2})=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{(x-1)(x+1)}{x^2}>\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{2x-1}{2x+1}$，

$\therefore$ 当 $x\in[2,+\infty)$ 时，$\cos\dfrac{1}{x}>1+\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{2x-1}{2x+1}$，

$\therefore \cos\dfrac{1}{n+1}>1+\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{2n+1}{2n+3}$，

$\cos\dfrac{1}{n+2}>1+\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{2n+3}{2n+5}$，

…，

$\cos\frac{1}{2n} > 1+\frac{1}{2}\ln\frac{4n-1}{4n+1}$，

将上述不等式相加得，

$\cos\frac{1}{n+1}+\cos\frac{1}{n+2}+\cdots+\cos\frac{1}{2n} > n+\frac{1}{2}\ln\frac{2n+1}{4n+1} = n-\frac{1}{2}\ln(2-\frac{1}{2n+1})$， …………10 分

下证 $\ln(2-x) < x$，$x\in(0,\frac{1}{3}]$，即证 $\ln(2-x)-x<0$，$x\in(0,\frac{1}{3}]$，

显然函数 $y=\ln(2-x)-x$ 在 $(0,\frac{1}{3}]$ 上单调递减，

所以当 $x\in(0,\frac{1}{3}]$ 时，$y=\ln(2-x)-x \geq \ln\frac{5}{3}-\frac{1}{3}$，

下证 $\ln\frac{5}{3}-\frac{1}{3}>0$，即证 $e^{\frac{1}{3}}<\frac{5}{3}$，即证 $e<(\frac{5}{3})^3=\frac{125}{27}$，显然成立，

又当 $n\in\mathbf{N}^*$ 时，$\frac{1}{2n+1}\in(0,\frac{1}{3}]$，

$\therefore \ln(2-\frac{1}{2n+1})<\frac{1}{2n+1}$， ……………………11 分

$\therefore n-\frac{1}{2}\ln(2-\frac{1}{2n+1}) > n-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2n+1} = n-\frac{1}{4n+2}$，

即 $\cos\frac{1}{n+1}+\cos\frac{1}{n+2}+\cdots+\cos\frac{1}{2n} > n-\frac{1}{4n+2}$，

$\therefore \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(n+k)\tan\frac{1}{n+k}} > n-\frac{1}{4n+2}$. ……………………12 分

【命题意图】本题以基本初等函数的极值、单调性问题和不等式证明为载体，考查学生利用导数分析、解决问题的能力，分类讨论、化归转化思想和逻辑推理、数学运算等核心素养，具有较强的综合性.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “精益求精、专业严谨 ” 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。