

## 数学试卷

2022.10

本试卷共 4 页，22 小题，满分 150 分。考试时间 120 分钟。

- 注意事项：1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、考生号、试室号和座位号填写在答题卡上。  
2. 用 2B 铅笔将考生号、座位号等填涂在答题卡相应位置上。作答选择题时，选出每小题答案后，用 2B 铅笔将答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案。答案不能答在试卷上。  
3. 非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新答案；不准使用铅笔和涂改液、涂改带。不按以上要求作答无效。  
4. 考生必须保证答题卡的整洁。考试结束后，将试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 设集合  $A = \{1, 2\}$ ,  $B = \{x | x^2 - 2x = 0\}$ , 则  $A \cup B$  的子集个数是  
A. 1                      B. 2                      C. 3                      D. 8
2. 已知  $z = 4 - i$ , 且  $az + b\bar{z} = 4 + 3i$ , 其中  $a, b$  为实数, 则  $|a + bi| =$   
A. 1                      B. 3                      C.  $\sqrt{5}$                       D. 5
3. 把 120 个面包分给 5 个人, 使每人所得面包个数成等差数列, 且使较大的三份之和是较小的两份之和的 7 倍, 则最小一份的面包个数为  
A.  $\frac{5}{3}$                       B. 2                      C. 6                      D. 11
4. 基本再生数  $R_0$  与世代间隔  $T$  是新冠肺炎的流行病学基本参数. 基本再生数指一个感染者传染的平均人数, 世代间隔指相邻两代间传染所需的平均时间. 在新冠肺炎疫情初始阶段, 可以用指数模型:  $I(t) = e^{rt}$  描述累计感染病例数  $I(t)$  随时间  $t$  (单位: 天) 的变化规律, 指数增长率  $r$  与  $R_0, T$  近似满足  $R_0 = 1 + rT$ . 有学者基于已有数据估计出  $R_0 = 3.28, T = 6$ . 据此, 在新冠肺炎疫情初始阶段, 累计感染病例数增加 2 倍需要的时间约为 ( $\ln 2 \approx 0.69, \ln 3 \approx 1.10$ )  
A. 1.8 天                      B. 2.9 天                      C. 3.6 天                      D. 5.8 天
5. 双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的一条渐近线的倾斜角为  $40^\circ$ , 则  $C$  的离心率为  
A.  $2\sin 40^\circ$                       B.  $2\cos 40^\circ$                       C.  $\frac{1}{\sin 50^\circ}$                       D.  $\frac{1}{\cos 50^\circ}$
6.  $(\frac{x}{2} - \frac{1}{x})^{10}$  的展开式中第 2 项与第 6 项的二项式系数相等, 则该展开式中的常数项为  
A. -16                      B. 160                      C. -1120                      D. 1120

7. 设  $a = \ln\sqrt{2}$ ,  $b = \frac{\ln\pi}{\pi}$ ,  $c = \frac{1}{e}$ , 则

- A.  $a < b < c$       B.  $c < b < a$       C.  $b < c < a$       D.  $b < a < c$

8. 已知  $m, n$  为异面直线,  $\alpha, \beta$  为两个不同平面,  $m \perp \alpha, n \perp \beta$ . 若直线  $l$  满足  $l \perp m, l \perp n, l \not\subset \alpha, l \not\subset \beta$ , 则

- A.  $\alpha \perp \beta, l \perp \beta$       B.  $\alpha \parallel \beta, l \parallel \alpha$   
C.  $\alpha$  与  $\beta$  相交, 且交线垂直于  $l$       D.  $\alpha$  与  $\beta$  相交, 且交线平行于  $l$

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 有选错的得 0 分, 部分选对的得 2 分.

9. 某校为了解高中学生的身高情况, 根据男、女学生所占的比例, 采用样本量按比例分配的分层随机抽样分别抽取了男生 50 名和女生 30 名, 测量他们的身高所得数据 (单位: cm) 如下:

性别	人数	平均数	方差
男生	50	172	18
女生	30	164	30

根据以上数据, 可计算出该校高中学生身高的总样本平均数  $\bar{x}$  与总样本方差  $s^2$  分别是

- A.  $\bar{x} = 168$       B.  $\bar{x} = 169$       C.  $s^2 = 22.5$       D.  $s^2 = 37.5$

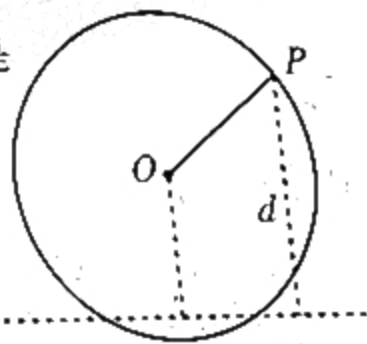
10. 已知函数  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ , 则

- A.  $f(x)$  的极小值为 2      B.  $f(x)$  有两个零点  
C. 点  $(1, 2)$  是曲线  $y = f(x)$  的对称中心      D. 直线  $y = -3x + 5$  是曲线  $y = f(x)$  的切线

11. 如图, 一个半径为 3m 的筒车按逆时针方向每分钟转 1.5 圈, 筒车的轴心  $O$  距离水面的高度为 2.2m. 设筒车上的某个盛水筒  $P$  到水面的距离为  $d$  (单位: m) (在水面下则  $d$  为负数). 若以盛水筒  $P$  刚浮出水面时开始计算时间,  $d$  与时间  $t$  (单位: s) 之间的关系为

$d = A \sin(\omega t + \varphi) + b$  ( $A > 0, \omega > 0, -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$ ), 则下列结论正确的是

- A.  $A = 3$       B.  $\omega = \frac{4\pi}{3}$   
C.  $\sin\varphi = -\frac{11}{15}$       D.  $b = -0.8$



12. 已知  $F$  为椭圆  $C: \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{8} = 1$  的左焦点, 经过原点  $O$  的直线  $l$  与椭圆  $C$  交于  $A, B$  两点,

$AD \perp x$  轴, 垂足为  $D$ ,  $BD$  与椭圆  $C$  的另一个交点为  $E$ , 则

- A.  $AB \perp AE$       B.  $\triangle ABD$  面积的最大值为  $4\sqrt{2}$   
C.  $\triangle ABF$  周长的最小值为 12      D.  $\frac{1}{|AF|} + \frac{16}{|BF|}$  的最小值为  $\frac{25}{8}$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 已知向量  $a, b$  满足  $|a|=1, |b|=2, |a+2b|=5$ , 则  $a \cdot b =$  \_\_\_\_\_.

14. 某品牌手机的电池使用寿命  $X$  (单位: 年) 服从正态分布, 且使用寿命不少于 1 年的概率为 0.9, 使用寿命不少于 9 年的概率为 0.1, 则该品牌手机的电池使用寿命不少于 5 年且不多于 9 年的概率为 \_\_\_\_\_.

15. 若  $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ , 且  $2\sin 3\alpha + 3\sin 2\alpha = 0$ , 则  $\cos \alpha =$  \_\_\_\_\_.

16. 在梯形  $ABCD$  中,  $AB \parallel CD, AB=4, BC=CD=DA=2$ , 将  $\triangle ACD$  沿  $AC$  折起, 连接  $BD$ , 得到三棱锥  $D-ABC$ . 当三棱锥  $D-ABC$  的体积取得最大值时, 该三棱锥的外接球的表面积为 \_\_\_\_\_.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

任取一个正整数, 若是奇数, 就将该数乘 3 再加上 1; 若是偶数, 就将该数除以 2. 反复进行上述两种运算, 经过有限次步骤后, 必进入循环圈 “ $1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ ”. 这就是数学史上著名的“冰雹猜想”(又称“角谷猜想”). 比如取正整数  $m=6$ , 根据上述运算法则得出  $6 \rightarrow 3 \rightarrow 10 \rightarrow 5 \rightarrow 16 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ , 共需经过 8 个步骤变成 1 (简称为 8 步“雹程”). 现给出冰雹

猜想的递推关系如下: 已知数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 = m$  ( $m$  为正整数),  $a_{n+1} = \begin{cases} \frac{a_n}{2}, & \text{当 } a_n \text{ 为偶数,} \\ 3a_n + 1, & \text{当 } a_n \text{ 为奇数.} \end{cases}$

(1) 当  $m=7$  时, 试确定使得  $a_n=1$  需要多少步雹程;

(2) 若  $a_7=1$ , 求  $m$  所有可能的取值集合  $M$ .

18. (12 分)

已知  $\triangle ABC$  的内角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ , 且  $a \cos B + \sqrt{3} a \sin B = b + c$ .

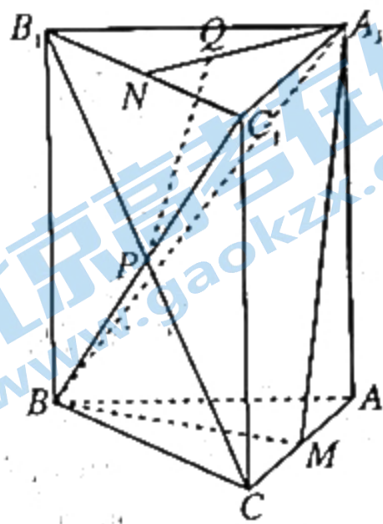
(1) 求  $A$ ;

(2) 若  $a=4$ ,  $\triangle ABC$  的面积为  $4\sqrt{3}$ , 求  $\triangle ABC$  的周长.

19. (12分)

如图, 在直三棱柱  $ABC-A_1B_1C_1$  中,  $AB \perp AC$ ,  $AB=AC=2$ ,  $AA_1=3$ ,  $M$  是  $AC$  的中点.

- (1) 求平面  $A_1BM$  与平面  $A_1B_1C_1$  夹角的余弦值;
- (2) 若  $N$  是  $B_1C_1$  的中点,  $BC_1 \cap B_1C = P$ , 则在线段  $A_1N$  上是否存在点  $Q$ , 使得  $PQ \parallel$  平面  $A_1BM$ ? 若存在, 求出  $A_1Q$  的长; 若不存在, 请说明理由.



20. (12分)

最新研发的某产品每次试验结果为成功或不成功, 且每次试验的成功概率为  $p$  ( $0 < p < 1$ ). 现对该产品进行独立重复试验, 若试验成功, 则试验结束; 若试验不成功, 则继续试验, 且最多试验 8 次. 记  $X$  为试验结束时所进行的试验次数,  $X$  的数学期望为  $E(X)$ .

- (1) 证明:  $E(X) < \frac{1}{p}$ ;
- (2) 某公司意向投资该产品, 若  $p=0.2$ , 每次试验的成本为  $a$  ( $a > 0$ ) 元, 若试验成功则获利  $8a$  元, 则该公司应如何决策投资? 请说明理由.

21. (12分)

已知抛物线  $C: x^2=2py$  ( $p > 0$ ) 的焦点为  $F$ , 且  $F$  与圆  $M: x^2+(y+3)^2=1$  上点的距离的最大值为 6.

- (1) 求  $C$  的方程;
- (2) 若点  $P$  在圆  $M$  上,  $PA, PB$  是  $C$  的两条切线,  $A, B$  是切点, 求  $\triangle PAB$  面积的最小值.

22. (12分)

已知函数  $f(x) = 2x - \ln x$ .

- (1) 当  $x \geq 1$  时, 证明:  $f(x) \geq x + \frac{1}{x}$ ;
- (2) 若  $f(x) + ae^{3x} + \ln a \geq 0$ , 求  $a$  的取值范围.

## 关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “精益求精、专业严谨” 的建设理念，不断探索 “K12 教育+互联网+大数据” 的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供 “衔接和桥梁纽带” 作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。



微信搜一搜

北京高考资讯